

Τα προβλήματα μεταφοράς - εκχώρησης

- Το πρόβλημα μεταφοράς
- Το πρόβλημα της εκχώρησης
- Ασκήσεις

Το πρόβλημα μεταφοράς

- Αφορά την εύρεση βέλτιστου σχεδίου μεταφοράς (optimal transportation plan) από **πηγές** σε **προορισμούς**
 - Η κάθε πηγή παρέχει αγαθά και έχει συγκεκριμένη δυναμικότητα (προσφορά). Ο κάθε προορισμός μπορεί να απορροφήσει συγκεκριμένη ποσότητα αγαθών (ζήτηση)
 - Πηγή → Αγαθά : Εργοστάσιο → βιομηχανικά προϊόντα, εκδοτική μονάδα → εφημερίδες, περιοδικά, ορυχείο → μεταλλεύματα
-

Το πρόβλημα μεταφοράς

□ Διατύπωση

Δίνονται :

- πίνακας κόστους (χρήμα, χρόνος) μεταφοράς από διαφορετικές πηγές σε διαφορετικούς προορισμούς
- Συνολική προσφορά – δυναμικότητα
- Συνολική ζήτηση

Ζητείται : το βέλτιστο σχέδιο μεταφοράς (optimal transportation plan)

- Βέλτιστο : χρόνος, απόσταση → ελαχιστοποίηση, κέρδος → μεγιστοποίηση
 - Σχέδιο μεταφοράς : αριθμός κιβωτίων ανα προορισμό,
-

Παράδειγμα

Μια εταιρεία διαθέτει 3 εργοστάσια και διανέμει προϊόντα συσκευασμένα σε κιβώτια σε 4 πόλεις με δικά της οχήματα. Το κόστος ανα κιβώτιο διαφέρει ανάλογα με την απόσταση, το χρόνο κλπ. Το κάθε εργοστάσιο μπορεί να αποστέλλει συγκεκριμένη ποσότητα κάθε εβδομάδα (προσφορά) και η κάθε πόλη μπορεί να απορροφά συγκεκριμένο αριθμό κιβωτίων (ζήτηση).

Ζητείται να προσδιοριστεί ο αριθμός κιβωτίων που πρέπει να αποστέλλει το εργοστάσιο i στη πόλη j ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος

Προς	Πόλη 1	Πόλη 2	Πόλη 3	Πόλη 4	Προσφορά
Απο					
Εργοστάσιο 1	8	10	7	9	250
Εργοστάσιο 2	9	11	9	7	400
Εργοστάσιο 3	7	5	4	6	350
Ζήτηση	350	150	300	200	1000

Η γενική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς

x_{ij} Ο αριθμός των μονάδων μεταφοράς από την πηγή i στον προορισμό j

c_{ij} το κόστος μεταφοράς από την πηγή i στον προορισμό j

d_j Η συνολική ζήτηση του προορισμού j

s_i Η συνολική προσφορά της πηγής i

$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, j = 1, 2, \dots, n$ Ένας περιορισμός για κάθε μια προσφορά

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, j = 1, 2, \dots, n$ Ένας περιορισμός για κάθε μια ζήτηση

$x_{ij} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$

Η μέθοδος μεταφοράς

- Τα προβλήματα μεταφοράς έχουν μεγάλο αριθμό μεταβλητών και περιορισμών → μη αποτελεσματική επίλυση από τη Simplex
 - Μη αποτελεσματική = μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος, περισσότερος χώρος αποθήκευσης ενδιάμεσων αποτελεσμάτων, ανάγκη για παραγωγή ακέραιων λύσεων
 - Η μέθοδος μεταφοράς έχει αναπτυχθεί αποκλειστικά για προβλήματα του είδους αυτού και υπερτερεί σημαντικά της Simplex
 - Προβλέπει επαναληπτική διαδικασία που ξεκινά από μια αρχική βασική εφικτή λύση, βρίσκει καλύτερες λύσεις έως ότου βρει την άριστη
 - Παραλλαγές : μέθοδος βορειοδυτικής γωνίας, μέθοδος Vogel
-

Παράδειγμα

X_{ij} : ο αριθμός των κιβωτίων που αποστέλλονται από το εργοστάσιο i στη πόλη j

Κόστος μεταφοράς : **MIN**

$$z = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 7x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 6x_{34}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 250$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 350$$

$$x_{11}, \dots, x_{34} \geq 0$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 350$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 150$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200$$

Ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς

- Όταν η συνολική προσφορά είναι ίση με τη συνολική ζήτηση, το πρόβλημα ονομάζεται *ισορροπημένο-balanced*

$$\sum_{j=1}^m d_j = \sum_{i=1}^n s_i$$

- Σε μη ισορροπημένα προβλήματα, προσθέτουμε έναν εικονικό προορισμό (dummy destination) προς το οποίο διοχετεύονται τα προϊόντα που πλεονάζουν.
 - Η ζήτηση του εικονικού προορισμού είναι ίση με τη πλεονάζουσα ποσότητα
 - Το κόστος προς τον εικονικό προορισμό είναι μηδέν ώστε να μην επηρεάζει τη ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους
-

