

# ΔΙΚΤΥΩΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

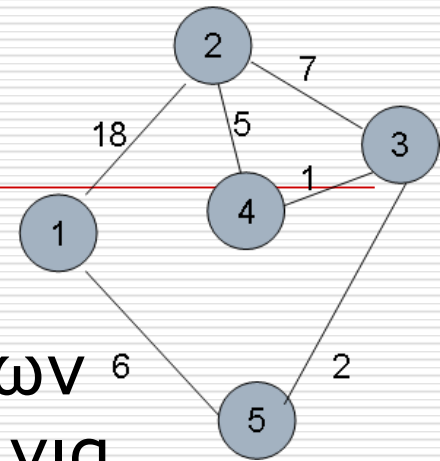
---

- Στοιχεία θεωρίας γραφημάτων
- Προβλήματα σχετικά με τη θεωρία γραφημάτων
  - Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής
  - Το πρόβλημα της μέγιστης ροής
  - Το πρόβλημα του ελάχιστου δένδρου
  - Ασκήσεις

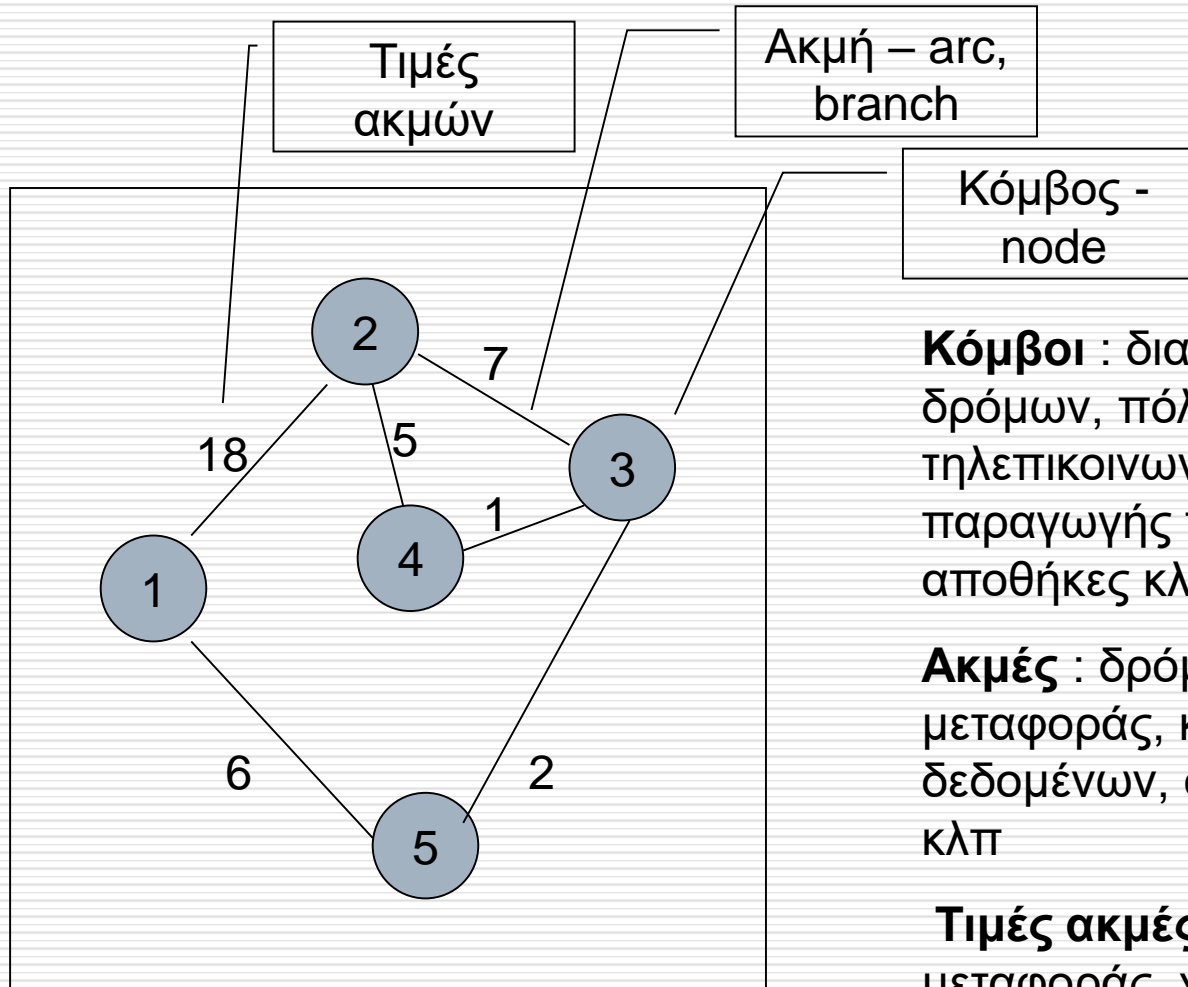
# Τα γραφήματα

---

- ❑ Σε πολλά προβλήματα (μεταφοράς υλικών, δρομολόγια, χάραξη δικτύων κλπ) χρησιμοποιούμε **γραφήματα** για να απεικονίσουμε τα χαρακτηριστικά και τα δεδομένα του προβλήματος
