# ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ & ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

**Ευάγγελος Τυρλής**

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έννοια και ορισμός παραγώγου:

- Γεωμετρική προσέγγιση
- Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης
- Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης σε περιοχή σημείου

## Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Μερική παράγωγος
- Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων
- Βαθμίδα συνάρτησης

## Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

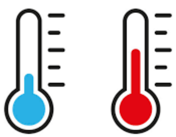
# *Εισαγωγή στα διανύσματα*

# ΒΑΘΜΩΤΑ & ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

## ΒΑΘΜΩΤΟ

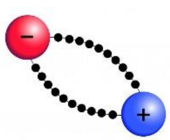
**Φυσική ποσότητα** η οποία περιγράφεται πλήρως από έναν **αριθμό (**ο οποίος αντιστοιχεί στο μέγεθος) και μια **μονάδα μέτρησης**

**Χρόνος** *15 sec*

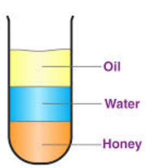


**Θερμοκρασία** $20^{o}\ C$


**Μάζα** *70 kgr*



**Ηλ. φορτίο** *5 mCoulomb*

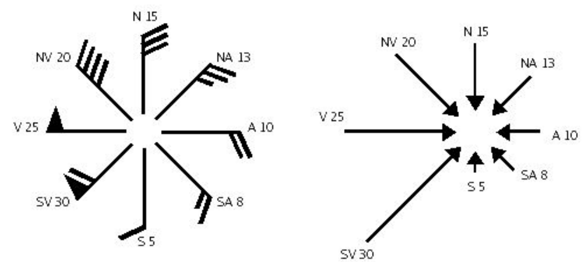



**Πυκνότητα** $1\ \dfrac{kgr}{m^3}$

## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ

**Φυσική ποσότητα** η οποία περιγράφεται όχι μόνον από έναν **αριθμό** και **μονάδα μέτρησης** αλλά απαιτεί να οριστεί και μια κατεύθυνση.

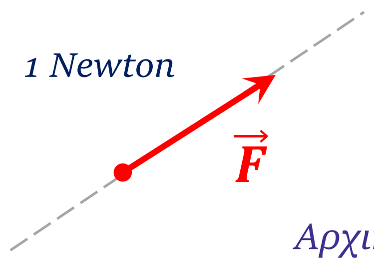
**Ταχύτητα ανέμου** *Βόρειος* *5 m/sec*




**Δύναμη**

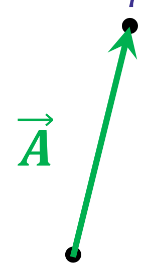
*Φορά + διεύθυνση = Κατεύθυνση*

*1 Newton*




**Μετατόπιση**

*Τελική θέση:* $P_2$




*Παριστάνουμε τη μετατόπιση υλικού σημείου με διάνυσμα.*

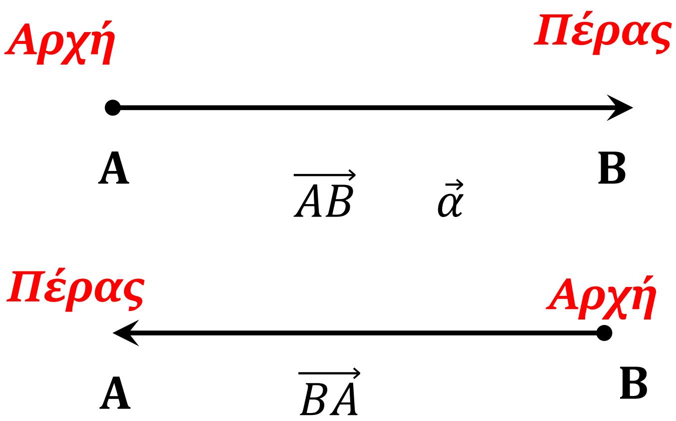
*Αρχική θέση:* $P_1$

*1 km*

Δηλαδή η φυσική ποσότητα που έχει **μέτρο** (αριθμός που περιγράφει πόσο μεγάλη είναι η φυσική ποσότητα) και **κατεύθυνση** στο χώρο.

# ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

“**Διάνυσμα** είναι η **μαθηματική εικόνα** ή **μαθηματική παράσταση** ενός διανυσματικού μεγέθους ”

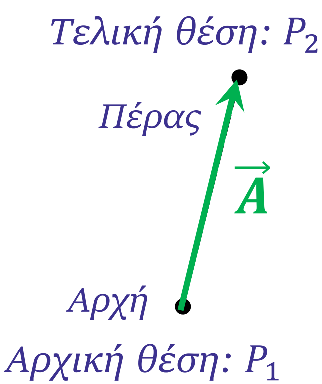



*Δύο σημεία Α & Β όπου το ένα χαρακτηρίζεται ως **αρχή** (Α) και το άλλο ως **πέρας** (Β), μαζί με το τμήμα που ορίζουν αυτά τα σημεία αποτελεί μια καλή **απεικόνιση** ενός διανυσματικού μεγέθους.*

“ Ονομάζουμε διάνυσμα ένα ευθύγραμμο τμήμα, με ορισμένα άκρα, μαζί με μια φορά πάνω σε αυτό το τμήμα ”

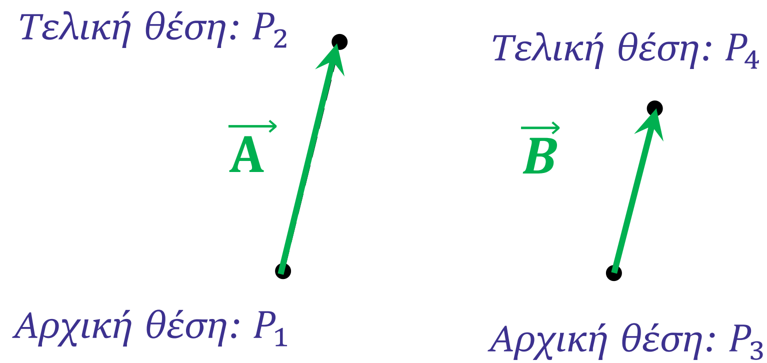
# ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της **μετατόπισης** για να κατανοήσουμε τις βασικές **ιδιότητες των διανυσμάτων**.




*Το μέτρο διανύσματος είναι μια βαθμωτή ποσότητα (πάντα θετική). Περιγράφει την ένταση/ισχύ του διαν. μεγέθους (άνεμος, δύναμη, μετατόπιση).*

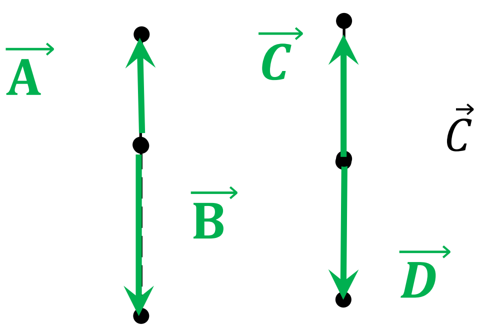
$$A = |\vec{A}|$$



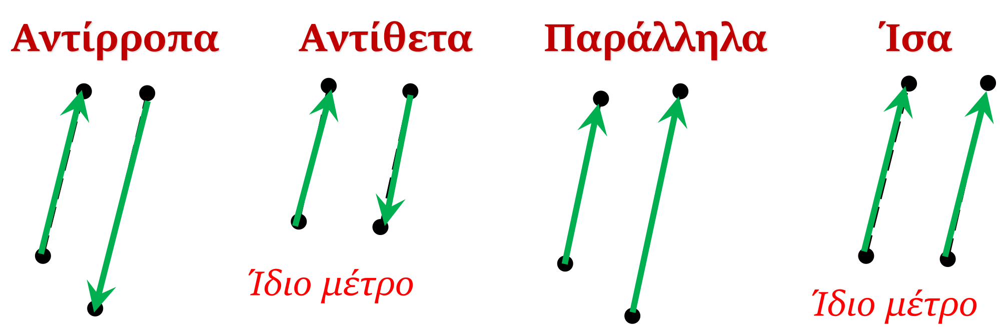

Αν δυο διανύσματα έχουν την **ίδια διεύθυνση** (*ακόμα και αν έχουν διαφορετικό μέτρο*) τότε είναι **παράλληλα.**

Αν δυο διανύσματα (*όπου και να βρίσκονται στο χώρο*) έχουν την **ίδια κατεύθυνση** και **ίδιο μέτρο** τότε είναι **ίσα.**