Ειδικές περιπτώσεις

- Μεγιστοποίηση αντί ελαχιστοποίησης
π.χ. όταν το κόστος εκφράζει
κέρδος από τη διανομή των
προϊόντων
 - Εξαίρεση – αποκλεισμός κάποιων
διαδρομών μεταφοράς. Χειρισμός :
ορίζουμε πολύ μεγάλο κόστος
μεταφοράς π.χ. $M=10^6$
-

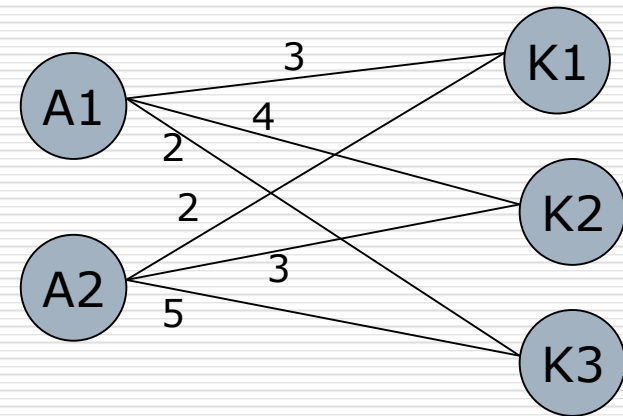
Άσκηση 1

Μια επιχείρηση διαθέτει δύο κεντρικές αποθήκες A1 και A2 και επιθυμεί να διανέμει τα προϊόντα που βρίσκονται σε αυτές σε τρία καταστήματα K1, K2, K3. Το κόστος μεταφοράς (έξοδα) ανα μονάδα προϊόντος φαίνεται στο γράφημα.

Η διαθέσιμη ποσότητα των αποθηκών είναι 100 και 150 μονάδες προϊόντων αντίστοιχα.

Τα καταστήματα πρέπει να έχουν ελάχιστο απόθεμα 80, 70 και 65 μονάδες προϊόντων αντίστοιχα.

Να προσδιοριστούν οι ποσότητες που πρέπει να μεταφέρονται ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος



Άσκηση 1 : Λύση

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$: οι ζητούμενες ποσότητες μεταφοράς

Κόστος μεταφοράς $\min 3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23}$

Περιορισμοί

Προσφορά : $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100, x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150$

Ζήτηση : $x_{11} + x_{21} \geq 80, x_{12} + x_{22} \geq 70, x_{13} + x_{23} \geq 65$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0, \text{ ακέραιοι}$

Άσκηση 2

Η επιχείρηση «Ελληνικά Ορυκτά» εκμεταλλεύεται τρία ορυχεία σε μια περιοχή της Ελλάδος. Στα τρία ορυχεία O1, O2, O3 πρέπει να εργάζονται συνολικά 500, 200 και 400 εργάτες αντιστοίχως (θέσεις εργασίας). Για το σκοπό αυτό προσλαμβάνεται προσωπικό από 4 κωμοπόλεις K1, K2, K3 και K4. Από την K1 έχουν προσληφθεί 250 άτομα, από την K2 300, από την K3 130 και από την K4 420 άτομα. Οι εργαζόμενοι μεταφέρονται καθημερινά στα ορυχεία με έξοδα της εταιρείας. Το ημερήσιο κόστος μεταφοράς είναι

Κωμόπολη	O1	O2	O3	Εργατικό Δυναμικό
K1	6	6	5	250
K2	2	8	7	300
K3	4	5	8	130
K4	3	7	2	420
Θέσεις Εργασίας	500	200	400	

Να προσδιοριστεί το άριστο σχέδιο μεταφοράς

Άσκηση 3

Ένα αρτοποιείο παράγει ένα είδος ψωμιού κατάλληλο για τροφοδοσία εστιατορίων, νοσοκομείων κλπ. Η παραγωγή γίνεται σε τρεις φούρνους Φ1, Φ2, Φ3 με ημερήσια παραγωγή 800 κιλά, 1500 κιλά και 2300 κιλά αντιστοίχως. Η παραγωγή διοχετεύεται σε τέσσερις μεγάλους πελάτες Π1,..Π4. Το κόστος των πρώτων υλών και της εργασίας είναι 6€ ανα 10 κιλά ψωμιού. Κάθε 10 κιλά ψωμιού επιβαρύνεται με άλλα λειτουργικά έξοδα κόστους αναλόγως του φούρνου Φ1, Φ2, Φ3 τα οποία είναι 2, 5 και 2,5€. Η μεταφορά γίνεται με ιδιόκτητα οχήματα με κόστος μεταφοράς ανα 10 κιλά ψωμιού ως εξής :

Φούρνος	Πελάτες			
	Π1	Π2	Π3	Π4
Φ1	10	10	15	10
Φ2	15	10	10	15
Φ3	5	5	5	10

Το αρτοποιείο πωλεί το προϊόν σε διαφορετική τιμή ανα κιλό σε κάθε πελάτη : στον Π1 2,4€, στον Π2 2,6€, στους Π3 και Π4 2,5€. Οι καθημερινές απαιτήσεις των πελατών είναι 500 κιλά για τον Π1, 700 κιλά για τον Π2, 1400 κιλά για τον Π3, 750 κιλά για τον Π4. Λόγω δυσκολιών στη διαδρομή ο φούρνος Φ2 δεν προμηθεύει τον πελάτη Π3.