ΕΝΟΤΗΤΑ 2 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ

Α. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Β. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Γ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Δ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Κινητό με σταθερή επιτάχυνση α
- Κινητό με μεταβλητή επιτάχυνση $\alpha(t) = -b\ \upsilon(t)$
- Ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητής
- Παραγοντική ολοκλήρωση

Έννοια ολοκληρώματος

Ενίοτε υπάρχει η ανάγκη επίλυσης προβλημάτων που απαιτούν πορεία αντίστροφη της παραγώγισης (**αντιπαραγώγιση**) :

- Σε μια χημική αντίδραση, ζητείται να βρεθεί η ποσότητα μιας ουσίας q(t), αν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής q΄(t).

- Κίνηση σε μια διάσταση: ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση θέσης **S(t)** του κινητού, αν είναι γνωστή η συνάρτηση της ταχύτητας **υ(t).** Ισχύει **υ(t) = S΄(t).**

- Κίνηση σε μια διάσταση: ζητείται να βρεθεί η ταχύτητα **υ(t)** του κινητού, αν είναι γνωστή η συνάρτηση της επιτάχυνσης **α(t).** Ισχύει **α(t) = υ΄(t).**

Κοινός τόπος: Δίδεται μια συνάρτηση f(x) και ζητείται μια F(x) ώστε ***F΄(x) = f(x)***

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Έννοια ολοκληρώματος

Ολοκλήρωση: Αποσκοπεί στην εύρεση της παράγουσας. Είναι διαδικασία αντίστροφη της παραγώγισης

$F(x) \longrightarrow f(x)$ ***Παραγώγιση***

$F(x) \longleftarrow f(x)$ ***Ολοκλήρωση***

Αν δοθεί μια εξίσωση της μορφής $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$*, ποιά είναι η* $F(x)$*;*

"Αν η f(x) είναι η παράγωγος της F(x) ως προς x, τότε η F(x) ισούται με το ***αόριστο ολοκλήρωμα*** *της f(x) ως προς x."*

Συμβολικά : *Αν* $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$*, η παράγωγος της f(x) είναι η* $F(x) = \int f(x)dx$

Τελεστής Παραγώγισης **Τελεστής Ολοκλήρωσης**

Ο τελεστής (διαδικασία) παραγώγισης $\frac{dG(x)}{dx}$ συμβολίζει την εύρεση της παραγώγου της G(x), ενώ ο τελεστής ολοκλήρωσης $\int G(x)dx$ συμβολίζει την εύρεση μιας άλλης συνάρτηση H(x) της οποίας παράγωγος είναι η G(x).

Α. Αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω συνάρτηση $f(x) = 4x^3$ με $x \in R$.

Η $F(x) = x^4$ είναι παράγουσα της $f(x)$ επειδή $\frac{dF(x)}{dx} = 4x^3$.

Όμως και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = x^4 + c = F(x) + c$ με $c \in R$ είναι παράγουσες της $f(x)$, επειδή $G'(x) = (x^4 + c)' = F'(x) = 4x^3 = f(x)$.

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν $F(x)$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι ομοίως παράγουσες της $f(x)$ στο Δ.

Κάθε άλλη παράγουσα της $f(x)$ διαφέρει με την $F(x)$ κατά μια σταθερά $c \in R$.

Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης *f* ορισμένης στο Δ:

Ονομάζεται το σύνολο των παραγουσών της f και συμβολίζεται ως εξής

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in R$$

Σταθερά Ολοκλήρωσης

Λύση απλών προβλημάτων ολοκλήρωσης

Ποιά η χρήση; Ολοκλήρωση απαιτείται στις παρακάτω απλές διαφορικές εξισώσεις όπου είναι γνωστή η παράγωγος μιας συνάρτησης y(x) και ζητείται να βρεθεί η y(x)

Ολοκληρωθείσα συνάρτηση

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + c\right) = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^n \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right) = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\ln x + c\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(-\cos x + c\right) = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin ax \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\cos ax + c\right) = \sin ax$$

Σε όλα τα παραδείγματα, c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Είναι πάντοτε καλή τακτική να ελέγχουμε ότι παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα επανακτούμε την ολοκληρωθείσα συνάρτηση.

Λύση απλών προβλημάτων ολοκλήρωσης

Ολοκλήρωση απαιτείται σε όλες τις παρακάτω απλές διαφορικές εξισώσεις όπου είναι γνωστή η παράγωγος μιας συνάρτησης y(x) και ζητείται να βρεθεί η y(x)

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos ax \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sin ax + c\right) = \cos ax$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int e^x \, dx = e^x + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}(e^x + c) = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax} + c\right) = e^{ax}$$

Σε όλα τα παραδείγματα, c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ο μετασχηματισμός της ολοκληρωτέας συνάρτησης, με διάφορους τρόπους, σε όρους οι οποίοι να μας είναι **αναγνωρίσιμοι** ως **παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων**.

Στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα

Έτσι είναι για τον υπολογισμών σύνθετων προβλημάτων είναι απαραίτητη η γνώση των παραγώγων τουλάχιστον των πιο κοινών συναρτήσεων.