*Βόρειος vs Νότιος άνεμος*




$$\vec{C} = -\vec{D}$$



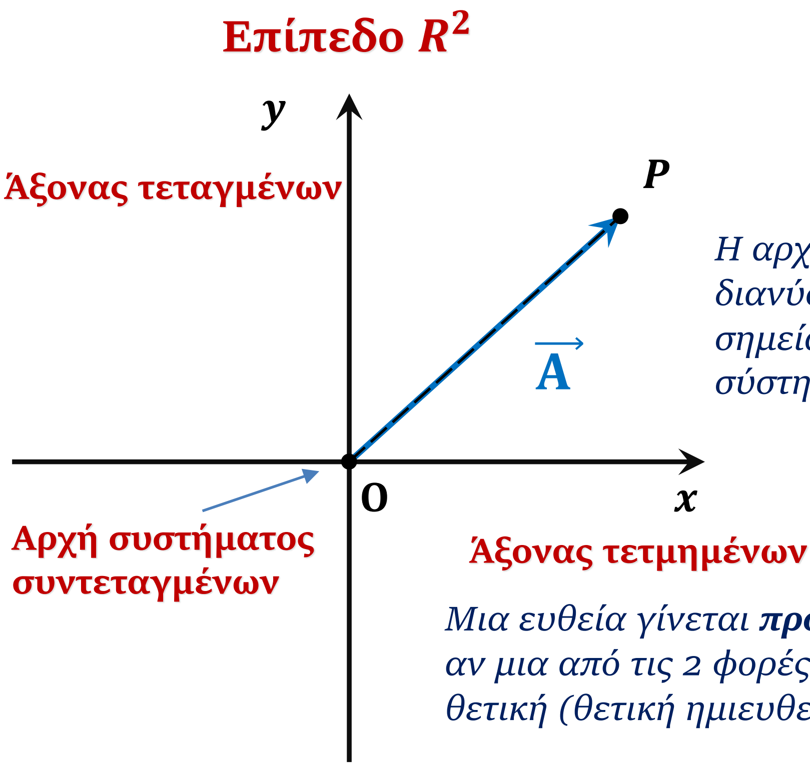

Αν δυο διανύσματα έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** τότε είναι **αντίρροπα.**

Αν επιπλέον έχουν και το **ίδιο μέτρο** τότε λέγονται **αντίθετα.**

Ισχύει για διανύσματα που βρίσκονται οπουδήποτε στο χώρο

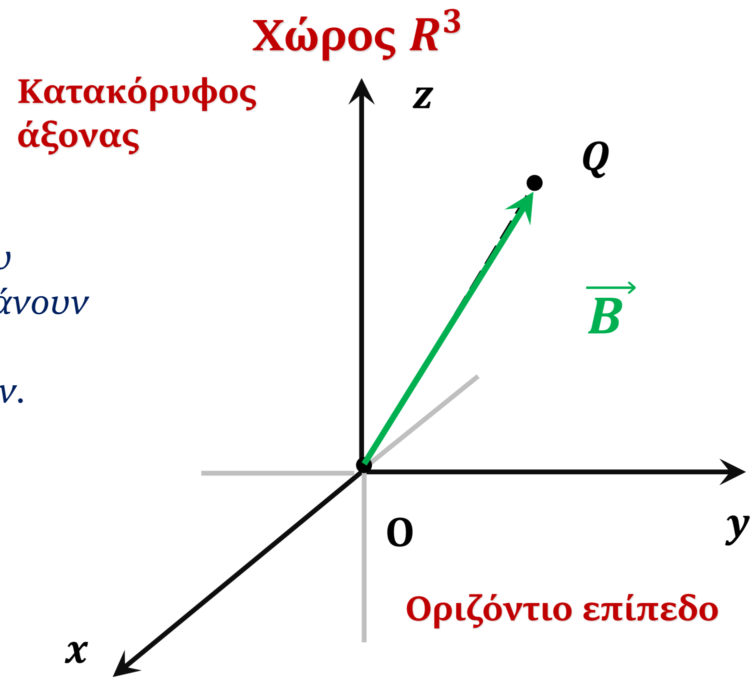
# ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα διάνυσμα στο επίπεδο (2D) ή στο χώρο (3D) ορίζεται όταν οριστούν τα σημεία της αρχής και πέρατος. Ο ορισμός απαιτεί τη χρήση **καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων**.




*Η αρχή και το πέρας του διανύσματος καταλαμβάνουν σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.*

*Μια ευθεία γίνεται **προσανατολισμένη** αν μια από τις 2 φορές χαρακτηριστεί θετική (θετική ημιευθεία).*



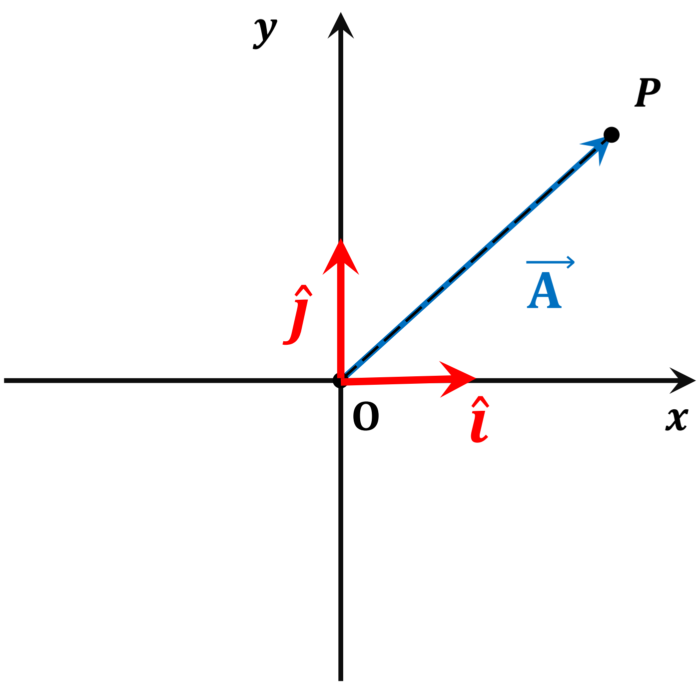

Το σύστημα συντεταγμένων του Καρτέσιου *στο επίπεδο* ορίζεται με τη βοήθεια *δύο προσανολισμένων ευθειών* οι οποίες *τέμνονται κάθετα* στο σημείο Ο.

Το σύστημα συντεταγμένων του Καρτέσιου *στον τρισδιάστατο χώρο* ορίζεται με τη βοήθεια *τριών προσανολισμένων ευθειών* οι οποίες *τέμνονται κάθετα* στο σημείο Ο. Εκτός από τους *οριζόντιους άξονες* x & y ορίζεται και τρίτος άξονας z, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν οι x & y.

# ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

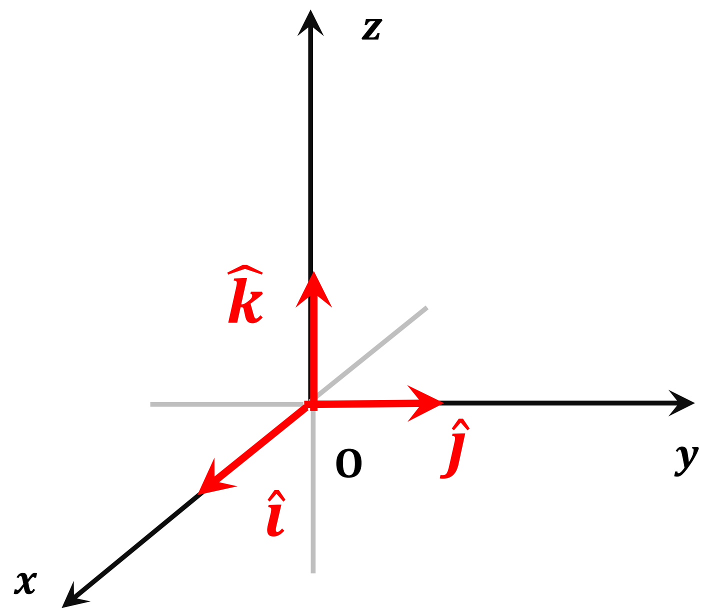
Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζονται **μοναδιαία διανύσματα** τα οποία έχουν **μέτρο ίση με την μονάδα**. Μοναδική τους χρήση είναι να **δείχνουν προς τη θετική κατεύθυνση των προσανατολισμένων αξόνων**.