- ❑ Η θεωρία γραφημάτων ξεκίνησε από τον 18 αιώνα. Πολλοί διάσημοι μαθηματικοί (Euler, Dijkstra, Hamilton κλπ) επινόησαν αλγορίθμους για την επίλυση προβλημάτων σχετικά με γραφήματα



# Δομικά στοιχεία των γραφημάτων



**Κόμβοι** : διασταυρώσεις δρόμων, πόλεις, τηλεπικοινωνιακά κέντρα, θέσεις παραγωγής προϊόντων, αποθήκες κλπ.

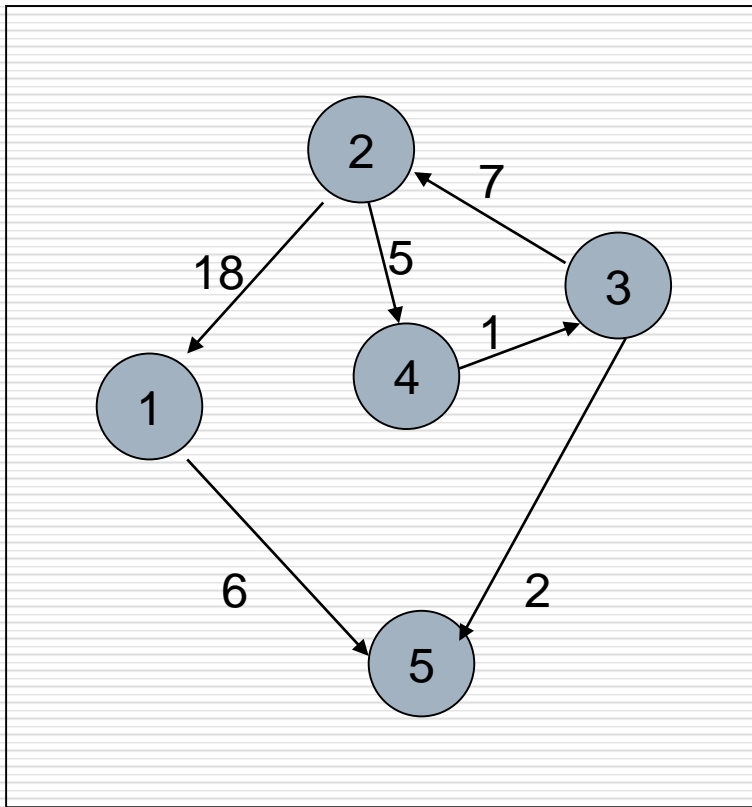
**Ακμές** : δρόμοι, κανάλια μεταφοράς, καλώδια, δίκτυα δεδομένων, σωλήνες ύδρευσης κλπ