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

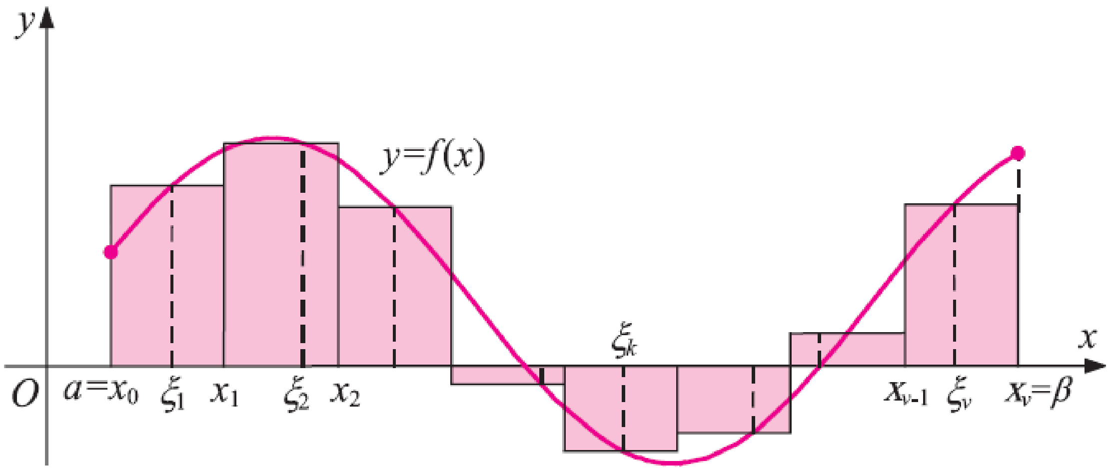
$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

Σε όλα τα παραδείγματα, c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Β. Ορισμένο ολοκλήρωμα: Γεωμετρική Ερμηνεία

Έστω συνάρτηση *y=f(x)* συνεχής στο διάστημα [α, β]. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu = \beta$ τεμαχίζουμε το [α, β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους Δx.



$$\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{\nu}$$

Αυθαίρετη επιλογή

$\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ με $\kappa \in \{1, 2, \dots, \nu\}$

Άθροισμα Riemann

$$S_\nu = f(\xi_1)\,\Delta x + f(\xi_2)\,\Delta x + \dots + f(\xi_\kappa)\,\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\,\Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,\Delta x$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}(S_\nu)$ [Δx → 0] υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο της επιλογής των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ. Ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης *f από το α στο β*, αντιπροσωπεύει άθροισμα και συμβολίζεται