**Επίπεδο $R^2$**




$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = 1$$

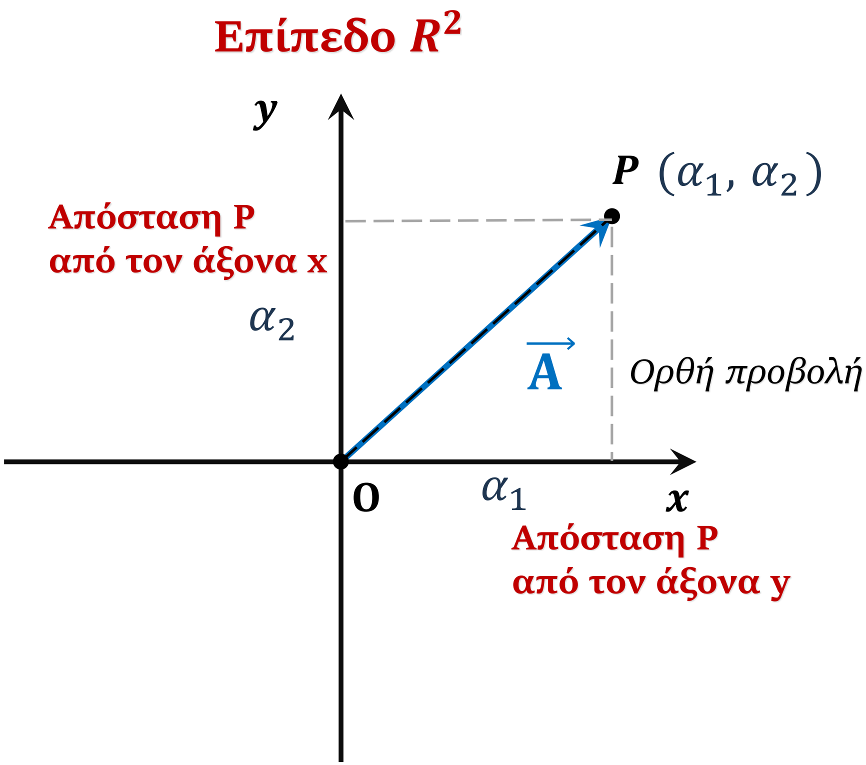
**Χώρος $R^3$**

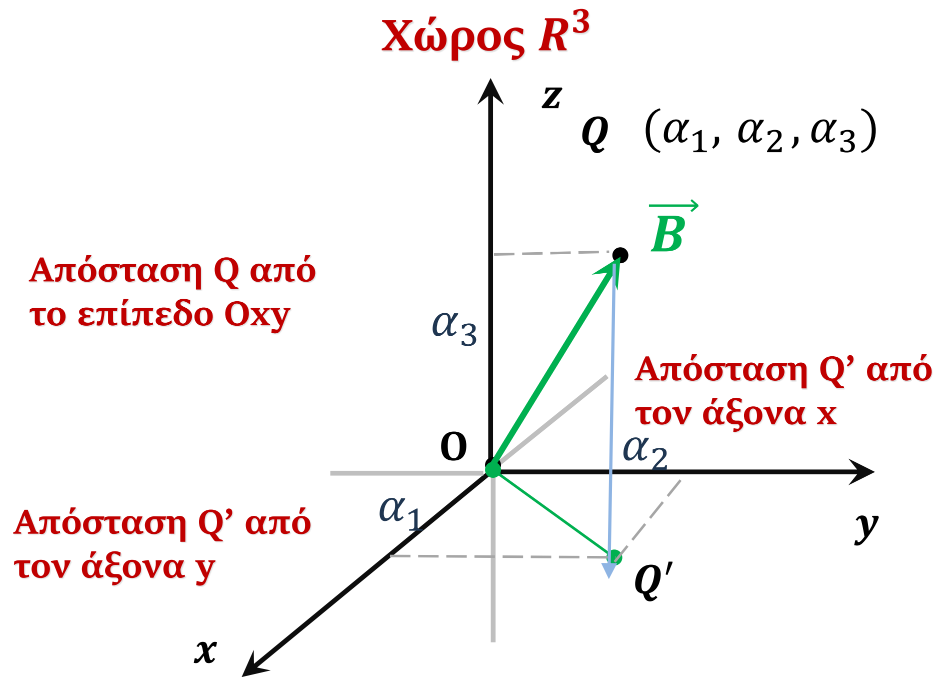



$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

# ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η **αρχή** και **πέρας** ενός διανύσματος προσδιορίζονται σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων 2D ή 3D, με τη βοήθεια ενός ζεύγους ή τριάδας αριθμών, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **συντεταγμένες αρχής** και **πέρατος** του **διανύσματος**.




**Τετμημένη $\alpha_1$** : Απόσταση από άξονα y

**Τεταγμένη $\alpha_2$** : Απόσταση από άξονα x

Από το σημείο Q βρίσκουμε την *προβολή* του στο επίπεδο *Oxy*, φέρνοντας παράλληλη στον άξονα *Oz*, η οποία τέμνει κάθετα το επίπεδο.

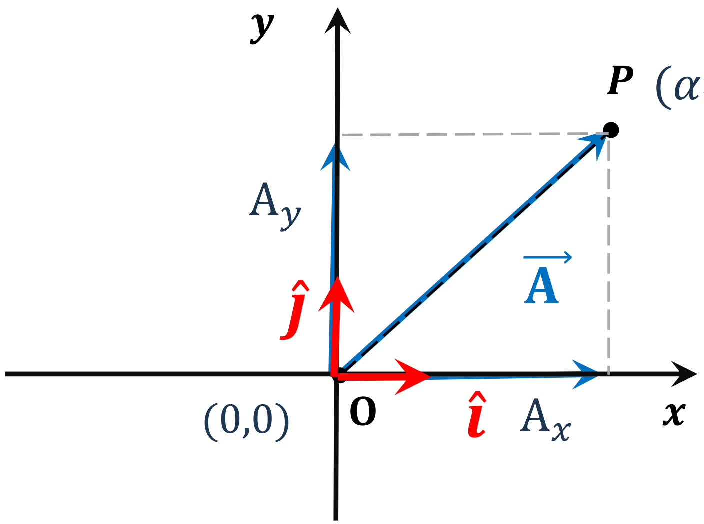
Η τριάδα αριθμών της αρχής και του πέρατος του διανύσματος ορίζει με μοναδικό τρόπο το διάνυσμα.

# ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Οι πράξεις με διανύσματα διευκολύνονται με την εύρεση των **συνιστωσών** διανυσμάτων.

**Διάνυσμα με αρχή το Ο**

**Επίπεδο $R^2$**



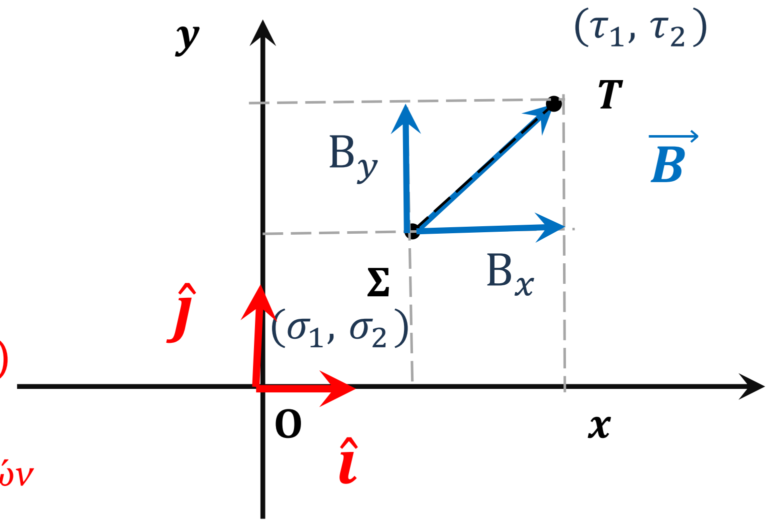

$\vec{A} = (A_x \quad A_y)$

$\vec{B} = (B_x \quad B_y)$

*Εναλλακτική γραφή* ***κάθετων*** *συνιστωσών*

**Διάνυσμα με αρχή το Σ**

**Επίπεδο $R^2$**




$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \overrightarrow{\boldsymbol{A_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{A_y}} =$$

$$(\alpha_1 - 0)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\alpha_2 - 0)\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \alpha_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \alpha_2\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$|\vec{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B_y}} =$$

$$(\tau_1 - \sigma_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\tau_2 - \sigma_2)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$|\vec{\boldsymbol{B}}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

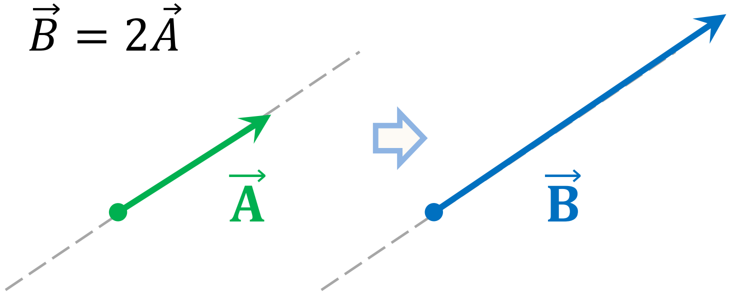
Αν το $\vec{\boldsymbol{A}}$ αντιστοιχεί σε μετατόπιση, τότε η μετατόπιση από το Ο στο P μπορεί εναλλακτικά να καλυφθεί πηγαίνοντας απόσταση $A_x$ προς την κατεύθυνση +x ($\hat{\boldsymbol{\imath}}$) και μετά απόσταση $A_y$ προς την κατεύθυνση +y ($\hat{\boldsymbol{\jmath}}$).