**Τιμές ακμές** : κόστος μεταφοράς, χρόνος μεταφοράς, παράγοντας κινδύνου, μήκος κλπ

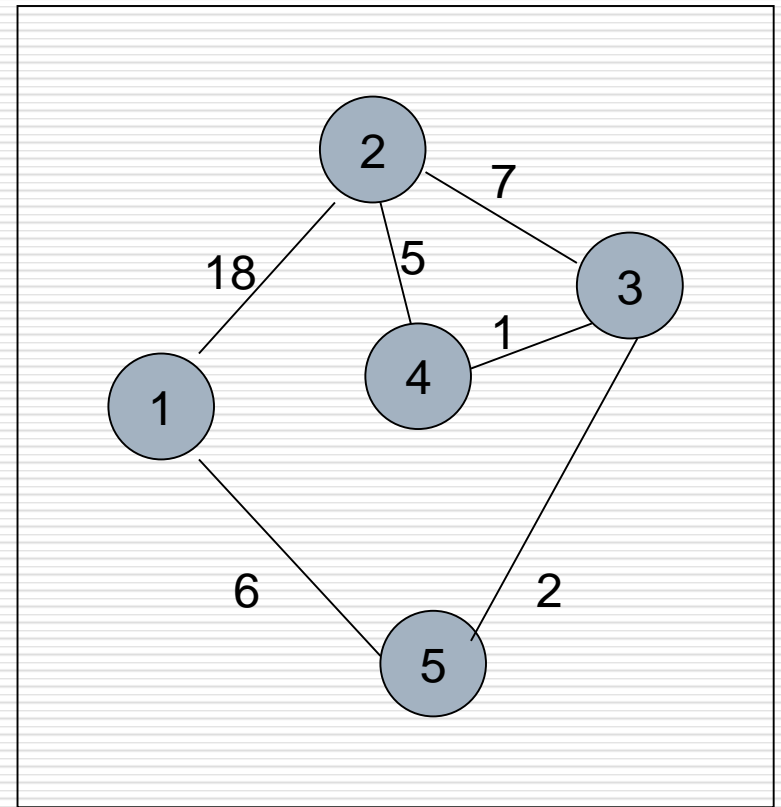
# Είδη γραφημάτων

---

Προσανατολισμένο γράφημα

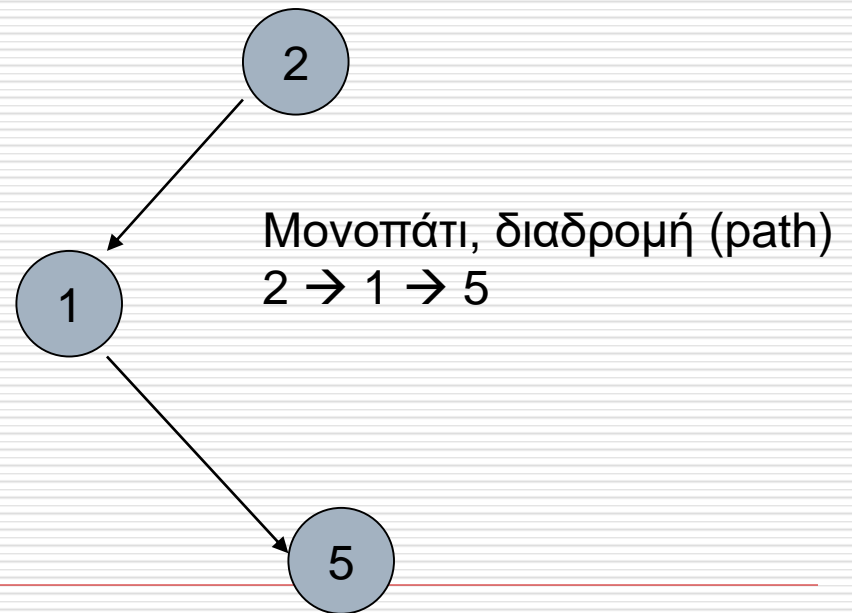
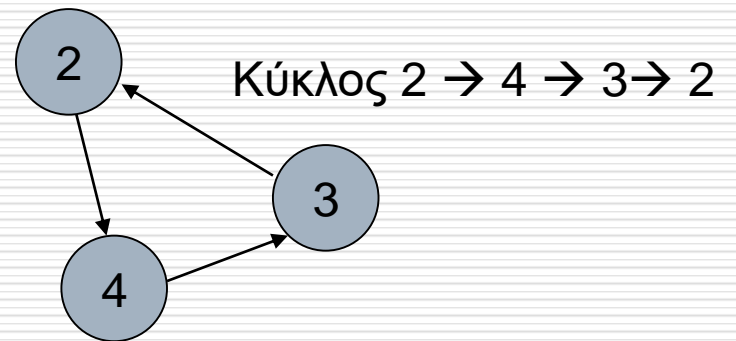
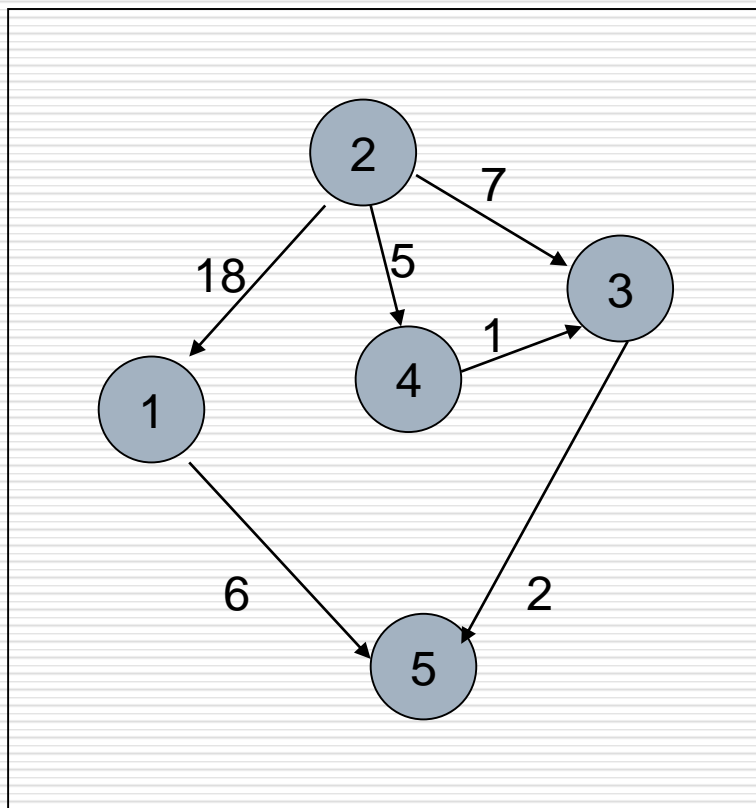