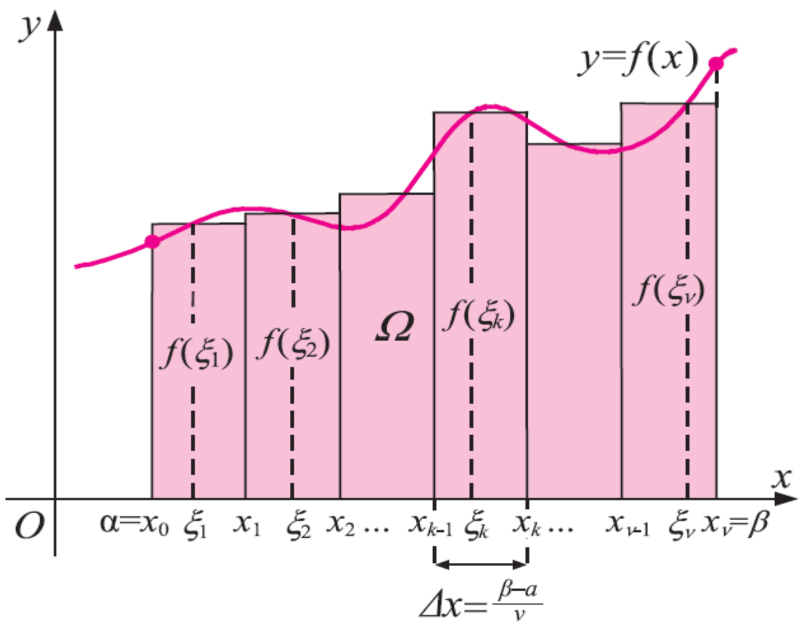
Όρια ολοκλήρωσης

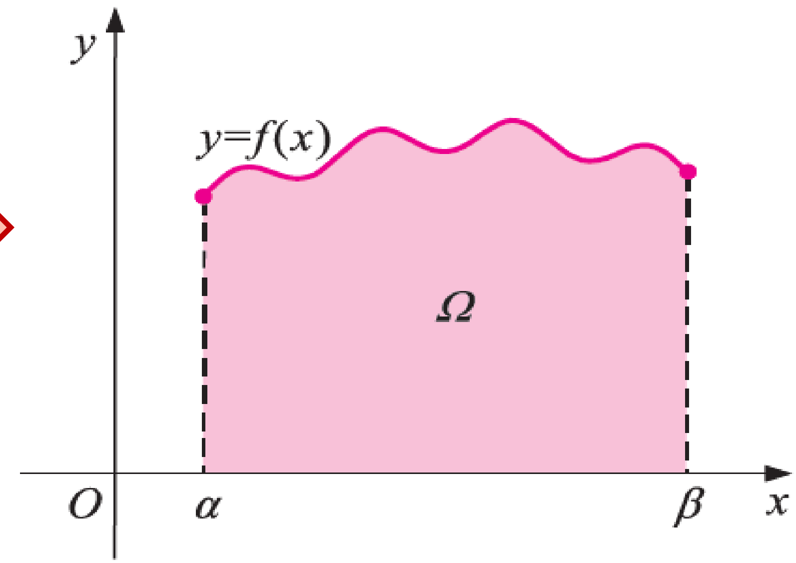
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,\Delta x\right)$$

Σύμβολο ολοκλήρωσης “**S**umma” (κατά Leibniz)

Β. Ορισμένο ολοκλήρωμα: Εμβαδόν

Αν f(x) ≥ 0 για κάθε τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν *Ε(Ω)* του χωρίου *Ω* που περικλείεται από την καμπύλη της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.





<u>**Σημείωση**</u> : Το **αόριστο ολοκλήρωμα** $I(x) = \int f(x)dx$ συμβολίζει ένα **σύνολο** παραγουσών συναρτήσεων της *f(x)*.

Αντίθετα οι εκφράσεις $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ απεικονίζουν *το ίδιο* **ορισμένο ολοκλήρωμα** το οποίο λαμβάνει **πραγματική τιμή**. Συμβολικά $I(\beta) - I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος

Ερώτηση: Υπάρχει ευκολότερος τρόπος υπολογισμού ενός ορισμένου ολοκληρώματος χωρίς να απαιτείται κάθε φορά υπολογισμός του ορίου του αθροίσματος Riemann;

Απάντηση: Ναι ο υπολογισμός διευκολύνεται με την εφαρμογή του **Θεμελιώδους Θεώρηματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού**.

Προυπόθεση : Η εφαρμογή του **ΘΘΟΛ** προυποθέτει να έχει εξασφαλιστεί η ύπαρξη παράγουσας της συνάρτησης η οποία βρίσκεται στο ολοκλήρωμα.

Η ύπαρξη της παράγουσας εξασφαλίζεται από το Θεώρημα:

Θεώρημα

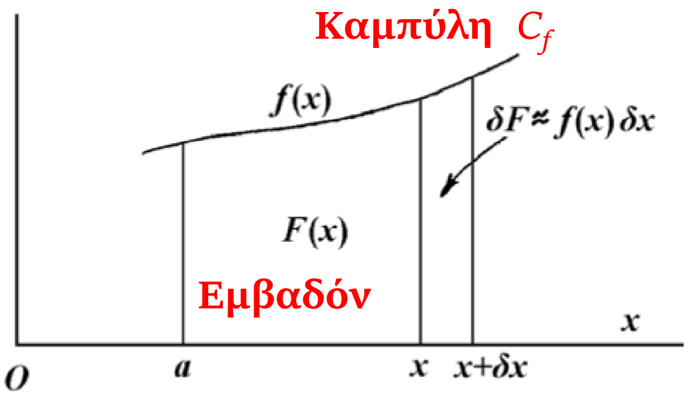
Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και α σημείο του Δ, τότε μια παράγουσα της f στο Δ έχει μορφή

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in \Delta$$

Ύπαρξη παράγουσας της f με μορφή $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Γεωμετρική απόδειξη θεωρήματος ύπαρξης παράγουσας συνάρτησης f

- Για *ευκολία και χωρίς βλάβη γενικότητας* θεωρούμε συνάρτηση *f(x)*, η οποία είναι συνεχής με *f(x)* ≥ 0 για κάθε *x* που θεωρούμε.
- Έστω *F(x)* που δίνει το εμβαδόν (όπως είδαμε το εμβαδό σχετίζεται με την έννοια του ορισμένου ολοκλ.) της επιφάνειας μεταξύ του άξονα των *x*, της καμπύλης C_f και των καθέτων ευθειών στα σημεία *α* και *x*.



Προσθέτουμε μικρό εμβαδόν για βήμα δx.

$$\delta F \approx f(x)\,\delta x \text{ ή } f(x) = \frac{\delta F}{\delta x}$$

$$\text{Για } \delta x \to 0 \implies f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

***Γεωμετρική απόδειξη**: Δηλαδή η αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f είναι η F(x) που δίνει το εμβαδόν από α έως x*

$$I(x) = \int f(x)dx$$

Αόριστο ολοκλήρωμα: σύνολο παραγουσών της f

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow F(x) = I(x) - c\,, \qquad c \in R$$

Η παράγουσα F(x) είναι μια από το σύνολο

Επειδή για *x=α* το *Εμβαδόν=ο*

$$F(a) = 0 \Leftrightarrow I(a) - c = 0 \Leftrightarrow c = I(a)$$

$$\boxed{F(x) = I(x) - I(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt}$$

Σχέση “γέφυρα” μεταξύ αορίστου και ορισμένου

Επομένως η παράγουσα της f(x) είναι **εξασφαλισμένη** και έχει την παραπάνω μορφή.

Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα [α, β]. Έστω G μια παράγουσα της f στο [α, β]. Ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) \equiv [G(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Απόδειξη

Πάντα υπάρχει μια παράγουσα της *f(x)* στο [α, β] με μορφή $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$

Διαφέρει κατά c

Αλλά και η $G(x) = F(\mathrm{x}) + \mathrm{c},\ \mathrm{c} \in R$ είναι επίσης παράγουσα της f.

Ισχύει $$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c \Leftrightarrow c = G(\alpha)$$

Θυμήσου το εμβαδόν στο x=α είναι μηδέν

και $$G(\beta) = F(\beta) + c = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + \mathrm{G}(\alpha)$$

Άρα $$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha)}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε παράγουσα της f(x)

Υπολογισμός ολοκληρώματος χωρίς επίκληση του ορισμού.

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Αν *f, f1* & *f2* συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] και c_1 & $c_2 \in R$. Ισχύουν

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\, c_1\, f_1(x) + c_2 f_2(x)\,)\,dx = c_1 \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx + c_2 \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx$$

Παράγουσα της f(x)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$$

Εξ' ορισμού η παράγωγος της παράγουσας της f(x) είναι η ίδια η f(x)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$$

Μέθοδοι επίλυσης : Παραγοντική ολοκλήρωση

Αν $f\,'$ & $g\,'$ συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]. Ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = [f(x)\,g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(x)}{dx}\,g(x)\,dx$$

Όπου $[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha)$

<u>Παράδειγμα</u>

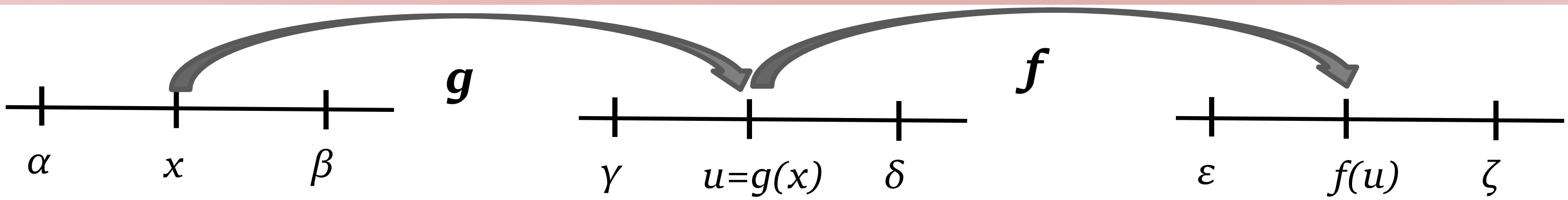
$$\int_{0}^{\pi/2} x(\eta\mu x)dx = \int_{0}^{\pi/2} x(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx = [x(-\sigma\upsilon\nu x)]_{0}^{\pi/2} - \int_{0}^{\pi/2} (x)'\,(-\sigma\upsilon\nu x)dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 0\right] - \int_{0}^{\pi/2} (-\sigma\upsilon\nu x)dx = \int_{0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} (\eta\mu x)'dx = 1$$

ΘΘΟΛ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(a) =$$

Μέθοδοι επίλυσης : Αλλαγή μεταβλητής



Αν f & g' συνεχείς συναρτήσεις, με $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ $\left(g'(x)=\frac{du}{dx}\right)$, $u_1=g(\alpha)$ & $u_2=g(\beta)$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du} \qquad \textbf{(1)}$$

Απόδειξη

Σύνολο παραγουσών της f που διαφέρουν κατα μια c

Έστω $F(u)$ το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(u)$. Οπότε

$$\frac{dF(u)}{du} \equiv \frac{dF}{dg} = f(u) \equiv f(g(x)) \qquad \textbf{(2)}$$

και επίσης

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \qquad \textbf{(3)}$$

Θεωρώντας τη νέα σύνθετη συνάρτηση $F(g(x))$ $\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(F(g(x))\right) = \frac{dF}{dg}\frac{dg(x)}{dx}$

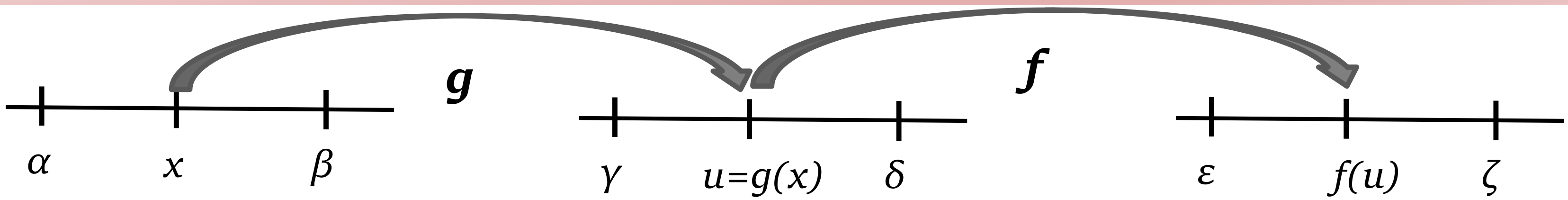
Δηλαδή στο διάστημα [α, β] η $F(g(x))$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $\frac{dF}{dg}\frac{dg(x)}{dx}$

Οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dF}{dg}\frac{dg(x)}{dx}dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \qquad \textbf{(4)}$$

Από (3), (4) και με τη βοήθεια της (2), λαμβάνουμε την (1).