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (Ι)

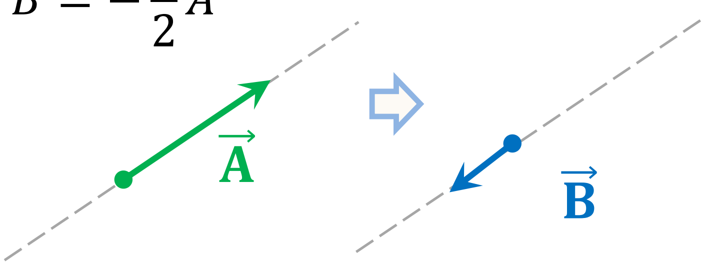
## Αριθμητικό πολλαπλάσιο

### Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

$\vec{B} = 2\vec{A}$

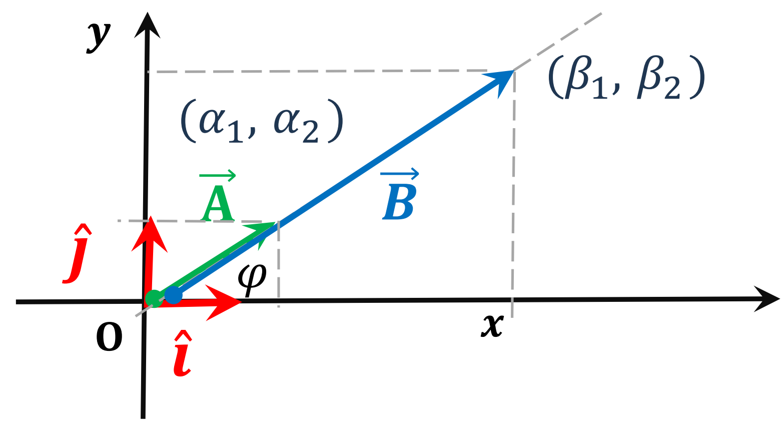



$\vec{B} = -\dfrac{1}{2}\vec{A}$




**Πολλαπλασιασμός με σταθερά** δεν αλλάζει τη διεύθυνση του διανύσματος παρά μόνο τη φορά (κατεύθυνση) ή/και το μέτρο του

### Χρήση συνιστωσών




$$\vec{\mathbf{A}} = \mathrm{A}_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathrm{A}_y\hat{\boldsymbol{j}} = \alpha_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \alpha_2\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} = \beta_1\hat{\boldsymbol{\imath}} + \beta_2\hat{\boldsymbol{j}}$$

*Θέλουμε να βρούμε Τα β1 & β2*

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad |\vec{\boldsymbol{B}}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{\boldsymbol{B}}| = 2|\vec{A}| &\Rightarrow \beta_1^2 + \beta_2^2 = 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ \tan\varphi &= \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{aligned}\right\}$$

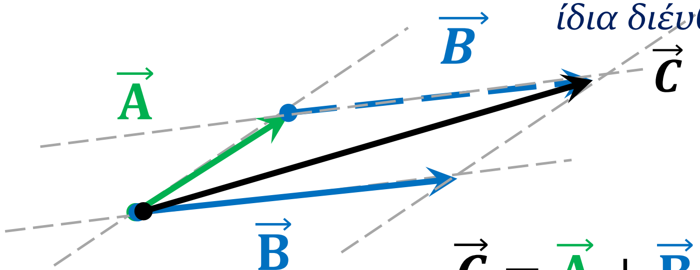
**Προσοχή**: Γενικά $\beta_1 \neq 2a_1$ $\quad \beta_2 \neq 2a_2$

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (ΙΙ)

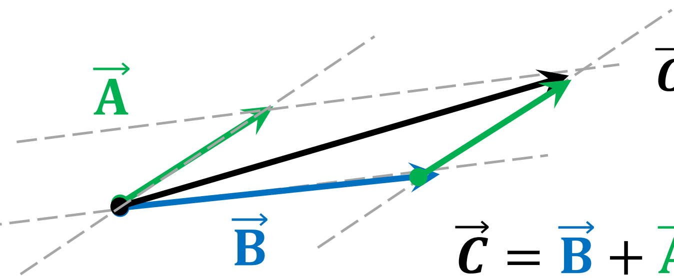
## Άθροισμα διανυσμάτων

### Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

*Ίσο (ελεύθερο) διάνυσμα:*
*ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο*




$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



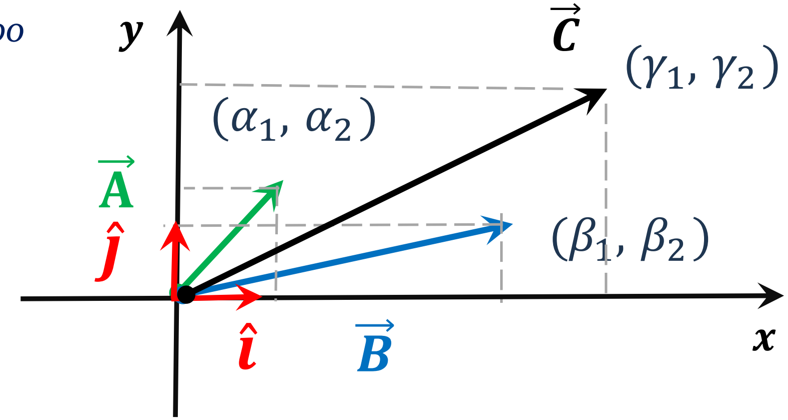

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A}$$

*Μνημονικός κανόνας:*
*σχηματισμός παραλληλογράμμου*

Τοποθετούμε την αρχή του δεύτερου διανύσματος στο πέρας του πρώτου (διαδοχικά).

Ισχύει ο **νόμος της μετάθεσης**, δεν έχει σημασία η σειρά πρόσθεσης των διανυσμάτων.

### Χρήση συνιστωσών




$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{j} = \alpha_1\hat{\imath} + \alpha_2\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{j} = \beta_1\hat{\imath} + \beta_2\hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{j} = \gamma_1\hat{\imath} + \gamma_2\hat{j}$$

$$= (\alpha_1+\beta_1)\hat{\imath} + (\alpha_2+\beta_2)\hat{j}$$

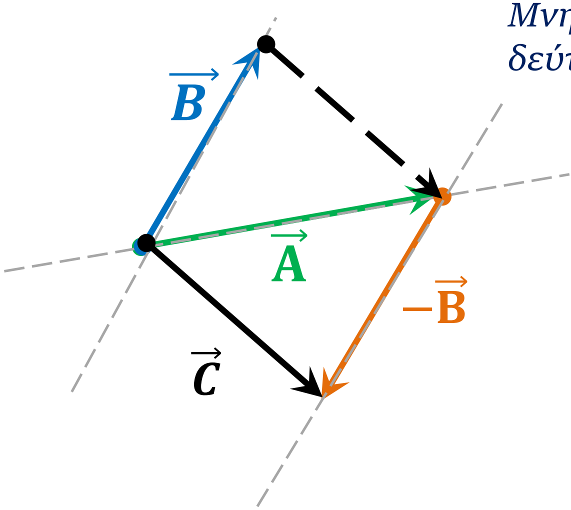
**Προσοχή**: Γενικά δεν ισχύει $\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (ΙΙΙ)

**Διαφορά διανυσμάτων**

**Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα**

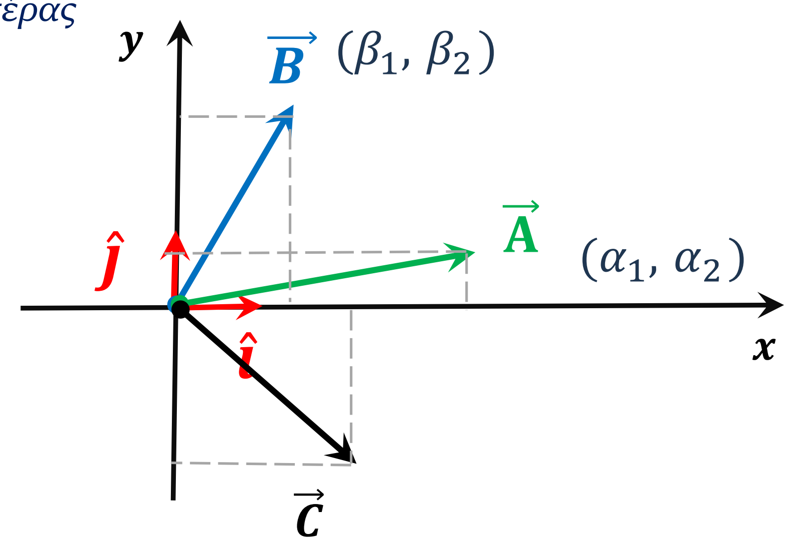
*Μνημονικός κανόνας: από πέρας δεύτερου σε πέρας πρώτου*




$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Ουσιαστικά βρίσκουμε το αντίθετο του δεύτερου διανύσματος και τοποθετούμε την αρχή του νέου διανύσματος στο πέρας του πρώτου (διαδοχικά).