Μη προσανατολισμένο γράφημα



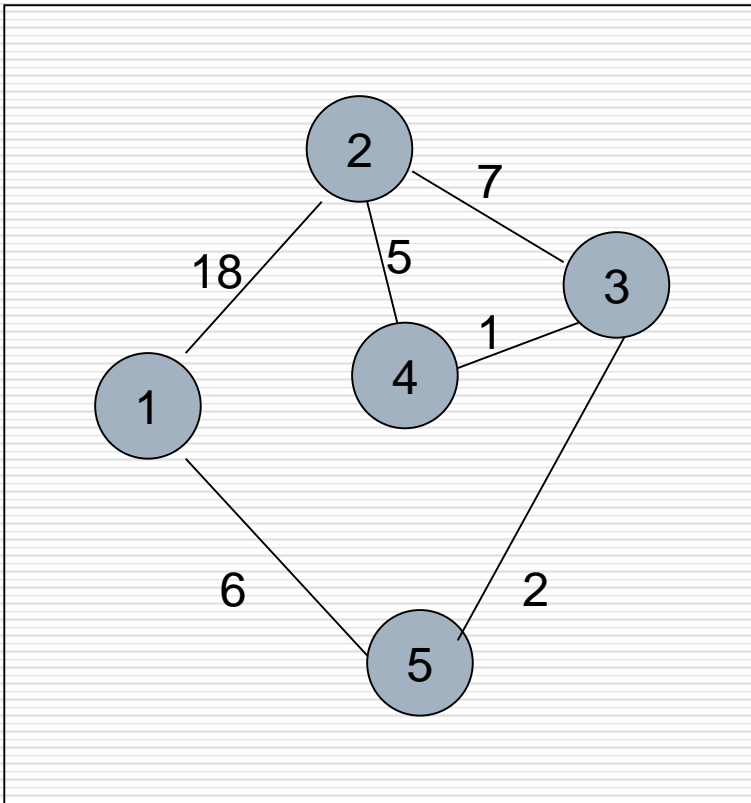
# Στοιχεία των γραφημάτων

---



# Στοιχεία των γραφημάτων

---



Εάν ένα σε ένα γράφημα κάθε δύο κόμβοι συνδέονται με ένα τουλάχιστον μονοπάτι, τότε το γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό (connected)**