Μέθοδοι επίλυσης : Αλλαγή μεταβλητής



Αν f & g' συνεχείς συναρτήσεις, με $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ $\left(g'(x)=\frac{du}{dx}\right)$, $u_1=g(\alpha)$ & $u_2=g(\beta)$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\,\frac{dg(x)}{dx}\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du} \qquad (1)$$

Παράδειγμα 1

$f(g(x)) = f(u) = u$

Συμβουλή: να γραφεί η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα με τη μορφή

$$f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}$$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\;dx = \int_1^e (\ln x)'\ln x\;dx = \int_1^e \ln x\;(\ln x)'\,dx$$

Νέα μεταβλητή!

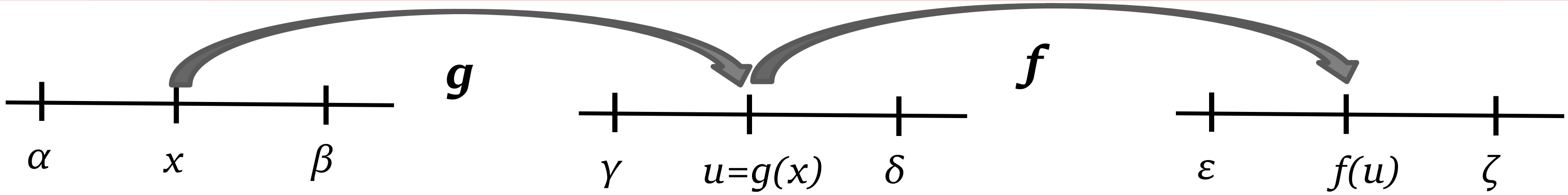
Νέα όρια!

$u = g(x) = \ln x$, ενώ $f(u) = u$. Ισχύει $du = (\ln x)'dx$. $u_1 = \ln 1 = 0$ και $u_2 = \ln e = 1$

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{du}{dx}$$

$$I = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Μέθοδοι επίλυσης : Αλλαγή μεταβλητής



Αν f & g' συνεχείς συναρτήσεις, με $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ $\left(g'(x)=\frac{du}{dx}\right)$, $u_1=g(\alpha)$ & $u_2=g(\beta)$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\,\frac{dg(x)}{dx}\,dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du} \qquad (1)$$

Παράδειγμα 2

$f(g(x)) = f(u) = u^2$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x)'(lnx)^2 dx = \int_1^e (lnx)^2 (\ln x)'\,dx$$

Νέα μεταβλητή!

Νέα όρια!

$u = g(x) = lnx$, ενώ $f(u) = u^2$. Ισχύει $du = (lnx)'dx$. $u_1 = ln1 = 0$ και $u_2 = lne = 1$

$$g'(x) = (lnx)' = \frac{du}{dx}$$

$$I = \int_0^1 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 1:</u> Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = x^3 + 1$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$$

Πράγματι η $F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = x^3 + 1 = f(x)$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dx \; = F(2) - F(-2) \equiv \; [F(x)]_{-2}^{2}$$

ΘΘΟΛ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dx \; = F(2) - F(-2) = \frac{1}{4}(2)^4 + 2 - \frac{1}{4}(-2)^4 + 2 = 4$$

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 2: **Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος**

$$I = \int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = x^3 + 1$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + \mathrm{c}, \qquad \mathrm{c} \in R$$

Πράγματι η $F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = x^3 + 1 = f(x)$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1) dx = F(2) - F(-2) \equiv [F(x)]_{-2}^{2}$$

ΘΘΟΛ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(a)$$

$$\int_{-2}^{2} (x^3 + 1) dx = F(2) - F(-2) = \frac{1}{4}(2)^4 + 2 + \mathrm{c} - \frac{1}{4}(-2)^4 + 2 - \mathrm{c} = 4$$

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 3: **Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος**

$$I = \int_0^1 x^5 dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = x^5$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

$$F(x) = \frac{1}{6}x^6$$

Πράγματι η $F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = x^5 = f(x)$

$$\int_0^1 x^5 dx = F(1) - F(0) \equiv [F(x)]_0^1$$

ΘΘΟΛ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

$$\int_0^1 x^5 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{6}(1)^6 - \frac{1}{6}(0)^6 = \frac{1}{6}$$