**Χρήση συνιστωσών**




$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} = \alpha_1\hat{\imath} + \alpha_2\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} = \beta_1\hat{\imath} + \beta_2\hat{\jmath}$$

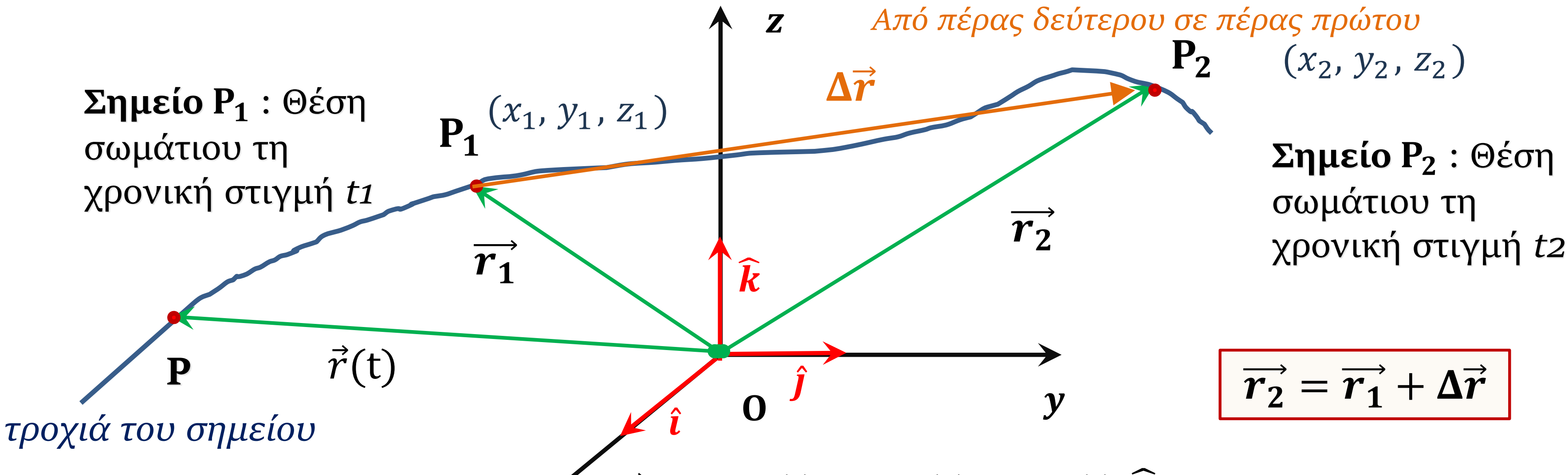
$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} = \gamma_1\hat{\imath} + \gamma_2\hat{\jmath}$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1)\hat{\imath} + (\alpha_2 - \beta_2)\hat{\jmath}$$

*Όταν το $\beta_2$ είναι πολύ μεγαλύτερο του $\alpha_2$ (όπως συμβαίνει στο επάνω παράδειγμα) τότε το πέρας της διαφοράς θα έχει αρνητική τεταγμένη.*

# ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ

**Διάνυσμα θέσεως:** *δέσμιο διάνυσμα*, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια *καμπύλη στον χώρο*, την *τροχιά του σημείου*.




$$\vec{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{x(t)}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{z(t)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_1} + \Delta\vec{r}}$$

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_1\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z_1\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\overrightarrow{r_2} = x_2\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_2\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z_2\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Οι τριάδες συντεταγμένων δίνουν τις θέσεις του σωματίου (πέρας διανύσματος θέσεως) τις χρονικές στιγμές t1 & t2.

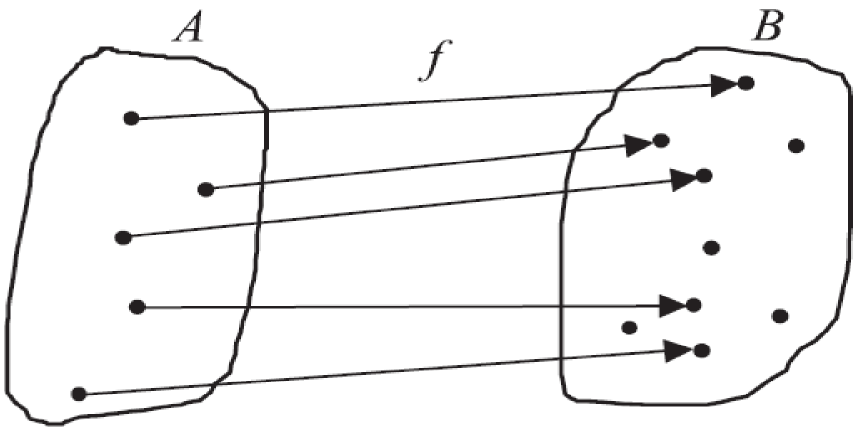
$$\overrightarrow{P}_{12} = \Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (x_2 - x_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y_2 - y_1)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z_2 - z_1)\hat{\boldsymbol{k}}$$ **Διάνυσμα μετατόπισης**

## *Εισαγωγή στις πραγματικές συναρτήσεις*

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω $A$ ένα υποσύνολο του $R$, καλούμε ως **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού** το $A$ μια **διαδικασία** $\boldsymbol{f}$, κατά την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό $y$. Το $y$ ονομάζεται **τιμή της** $\boldsymbol{f}$ στο $x$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

**Πεδίο ορισμού $f$** **Σύνολο τιμών $f$**




**ΣΥΜΒΟΛΙΚΑ**

$$f : A \to \mathrm{R}$$
$$x \to f(x) \equiv y$$

**Ανεξάρτητη μεταβλητή**

**Εξαρτημένη μεταβλητή**

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

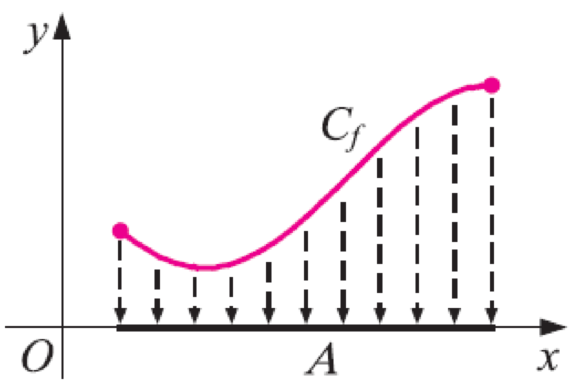
Πεδίο ορισμού Α = (0, e]
είναι υποσύνολο του R.
Πεδίο τιμών f είναι R.

Ορίζεται μόνο αν $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow$
$\ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leq e$

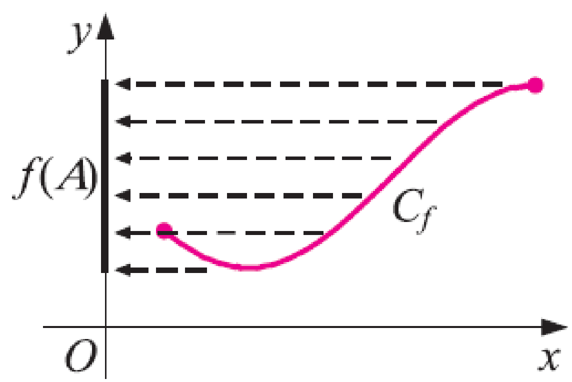
# ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού A. **Γραφική παράσταση** ή **καμπύλη** $C_f$ της $f$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxy$ καλείται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

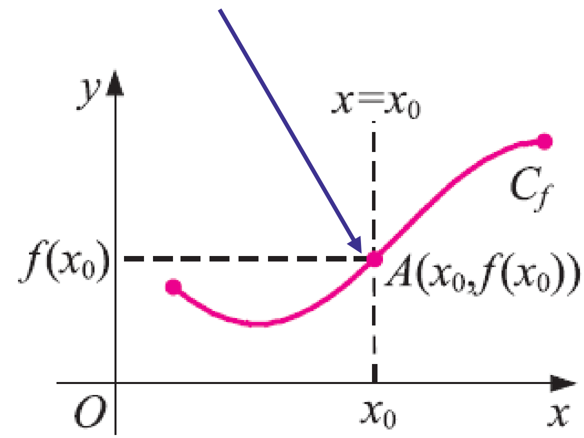
Πεδίο ορισμού $A$




Σύνολο τιμών $f(A)$



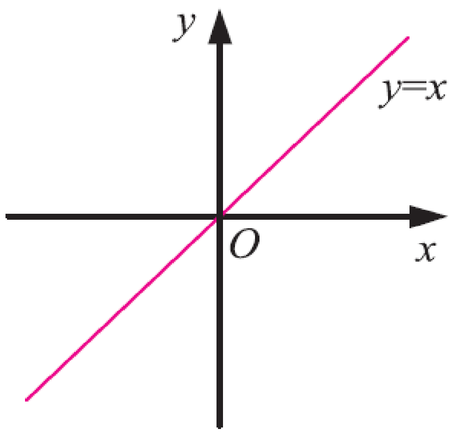

Σημείο του επιπέδου $M(x, y)$ ανήκει στην καμπύλη μόνο όταν $y=f(x)$



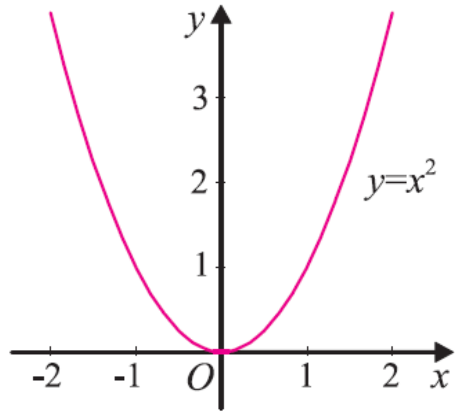

Η εξίσωση $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη $(x, y)$ *που* είναι συντεταγμένες σημείων της καμπύλης $C_f$ και καλείται **εξίσωση της γραφικής παράστασης** της $f$.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

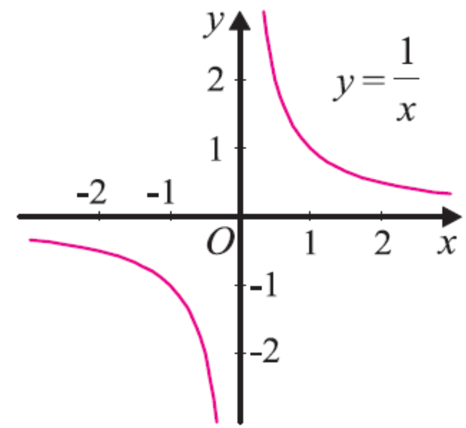
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



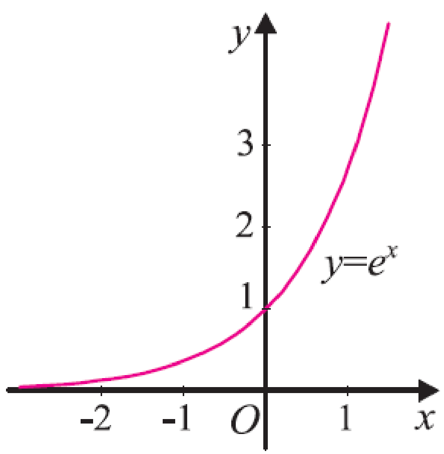

Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι μια *παραβολή*.