Εάν ένα γράφημα δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται **δένδρο (tree)**

# Παραδείγματα

---

- Συγκοινωνιακά δίκτυα
    - Κόμβοι : πόλεις, σταθμοί, στάσεις, διασταυρώσεις, λιμάνια
    - Ακμές : Δρόμοι, αεροδιάδρομοι, γραμμές πλοίων, τρένων κλπ
    - Τιμή ακμών : Απόσταση, χρόνος ταξιδιού, Κόστος μεταφοράς προϊόντων
  - Διανομή προϊόντων
    - Κόμβοι : υποκαταστήματα, αποθήκες
    - Ακμές : δρομολόγια, Δρόμοι, αεροδιάδρομοι, γραμμές πλοίων, τρένων κλπ
    - Τιμή ακμών : Απόσταση, χρόνος ταξιδιού, Κόστος μεταφοράς προϊόντων
  - Δίκτυα τηλεφωνίας, υπολογιστών
    - Κόμβοι : σπίτια, υπολογιστές, σταθμοί κινητής τηλεφωνίας, πομποί ασύρματης επικοινωνίας
    - Ακμές : καλώδια, συνδέσεις ασύρματης επικοινωνίας
    - Τιμή ακμών : Μήκος καλωδίων, Απόσταση, Κόστος μεταφοράς μηνυμάτων / επικοινωνίας
-

# Προβλήματα σχετικά με τη θεωρία γραφημάτων

---

- Προβλήματα :
    - Της συντομότερης διαδρομής – το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή (travelling salesman problem-TSP)
    - Το πρόβλημα του ελάχιστου δένδρου (minimal spanning tree)
    - Της μέγιστης ροής (maximal flow)
  
  - Για τα προβλήματα αυτά, η βέλτιστη λύση ΔΕΝ βρίσκεται πάντοτε σε σχετικά μικρό χρόνο.
  
  - Έχουν αναπτυχθεί ευρετικοί αλγόριθμοι (heuristic) οι οποίοι εντοπίζουν μία ικανοποιητική λύση κοντά στη βέλτιστη
-

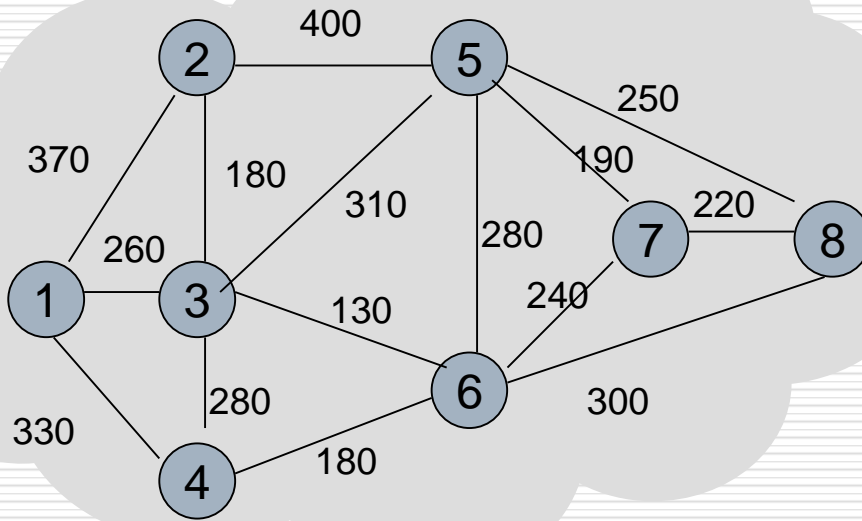


# Το πρόβλημα του ελάχιστου δένδρου (minimal spanning tree)

---

- Σε ένα γράφημα ζητείται να βρεθούν οι κόμβοι εκείνοι οι οποίοι ορίζουν τη συνολική ελάχιστη απόσταση επικοινωνίας όλων των κόμβων
  - Παράδειγμα : Μία τηλεφωνική εταιρεία επιθυμεί να διασυνδέσει τηλεφωνικά κέντρα (κόμβοι) με το ελάχιστο μήκος καλωδιώσεων
-

# Παράδειγμα



Τα βάρη στις ακμές αφορούν απόσταση (μέτρα). Ο αριθμός των δένδρων που θα κοπεί είναι ανάλογος της απόστασης.