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 4: **Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = \cos(2x)$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Πράγματι η $F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = \cos(2x) = f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \equiv [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ΘΘΟΛ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\sin(\pi) - \frac{1}{2}\sin(0) = 0$$

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 5: **Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος**

$$I = \int_0^1 (x + e^x)dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = x + e^x$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + e^x$$

Πράγματι η $F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} = x + e^x = f(x)$

ΘΘΟΛ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

$$\int_0^1 (x + e^x)dx = F(1) - F(0) \equiv [F(x)]_0^1$$

$$\int_0^1 (x + e^x)dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{2} + e$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 6:</u> Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^1 x e^x \, dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = xe^x$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

Δεν είναι άμεσα εμφανές. Επίκληση κάποιας στρατηγικής αναδιάταξης.

$$\int_\alpha^\beta f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx \;=\; [f(x)\, g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{df(x)}{dx}\, g(x)\, dx$$

Στρατηγική παραγοντικής ολοκλήρωσης

$$I = \int_0^1 x e^x \, dx \;=\; \int_0^1 x \frac{d(e^x)}{dx} \, dx$$

Εδώ $f(x) = x, \; g(x) = e^x$

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (e - 0) - (e - 1) = 1$$

ΘΘΟΛ

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

Γ. Εφαρμογές

Αν $f\,'$ & $g\,'$ συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]. Ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx \;=\; [f(x)\,g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta}\frac{df(x)}{dx}\,g(x)\,dx$$

<u>Εφαρμογή 7:</u> Παραγοντική ολοκλήρωση

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} xe^{x}\,dx \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{d(e^{x})}{dx}\,dx$$

Εδώ $f(x) = x,\; g(x) = e^{x}$

$$I = [xe^{x}]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{x}dx = \left(\beta e^{\beta} - \alpha e^{\alpha}\right) - \left(e^{\beta} - e^{\alpha}\right) = e^{\beta}(\beta - 1) - e^{\alpha}(\alpha - 1)$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 8:</u> Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x\cos(x^2+1)dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = x\cos(x^2+1)$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

Δεν είναι άμεσα εμφανές. Η αναγνώριση σύνθετης συνάρτησης παρακινεί στην αλλαγή μεταβλητής.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$$

Στρατηγική με αλλαγή μεταβλητής

$u = g(x) = x^2 + 1$

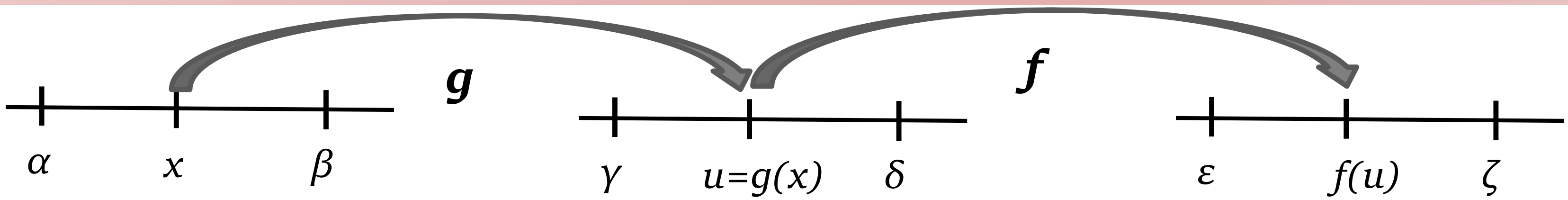
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x\,cos(x^2+1)dx = \int_{\alpha}^{\beta} cos(x^2+1)\frac{1}{2}\,(x^2+1)'dx$$

ΘΘΟΛ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(a)$$

$$I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \frac{1}{2}\cos u\,du = \frac{1}{2}\int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} \cos u\,du = \frac{1}{2}\left[\,\sin(\beta^2+1) - \sin(\alpha^2+1)\right]$$

Μέθοδοι επίλυσης : Αλλαγή μεταβλητής



Αν f & g' συνεχείς συναρτήσεις, με $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ $\left(g'(x)=\frac{du}{dx}\right)$, $u_1=g(\alpha)$ & $u_2=g(\beta)$

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du}$$

Εφαρμογή 8: **Ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητής**

$$f(g(x)) = f(u) = \frac{1}{2}\cos u$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x\cos(x^2+1)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \cos(x^2+1)\frac{1}{2}\,(x^2+1)'dx$$

$$\boxed{g'(x) = (x^2+1)' = \frac{du}{dx}}$$

Νέα μεταβλητή!

$u \equiv g(x) = x^2+1$, ενώ $f(u) = \frac{1}{2}\cos u.$

Ισχύει $du = (x^2+1)'\,dx$

Νέα όρια!