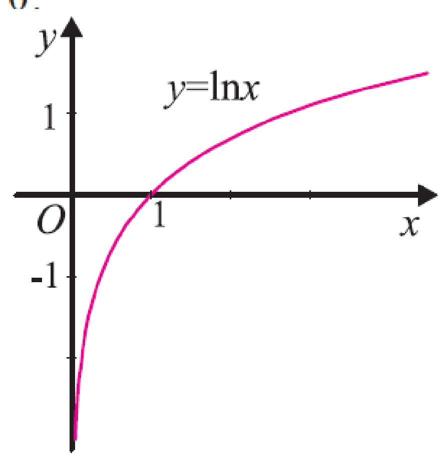

Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.



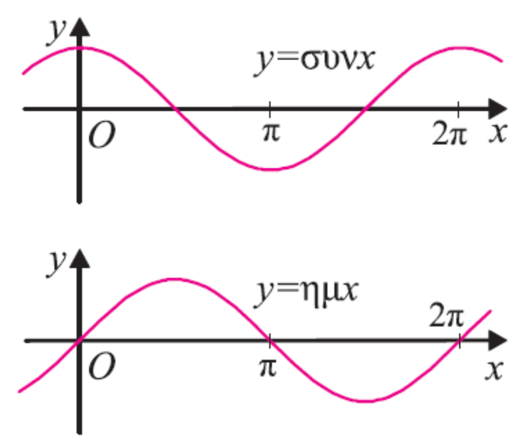

Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.




Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$ είναι “δεξιά” του άξονα $yy'$, αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x>0$.




Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $2\pi$.



# *Α. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής*

# Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής

$$\text{Έστω} \quad f : x \rightarrow f(x) \qquad x, f(x) \in \mathcal{R}, \qquad \alpha < x < \beta$$

Έστω σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$. Αν το παρακάτω **όριο** της συνάρτησης υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι **η *f* είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o$** του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της *f* στο $x_o$** και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_o) \equiv \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_o} \equiv \frac{df(x_o)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

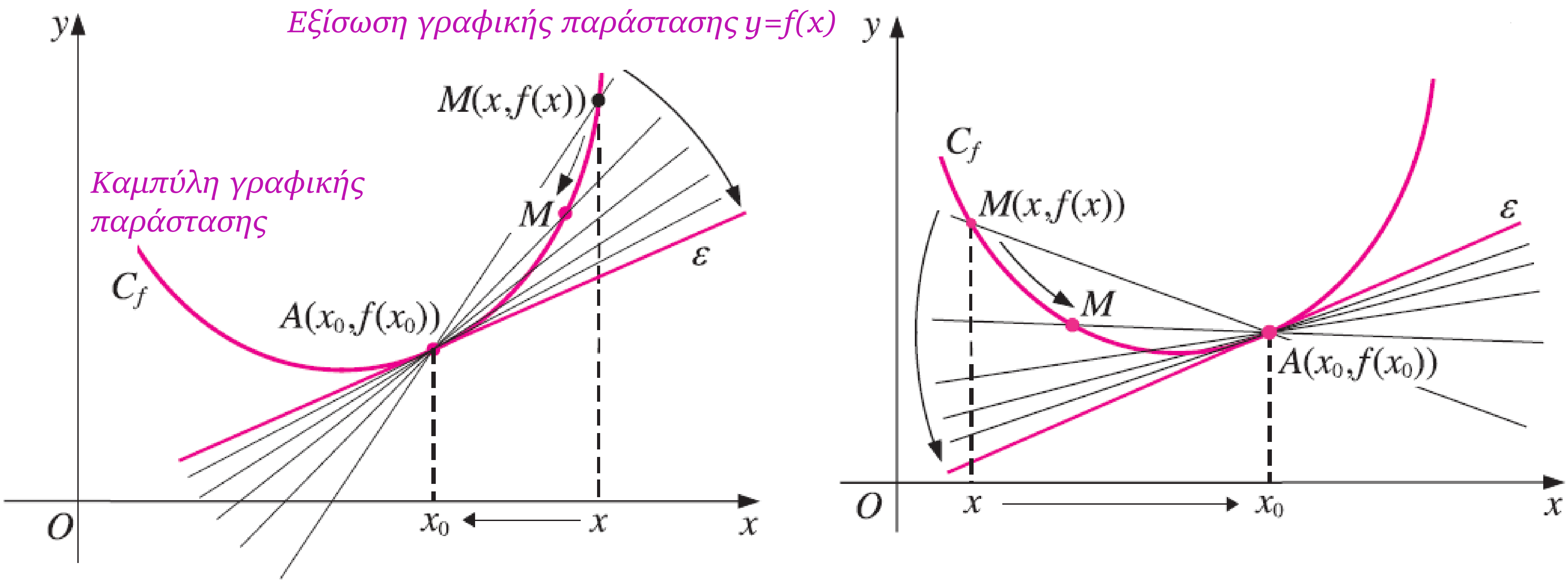
“*f* τονούμενο του $x_o$”

Η έννοια της παραγώγου **σε σημείο $x_o$** γίνεται κατανοητή ως

1. **Κλίση** της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $x_o$ (Γεωμετρία).
2. **Ρυθμός μεταβολής** ή «ταχύτητα» της συνάρτησης.
3. Εργαλείο στη **γραμμική προσέγγιση συνάρτησης** στη περιοχή του σημείου $x_o$

# Εφαπτομένη & τέμνουσα καμπύλης

Έστω σημείο Α$(x_o, f(x_o))$ καμπύλη $C_f$ της συνάρτησης $f$ και ένα επιπλέον σημείο Μ$(x, f(x))$, τα οποία ορίζουν την ευθεία ΑΜ (**τέμνουσα της καμπύλης**).




Όταν $x$ πλησιάζει το $x_o$, είτε από δεξιά ($x>x_o$) είτε από αριστερά ($x<x_o$), η τέμνουσα λαμβάνει μια **οριακή θέση (ε)** έχοντας ένα και **μόνο σημείο τομής** με την καμπύλη. Η τελευταία ονομάζεται **εφαπτομένη** της καμπύλης στο σημείο Α.

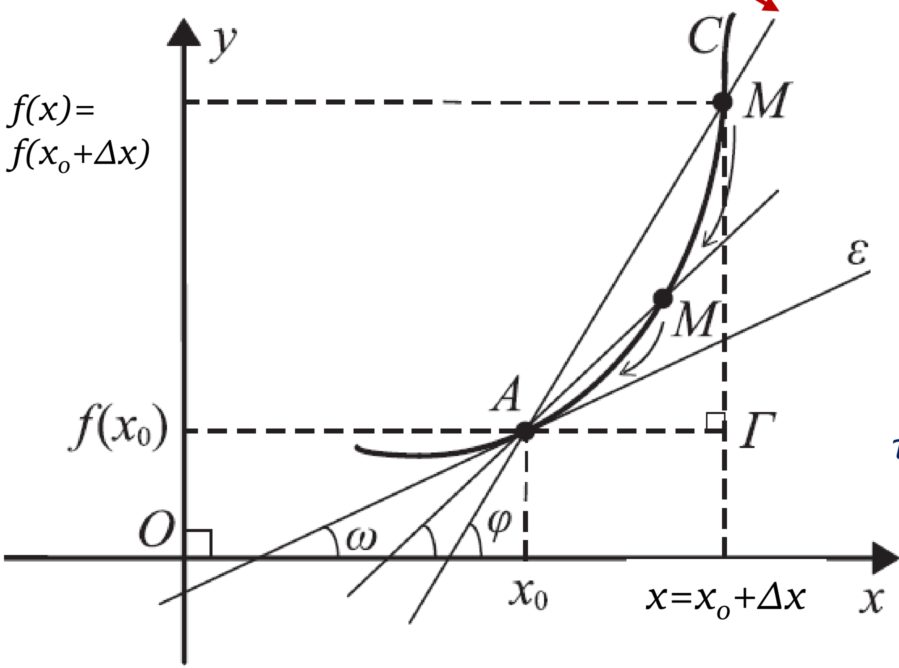
# Κλίση και εξίσωση τέμνουσας ευθείας

**Ερώτηση**: Ποιά η **κλίση** και η **εξίσωση μιας τέμνουσας ευθείας**;

**Περίπτωση Δx≠o**

*Πεπερασμένο*

Τότε η ευθεία που διέρχεται από το Α τέμνει την καμπύλη και στο σημείο Μ. Σχηματίζει γωνία φ με οριζόντιο άξονα.




**Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της τέμνουσας ευθείας ΑΜ**

$$\tan\varphi = \lambda = \frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\overbrace{f(x)}^{f(xo+\Delta x)} - f(x_o)}{\underbrace{x - x_o}_{\Delta x}}$$

Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει τη *μεταβολή της τιμής της f ως προς τη μεταβολή του x ή αλλιώς* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Μ

$$\boxed{y = \boldsymbol{f(x)} = f(x_o) + (x - x_o)\, tan\varphi = f(x_o) + \lambda(x - x_o)}$$

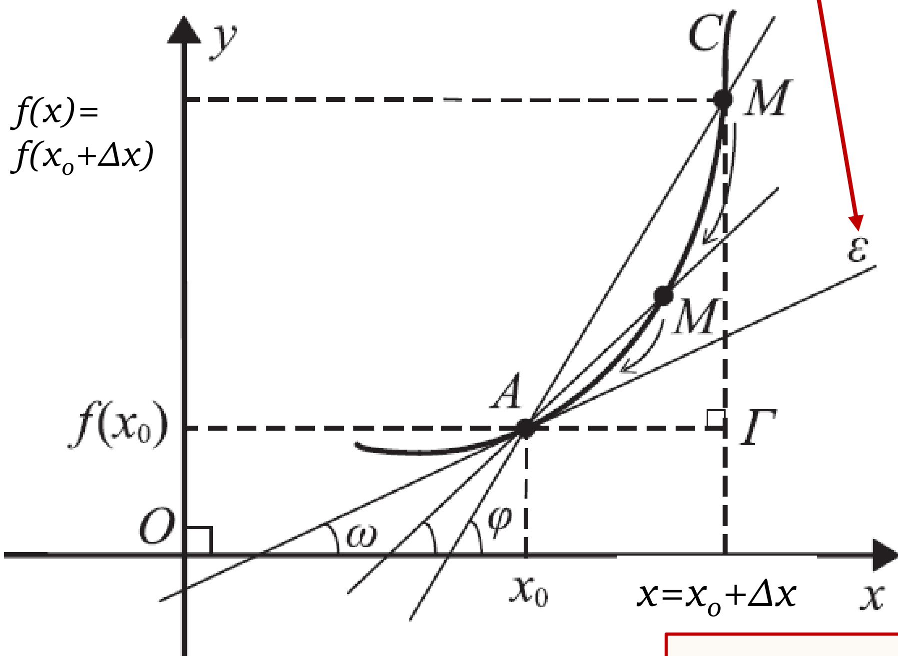
Σχηματίζει γωνία φ με τον οριζόντιο άξονα. Η ευθεία αυτή για κάθε Δx≠o τέμνει τοπικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε δύο σημεία.

# Κλίση και εξίσωση εφαπτομένης ευθείας

**Ερώτηση**: Ποιά η **κλίση** και η **εξίσωση μιας εφαπτομένης ευθείας στο σημείο Α**;

**Περίπτωση Δx⟹ ο**
τότε $\boldsymbol{tan\,\varphi} \Rightarrow \boldsymbol{tan\,\omega}$

Τότε η ευθεία που διέρχεται από το Α είναι εφαπτομένη αφού το Μ σχεδόν ταυτίζεται. Σχηματίζει γωνία φ=ω με οριζόντιο άξονα.




**Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $C_f$ στο Α είναι**

$f(x) \equiv y$     *Ορισμός παραγώγου*

$$\tan\omega = \lambda = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x) - f(xo)}{\Delta x} = \frac{df(x_o)}{dx}$$

Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στη *μεταβολή της τιμής της $f$ ως προς την μεταβλητή $x$ στο σημείο $x_o$ ή αλλιώς* $\frac{df(x_o)}{dx} = tan\,\omega$.

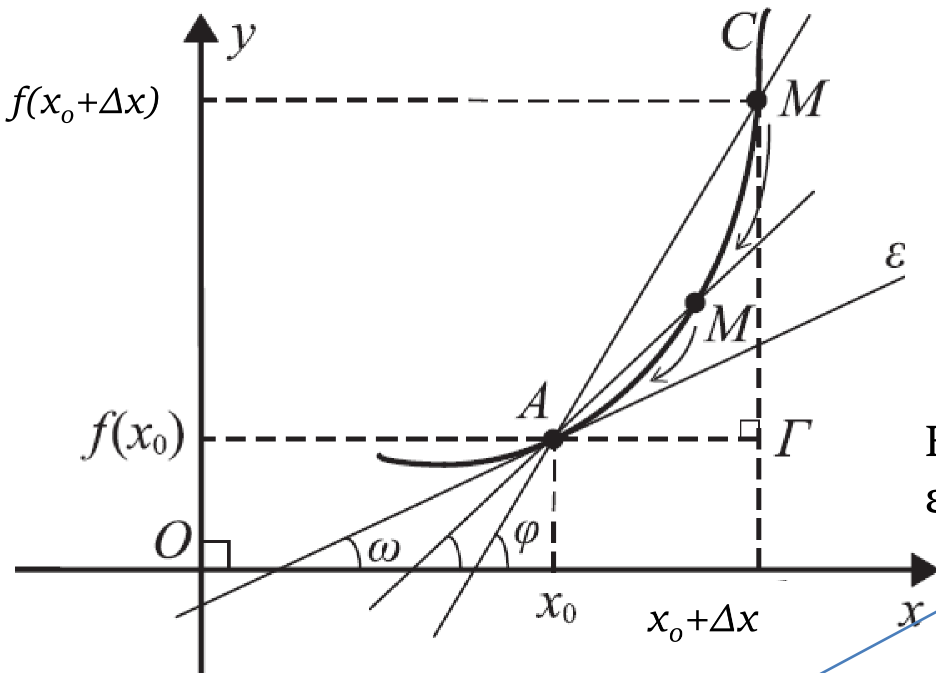
Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $C_f$ στο σημείο Α

$$y = f(x) = f(x_o) + \boldsymbol{tan\omega}(x - x_o) = f(x_o) + \boldsymbol{\lambda}(x - x_o)$$
$$= f(x_o) + \frac{\boldsymbol{df(x_o)}}{\boldsymbol{dx}}(x - x_o) = f(x_o) + \boldsymbol{f'(x_o)}(x - x_o)$$

Η ευθεία αυτή έχει *τοπικά* (στην περιοχή του σημείο $x_o$) μόνο ένα κοινό σημείο με τη $C_f$. *Εφάπτεται* δηλαδή της καμπύλη στο σημείο Α$(x_o, f(x_o))$.

# 1α. Γεωμετρική Προσέγγιση

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός $\lambda$ τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.




$$f'(x_o) \equiv \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{\mathbf{x=x_o}} \equiv \frac{df(x_o)}{dx}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = x_0$ είναι η **κλίση** της εφαπτομένης ευθείας.

$$y = f(x_o) + \frac{df(x_o)}{dx}(x - x_o) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

# 1β. Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης

Η παράγωγος εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** ή **ταχύτητα** μιας συνάρτησης

- **Περίπτωση $\Delta x \neq 0$**

**Σχετική μεταβολή** της τιμής της συνάρτησης f ως προς τη μεταβολή της μεταβλητής x

$$\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

- **Περίπτωση $\Delta x \Longrightarrow 0$**

**Ρυθμός μεταβολής** της τιμής της $f$ ή "ταχύτητα" της συνάρτησης στο σημείο $x = x_0$

$$\frac{df(x_o)}{dx}$$

**Παράδειγμα**: Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η **θέση** του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $\boldsymbol{x = f(t)}$ θα είναι τη χρονική στιγμή $t_o$, $\upsilon(t_o) = f'(t_o) \equiv \frac{df(t_o)}{dt}$

δηλαδή ο **ρυθμός μεταβολής της** $\boldsymbol{f(t)}$ ως προς $t$ όταν $t = t_o$.

# 1γ. Γραμμική προσέγγιση $f$ στην περιοχή $x_o$

Η **παράγωγος σε σημείο $x = x_0$, $f'(x_o)$** , χρησιμοποιείται για την **προσέγγιση της τιμής της $f$** στην ευρύτερη περιοχή του $x = x_0$

- Με $\Delta x \neq o$ μπορούμε να γράψουμε

*Παράγοντας διόρθωσης (σφάλμα στη προσέγγιση) ο οποίος εξαρτάται από το σημείο $x = x_0$ αλλά και πόσο μακριά είμαστε από το σημείο (Δx).*

$$\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} + \eta(x_o, \Delta x)$$

$$\Leftrightarrow f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta x \frac{df(xo)}{dx} + \Delta x\, \eta(x_o, \Delta x)$$

Όταν $\Delta x \Longrightarrow 0$ τότε

$\eta(x_o, \Delta x) \Longrightarrow 0$

Αν $\frac{df(x_o)}{dx} \neq$ ο τότε μπορούμε πάντα να διαλέξουμε ένα $\Delta x$ τέτοιο ώστε $\eta(x_o, \Delta x) \lll \frac{df(x_o)}{dx}$.