Σε μία ξενοδοχειακή μονάδα θα πρέπει να τοποθετηθούν 8 συνολικά αθλητικές εγκαταστάσεις (γήπεδο τένις, πισίνα, χώρος ιππασίας, γήπεδο μινι-γκόλφ κλπ) οι οποίες πρέπει να επικοινωνούν όλες μεταξύ τους με μονοπάτια. Η έκταση του ξενοδοχείου βρίσκεται σε ιδιωτικό δάσος το οποίο πρέπει να διατηρηθεί. Ζητείται να σχεδιαστούν τα μονοπάτια που θα συνδέουν τις αθλητικές εγκαταστάσεις με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών (όχι κατ' ανάγκη το συντομότερο ανα δύο).

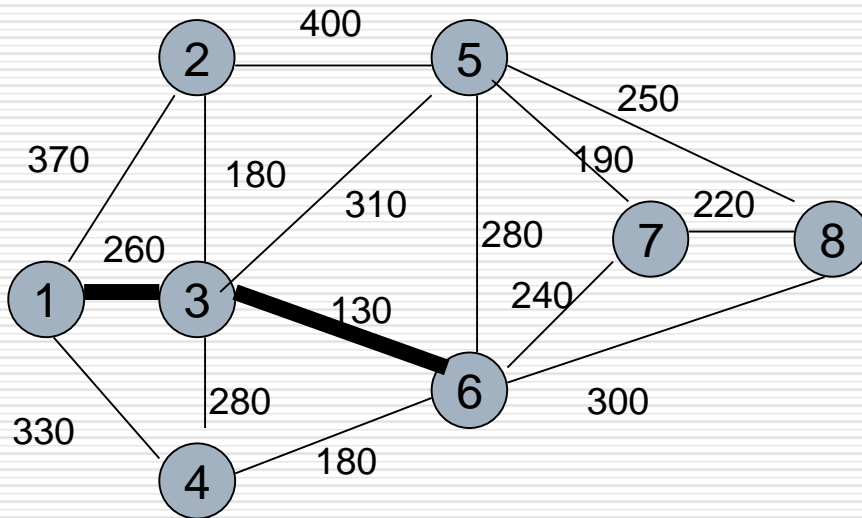
# Αλγόριθμος

---

- Βήμα 1 Ξεκινάμε από έναν οποιαδήποτε κόμβο. Αυτός εισέρχεται στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων
- Βήμα 2 Από το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων εντοπίζουμε εκείνον που η ακμή του έχει το μικρότερο βάρος. Εάν υπάρχουν πολλοί τέτοιοι επιλέγουμε έναν αυθαίρετα (η περίπτωση αυτή είναι ένδειξη για πολλαπλές βέλτιστες λύσεις)
- Βήμα 3 Εισάγουμε τον κόμβο στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων. Εάν έχουν εξαντληθεί όλοι οι κόμβοι τότε σταματάμε, εάν όχι πηγαίνουμε στο βήμα 2.
-