$u_1 \equiv g(\alpha) = \alpha^2+1,$
$u_2 \equiv g(\beta) = \beta^2+1$

$$I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \frac{1}{2}\cos u\,du = \frac{1}{2}\int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} \cos u\,du = \frac{1}{2}\left[\sin(\beta^2+1) - \sin(\alpha^2+1)\right]$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 8:</u> Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x\cos(x^2+1)dx$$

$f(x) = x\cos(x^2+1)$ Η αναγνώριση σύνθετης συνάρτησης παρακινεί στην αλλαγή μεταβλητής.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$$

Στρατηγική με αλλαγή μεταβλητής

$$u = g(x) \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} = g'(x) \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow \quad du = g'(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$$

Προσοχή: Αλλαγή και στα όρια του ολοκληρώματος

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} x\,cos(x^2+1)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \frac{1}{2}\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} \cos u\,du = \frac{1}{2}\,[\,\sin(\beta^2+1) - \sin(\alpha^2+1)]$$

$$u = g(x) = x^2+1 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 9:</u> Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_0^1 5x\, e^{2x^2+5} dx$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

Δεν είναι άμεσα εμφανές. Η αναγνώριση σύνθετης συνάρτησης παρακινεί στην αλλαγή μεταβλητής.

Στρατηγική με αλλαγή μεταβλητής

$$u = g(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = 4x \Rightarrow du = 4x\, dx \;\Rightarrow dx = \frac{1}{4x} du$$

$$u = g(x) = 2x^2 + 5$$ *Νέα μεταβλητή!*

$$u_1 = g(0) = 5,$$
$$u_2 = g(1) = 7$$
Νέα όρια!

$$I = \int_5^7 \frac{5}{4} e^u du = \frac{5}{4}\int_5^7 e^u du = \frac{5}{4}(e^7 - e^5)$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 10:</u> Βρείτε την τιμή του παρακάτω ορισμένου ολοκληρώματος

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x}\, dx$$

Ποιά είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνεται (ολοκληρωθείσα συνάρτηση);

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x}$$

Βρείτε μια **αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα συνάρτηση** ή **αντιπαράγουσα** της *f(x)*

Δεν είναι άμεσα εμφανές. Απαιτείται κάποια επεξεργασία.

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x - 1}{x}\, dx = \int_1^2 x\, dx + 3\int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 3[x]_1^2 - [\ln x]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} + 3 - \ln 2$$

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 11: Υπολογίστε την ταχύτητα και θέση για κίνηση με **σταθερή επιτάχυνση α**.

Λύση 1: Ολοκλήρωση με χρήση ορισμένου ολοκληρώματος

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt} = a \Rightarrow \int_{t_o}^{t} \frac{d\upsilon(t')}{dt'}\, dt' = \int_{t_o}^{t} \alpha dt'$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) - \upsilon(t_o) = \alpha\,(t - t_o) \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon(t_o) + \alpha\,(t - t_o)$$

$$\int_{t_o}^{t} \frac{dx(t')}{dt'}\, dt' = \int_{t_o}^{t} \upsilon(t_o) dt' + \alpha \int_{t_o}^{t} (t' - t_o) dt'$$

$$\Rightarrow x(t) - x(t_o) = \upsilon(t_o)\,(t - t_o) + \frac{\alpha}{2}(t^2 - t_o^2) - a t_o (t - t_o)$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_o) + \upsilon(t_o)\,(t - t_o) + \frac{\alpha}{2}(t - t_o)^2$$

Επομένως για τον προσδιορισμό της θέσης και ταχύτητας του κινητού απαιτείται η γνώση της θέσης του $x(t_o)$ και της ταχύτητάς του $\upsilon(t_o)$ σε κάποια χρονική στιγμή $t=t_o$.

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 12: Υπολογίστε την ταχύτητα και θέση για κίνηση με **σταθερή επιτάχυνση α**.

Λύση 2: Ολοκλήρωση με χρήση αορίστου ολοκληρώματος

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt} = a \;\Rightarrow \int \frac{d\upsilon(t)}{dt}dt = \int \alpha\, dt \Rightarrow \upsilon(t) = at + c_1$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = at + c_1 \Rightarrow \int \frac{dx(t)}{dt}dt = \int (at + c_1)dt \Rightarrow x(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + c_1 t + c_2$$

Αλλά και πάλι για τον προσδιορισμό της θέσης και ταχύτητας του κινητού απαιτείται η γνώση των σταθερών c_1 και c_2. Αυτό γίνεται και πάλι αν υπάρχει γνώση της θέσης του $x(t_o)$ και της ταχύτητάς του $\upsilon(t_o)$ σε κάποια χρονική στιγμή $t=t_o$.

$$t=t_o:\;\; \upsilon(t_o) = \alpha t_o + c_1 \;\Rightarrow c_1 = \upsilon(t_o) - \alpha t_o$$

$$t=t_o:\;\; x(t_o) = \frac{\alpha}{2}t_o^2 + c_1 t_o + c_2 = \frac{\alpha}{2}t_o^2 + (\upsilon(t_o) - \alpha t_o)t_o + c_2$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = x(t_o) - \frac{\alpha}{2}t_o^2 - (\upsilon(t_o) - \alpha t_o)t_o = x(t_o) + \frac{\alpha}{2}t_o^2 - \upsilon(t_o)t_o$$

$$\upsilon(t) = \upsilon(t_o) + \alpha\,(t - t_o)$$

$$x(t) = x(t_o) + \upsilon(t_o)\,(t - t_o) + \frac{\alpha}{2}(t - t_o)^2$$

Γ. Εφαρμογές

<u>Εφαρμογή 13:</u> Κίνηση με μεταβλητή επιτάχυνση $\boldsymbol{a(t) = -b\,v(t)},\ \ \boldsymbol{b > 0}$.

