ΕΚΠΑ, Τμήμα Χημείας

Μαθηματικά Ένα, Εξέταση 25 Σεπτέμβρη 2024.

<u>ΘΕΜΑΤΑ</u>

**1.** Δίνεται $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Εφαρμόστε δυο επαναλήψεις της μεθόδου Newton – Raphson για να προσεγγίσετε μια ρίζα της $f(x)$. Λάβετε $x_0 = 0.5$ και καταγράψτε <u>επακριβώς</u> (σε ανάγωγα κλάσματα) τα $x_1, x_2$.

**2.** Υπολογίστε το

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n.$$

**3.** Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^5 dx$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο <u>Simpson</u> με βήμα $h = \frac{1}{4}$. Εκφράστε το αποτέλεσμα σε ανάγωγο κλάσμα.

**4.** Βρείτε το ολικό ελάχιστο $(x_0, y_0)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 + y^4 - x + 3y + xy + 1.$$

**5.** Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\, dx$.

**6.** Να υπολογιστεί το μήκος $L$ της καμπύλης που δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2)^3}$, στο διάστημα [2,4].

**7.** Να υπολογιστεί ο όγκος $V$ του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 1/x$ στο διάστημα $[\pi, \infty)$ γύρω από τον άξονα των τετμημένων (κέρας Γαβριήλ).

**8.** Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 1$ σε σειρά Taylor στο $x = 2$.

**9.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της

$$f(x) = (x^3 + 3x - 2)/(2x^2 + 2x + 1).$$

**10.** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} f_1 = x_1 + 2kx_2 - \mu x_3, \\ f_2 = nx_1 + \mu x_2 - 2x_3, \\ f_3 = x_1 + nx_2 + 3kx_3. \end{cases}$$

Υπολογίστε τα $k, \mu, n$ έτσι ώστε να είναι συντηρητικό.

Γράψτε οκτώ από τα δέκα θέματα. Διάρκεια δύο ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

**1.** $f'(x) = 2x - 3, x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{{x_0}^2 - 3x_0 + 2}{2x_0 - 3} = \frac{1}{2} - \frac{-3}{8} = \frac{7}{8}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{{x_1}^2 - 3x_1 + 2}{2x_1 - 3} = \frac{7}{8} - \frac{-9}{80} = \frac{79}{80}$$

**2.** $d = -0.4, s = 1 + d + d^2 + d^3 + \cdots = 1 + d \cdot (1 + d + d^2 + \cdots) = 1 + ds$

Άρα $s - ds = 1, s \cdot (1 - d) = 1, s = \frac{1}{1-d}$ και $s = \frac{5}{7}$.

**3.** $\int_0^1 x^5 dx \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (0^5 + 4 \cdot 0.25^5 + 2 \cdot 0.5^5 + 4 \cdot 0.75^5 + \cdot 1^5) = \frac{43}{256}$

**4.** $\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta x} = 1 + 2x + y = 0, \frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta y} = 3 + x + 4y^3 = 0. (x_0, y_0) = (1, -1)$.

**5.** $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x \Big]_0^1$

$$= 0.25 \cdot (\ln 4 - \pi)$$

**6.** $f' = x\sqrt{x^2 - 2}, L = \int_2^4 \sqrt{1 + (f')^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + x^2(x^2 - 2)}\, dx$

$$= \int_2^4 \sqrt{(x^2 - 1)^2}\, dx = \int_2^4 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_2^4 = \frac{50}{3}.$$

**7.** $V = \int_\pi^\infty \pi \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_\pi^\infty \frac{\pi}{x^2} dx = \int_\pi^\infty d\left(-\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{\pi}{x}\right]_\pi^u = 1$.

**8.** $f'(x) = 5x^4, f''(x) = 20x^3, f'''(x) = 60x^2, f^{(iv)}(x) = 120x, f^{(v)}(x) = 120$

$$f(2) = 31,\ f'(2) = 80, \frac{1}{2} \cdot f''(2) = 80, \frac{1}{3!} \cdot f'''(2) = 40,$$

$$\frac{1}{4!} \cdot f^{(iv)}(2) = 10,\ \frac{1}{5!} \cdot f^{(v)}(2) = 1.$$

$f(x) = 31 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$.

**9.** $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}, \lim_{x \to \infty} f(x) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$. Άρα η ασύμπτωτη είναι η $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

**10.** $\mathrm{curl} f = \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right]^T = [2 + n, -1 - m, -2k + n]^T =$
$= [0 \quad 0 \quad 0]^T$. Άρα $n \to -2, m \to -1, k \to -1$.