# Λύση

---



$\Lambda$  = το σύνολο των  
συνδεδεμένων κόμβων

Ξεκινάμε από τον κόμβο 1.  
 $\Lambda = \{1\}$

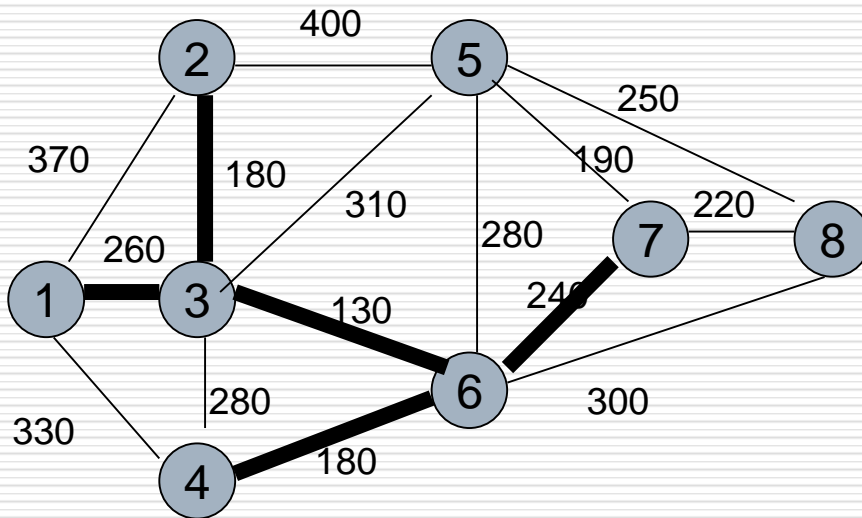
Διαλέγουμε τον κόμβο 3 επειδή  
η ακμή 1-3 έχει το μικρότερο  
βάρος. Ο κόμβος 3 εισάγεται  
στο  $\Lambda$ ,  $\Lambda = \{1, 3\}$ .

Απο το σύνολο των  
συνδεδεμένων κόμβων  
 $\Lambda = \{1, 3\}$ , η ακμή 3-6 έχει το  
μικρότερο βάρος  $\Rightarrow \Lambda = \{1, 3,$   
6}

Ακμή	1-3	3-6
Μήκος	260	130

---

# Λύση



Από το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων  $\Lambda = \{1, 3, 6\}$ ,

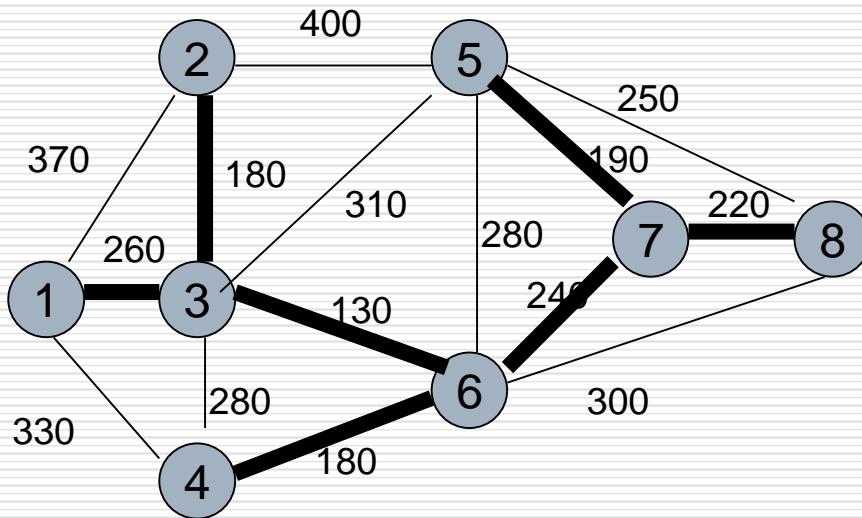
Οι ακμές 6-4, και 3-2 έχουν το το μικρότερο βάρος, επιλέγουμε την 3-2  $\Rightarrow \Lambda = \{1, 3, 6, 2\}$

Από το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων  $\Lambda = \{1, 3, 6, 2\}$ ,  
Η ακμή 6-4 έχει το το μικρότερο βάρος  $\Rightarrow \Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4\}$

Από το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων  $\Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4\}$ ,  
Η ακμή 6-7 έχει το το μικρότερο βάρος  $\Rightarrow \Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4, 7\}$

Ακμή	1-3	3-6	3-2	6-4	6-7
Μήκος	260	130	180	180	240

# Λύση



Από το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων  $\Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4, 7\}$  η ακμή 7-5 έχει το μικρότερο βάρος  $\Rightarrow \Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4, 7\}$

Από το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων  $\Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4, 7, 5\}$  η ακμή 7-8 έχει το μικρότερο βάρος  $\Rightarrow \Lambda = \{1, 3, 6, 2, 4, 7, 5, 8\}$