$$\frac{dv(t)}{dt} = -bv \Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -b \Rightarrow \int_{t_o}^{t} \underbrace{\frac{1}{v(t')}\frac{dv(t')}{dt'}}_{\frac{d}{dt'}\ln v(t')} dt' = -\int_{t_o}^{t} b\, dt'$$

$$\Rightarrow \ln v(t) - \ln v(t_o) = -b\,(t - t_o) \Rightarrow \ln\frac{v(t)}{v(t_o)} = \ln e^{-b(t-t_o)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v(t) = v(t_o)e^{-b(t-t_o)}}$$

$$\int_{t_o}^{t} \frac{dx(t')}{dt'}\, dt' = v(t_o)\int_{t_o}^{t} e^{-b(t'-t_o)}\, dt' \Rightarrow x(t) - x(to) = -\frac{v(t_o)}{b}[\, e^{-b(t-t_o)} - 1\,]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x(t) = x(t_o) + \frac{v(t_o)}{b}[1 - e^{-b(t-t_o)}]}$$

$v(t)$: για $t \to \infty$ τότε $v \to 0$

$x(t)$: για $t \to \infty$ τότε $x \to x(t_o) + \frac{v(t_o)}{b}$

Παραδείγματα

<u>Εφαρμογή 14:</u> Βρείτε τις μερικές παραγώγους 1ου και 2ου βαθμού της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = 2x^3 + xyz + sin(2y+1) + ln(3z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + yz = g(x,y,z), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2\cos(2y+1) = h(x,y,z), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + \frac{1}{z} = p(x,y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x} = 12x \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial y} = z} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial z} = y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial x} = z} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} = -4\sin(2y+1) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial z} = x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{-1}{z^2}$$

Παραδείγματα

<u>Εφαρμογή 14:</u> Βρείτε τις μερικές παραγώγους 1ου και 2ου βαθμού της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = 2x^3 + xyz + sin(2y+1) + ln(3z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + yz = g(x,y,z), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2\cos(2y+1) = h(x,y,z), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + \frac{1}{z} = p(x,y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x} = 12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial y} = z \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial z} = y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} = -4\sin(2y+1) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial z} = x$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} = y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{-1}{z^2}$$

Παραδείγματα

<u>Εφαρμογή 14:</u> Βρείτε τις μερικές παραγώγους 1ου και 2ου βαθμού της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = 2x^3 + xyz + sin(2y+1) + ln(3z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + yz = g(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2\cos(2y+1) = h(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + \frac{1}{z} = p(x,y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x} = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial y} = z \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial z} = y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial x} = z \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} = -4\sin(2y+1) \quad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial z} = x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} = y \quad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} = x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{-1}{z^2}$$

Γ. Εφαρμογές

Εφαρμογή 15: Υπολογίστε το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \int_0^2 xy^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xy^2\, dx \right) dy$$

Από τη φύση του προβλήματος είναι γνωστό ποιά είναι τα όρια της κάθε μεταβλητής

$$I_1 = \int_0^2 xy^2\, dx = y^2 \int_0^2 x\, dx = y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2y^2$$

Όπως και στην περίπτωση της μερικής παραγώγισης “ως προς x” όλες οι άλλες μεταβλητές αντιμετωπίζονται ως σταθερές.

$$I = \int_0^1 2y^2\ dy = 2\int_0^1 y^2\ dy = 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

Προχωρούμε στην ολοκλήρωση αφού έχει μείνει μόνο μια μεταβλητή.

$$I = 2\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}$$

Παραδείγματα

<u>Εφαρμογή 16:</u> Βρείτε τη μάζα λεπτής ράβδου μήκους L. Η *γραμμική πυκνότητα* της δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\boldsymbol{\rho(x) = \rho_0(1 + \frac{x}{L})}$$

Γραμμική πυκνότητα μάζας (*Μάζα/Μήκος*).

$\boldsymbol{\Delta x}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.

$\boldsymbol{\Delta m = \rho(x)\ \Delta x}$

$\boldsymbol{\rho(x)}$: Μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής μήκους L.

Εάν $\Delta x \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(x)\ dx}$.

<u>Ολική Μάζα ράβδου</u>

$$M = \int_{\rho\alpha\beta\delta o\varsigma} dm = \int_0^L \rho(x)dx = \int_0^L \rho_0(1 + \frac{x}{L})dx = \int_0^L \rho_0 dx + \int_0^L \rho_0\,\frac{x}{L}dx =$$

$$= \rho_0[x]_0^L + \frac{\rho_0}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \rho_0 L + \frac{\rho_0}{2L}L^2 = \frac{3}{2}\rho_0 L$$