Το συνολικό μήκος των ακμών του δένδρου είναι  
 $260 + 130 + 180 + 180 + 240 + 190 + 220 = 1400$  μέτρα

Ακμή	1-3	3-6	3-2	6-4	6-7	7-5	7-8
Μήκος	260	130	180	180	240	190	220

# Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής (shortest route)

---

- Ξεκινώντας από ένα συγκεκριμένο κόμβο (αφετηρία) ζητείται να προσδιοριστεί η *συντομότερη διαδρομή* προς ένα κόμβο προορισμού
  - *συντομότερη διαδρομή* = η διαδρομή με το μικρότερο άθροισμα τιμών
-

# Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

---

- ❑ Στο πρόβλημα αυτό θεωρούμε ότι κάθε κόμβος δρα ως πηγή που τροφοδοτεί τους άλλους γειτονικούς κόμβους. Η ακμή χαρακτηρίζει τη ροή και το βάρος δείχνει τη δυναμικότητα.
  - ❑ Κάθε κόμβος επίσης δρα ως δέκτης της ροής των άλλων γειτονικών κόμβων
  - ❑ Το πρόβλημα είναι να βρούμε τη διαδρομή από έναν κόμβο σε άλλο που έχει τη μέγιστη ροή
  - ❑ Εφαρμογές : συστήματα διανομής πετρελαίου, νερού, αποχέτευσης, ηλεκτρικού κ.λ.π
-



# Αριθμητικό Παράδειγμα

---

- Να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή από τη κορυφή **2** στη κορυφή **5**

**2-1-5**

κόστος  $18+6=24$

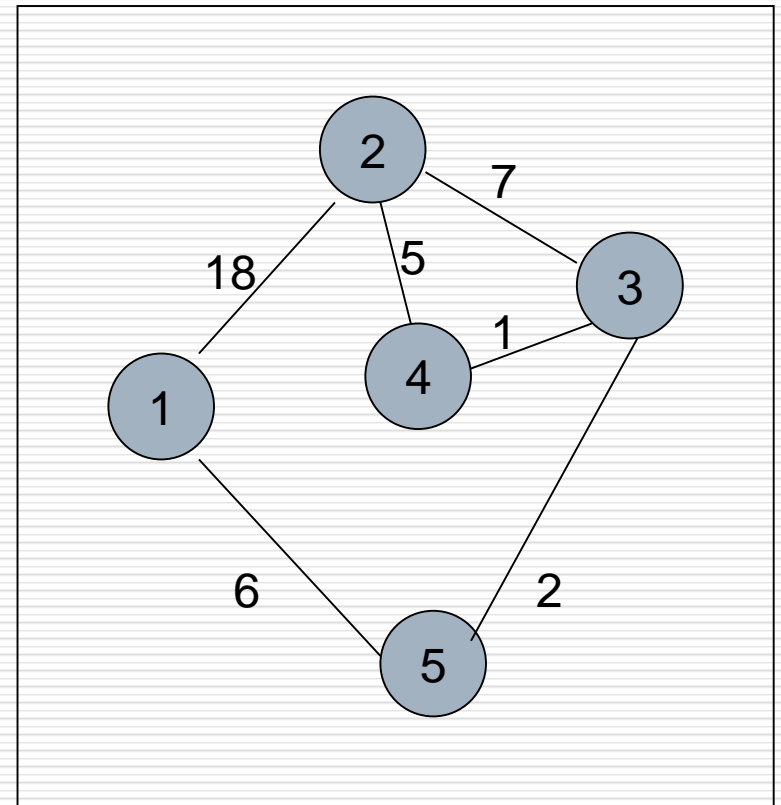
**2-3-5**

κόστος  $7+2=9$

**2-4-3-5**

κόστος  $5+1+2=8$

---



# Άσκηση

---

- Ο ΟΤΕ σχεδιάζει να καλύψει με τηλεφωνικές γραμμές μια περιοχή X από τον κεντρικό σταθμό του K, κάνοντας χρήση όλων των ενδιάμεσων υποσταθμών A, B, Γ,...Z.
- Ζητείται να βρεθεί η διαδρομή με το μικρότερο μήκος καλωδίων (οι τιμές των ακμών αναπαριστούν αποστάσεις)