Αν για παράδειγμα ισχύει $\eta(x_o, \Delta x) \sim 10^{-3}\ \frac{df(x_o)}{dx}$

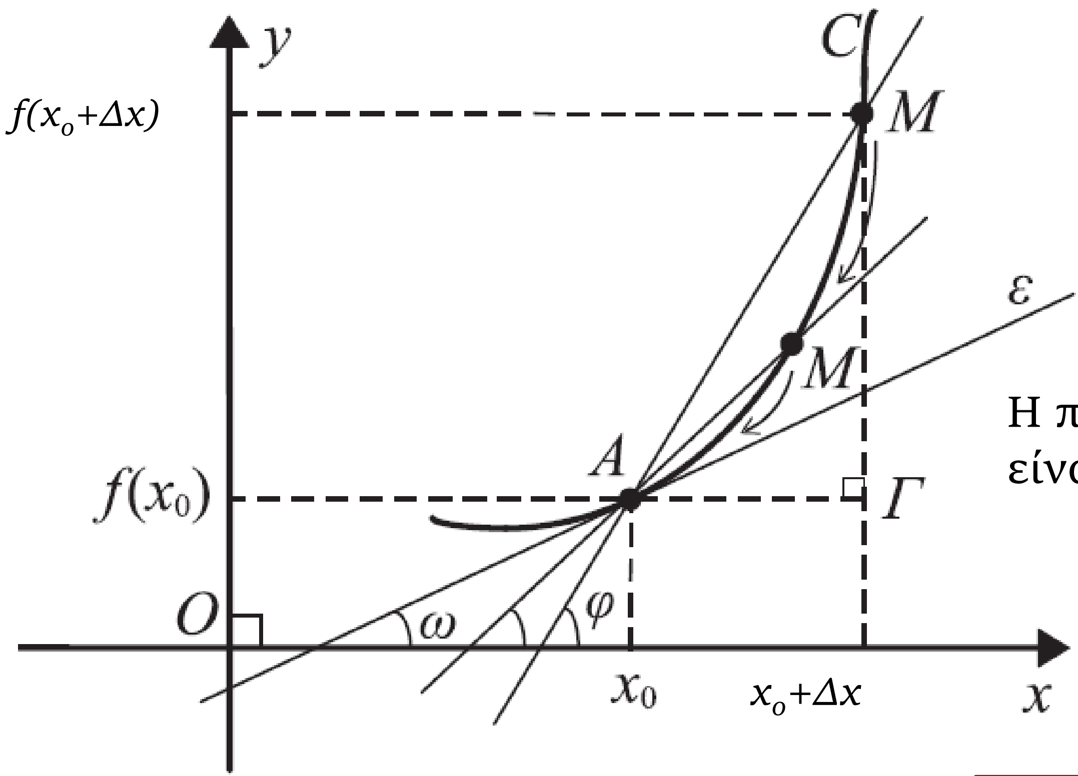
$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta x \frac{df(x_o)}{dx}[1 + 10^{-3}] = f(x_o) + \Delta x \frac{df(x_o)}{dx} + \Delta x\, 10^{-3} \frac{df(x_o)}{dx}$$

Όπου ο 3$^{ος}$ (διορθωτικός) όρος μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε μειώνοντας το Δx.

*Για κατάλληλο $\Delta x$* μπορούμε να κάνουμε **γραμμική προσέγγιση** της τιμής της συνάρτησης **στην περιοχή του $x_o$** με τη βοήθεια της παραγώγου:

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + \Delta x \frac{df(x_o)}{dx}$$

# 1γ. Γραμμική προσέγγιση $f$ στην περιοχή $x_o$




$$f'(x_o) \equiv \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{\mathbf{x=x_o}} \equiv \frac{df(x_o)}{dx}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = x_0$ είναι η **κλίση** της εφαπτομένης ευθείας.

**Εξίσωση εφαπτομένης ευθείας**

$$\boxed{y = f(x_o) + \frac{df(x_o)}{dx}(x - x_o)}$$

**“Γραμμική προσέγγιση”**

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + \Delta x \frac{df(x_o)}{dx}$$

Κάνοντας γραμμική προσέγγιση στην περιοχή του $x = x_0$ ουσιαστικά δεν ακολουθούμε την καμπύλη της συνάρτησης δεν είναι η $C_f$ αλλά την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο Α$(x_0, f(x_0))$. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι καλή όταν το Δx μεγαλώνει σημαντικά.

# Παράγωγος συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού Α. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $A$ ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη **σε κάθε σημείο** $x_o \in$ Α.

Όταν $A_1$ το σύνολο των σημείων του $A$ στα οποία η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη **παράγωγο συνάρτηση**

$$f' : A_1 \rightarrow \mathrm{R}$$
$$x \rightarrow f'(x)$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της $\boldsymbol{f}$** ή απλά **παράγωγος της και** συμβολίζεται με $\frac{df(x)}{dx}$. Η παράγωγος $y = f'(x)$ συμβολίζεται και ως $y = (f(x))'$.

# Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Η παράγωγος της συνάρτησης $f\,'$ λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της $f$ και συμβολίζεται με $f''$

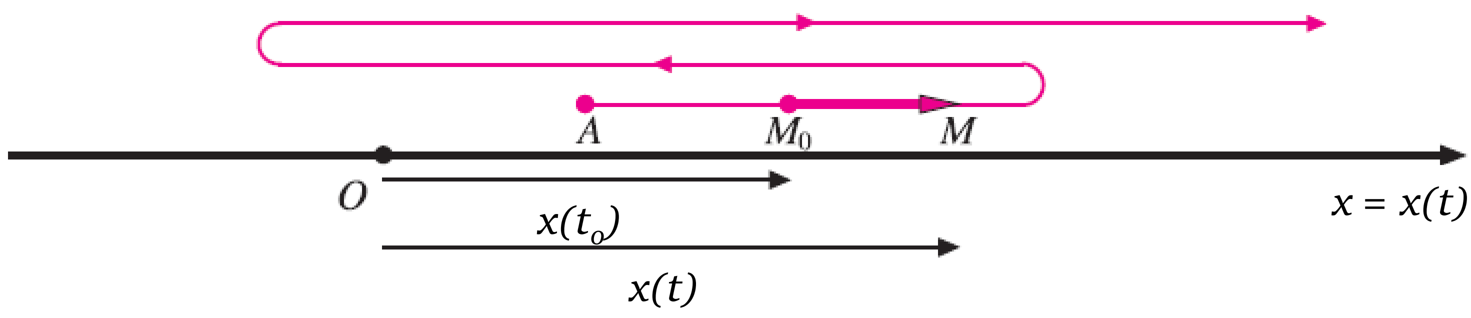
Επαγωγικά ορίζονται παράγωγοι ανώτερης τάξεως. Η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f συμβολίζεται ως $f^{(n)}$ ή $\frac{d^n f}{dx^n}$ βάσει του παρακάτω κανόνα

$$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]'$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{\,n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right]$$

# Παράδειγμα: Στιγμιαία ταχύτητα - επιτάχυνση

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** x(t) καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκους του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t.




Με τη παρέλευση χρόνου $\Delta t = t - t_o$ το κινητό μετακινείται από το σημείο $M_o$ στο M διανύοντας απόσταση $\Delta x = x(t) - x(t_o)$. Η **μέση ταχύτητά** του κατά την μετακίνηση

$$\frac{x(t) - x(to)}{t \ - to} = \frac{\text{Απόσταση}}{\text{Χρόνος}}$$

Αν το Δt είναι πολύ μικρό τότε έχουμε πολύ καλή προσέγγιση του **ρυθμού μεταβολής** της θέσης ή **στιγμιαίας ταχύτητας** του κινητού στο σημείο $M_o$:

$$\upsilon(t_o) = \lim_{t \to to} \frac{x(t) - x(to)}{t - to} \quad (\textit{Παράγωγος συνάρτησης θέσεως})$$

# Παράδειγμα: Στιγμιαία ταχύτητα - επιτάχυνση

*Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή*

$$v(t_o) = \frac{dx(t_o)}{dt}$$

**Στιγμιαία ταχύτητα** κινητού τη χρονική στιγμή $t_o$

*Για κάθε χρονική στιγμή*

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

**Στιγμιαία ταχύτητα** κινητού ως συνάρτηση χρόνου t (ανεξάρτητη μεταβλητή)

*Για κάθε χρονική στιγμή*

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

**Επιτάχυνση** κινητού ως συνάρτηση χρόνου t

**Γραμμική προσέγγιση** θέσεως κινητού για μετατοπίσεις με παρέλευση μικρού χρονικού διαστήματος Δt

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \,\frac{\boldsymbol{dx(t)}}{\boldsymbol{dt}} = x(t) + \boldsymbol{v(t)}\,\Delta t$$

# 2α. Ιδιότητες της παραγώγου

$$\frac{d(f_1+f_2)}{dx} = \frac{df_1}{dx}+\frac{df_2}{dx}$$

$f_1=f_1(x)$ & $f_2=f_2(x)$

$$\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$$

c: σταθερά

$$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx}+\frac{df}{dx}g$$

$f=f(x)$ & $g=g(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{1}{g^2}\right)\left(\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}\right)$$

$g(x) \neq 0$

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

$f(g(x))$ *σύνθετη συνάρτηση*

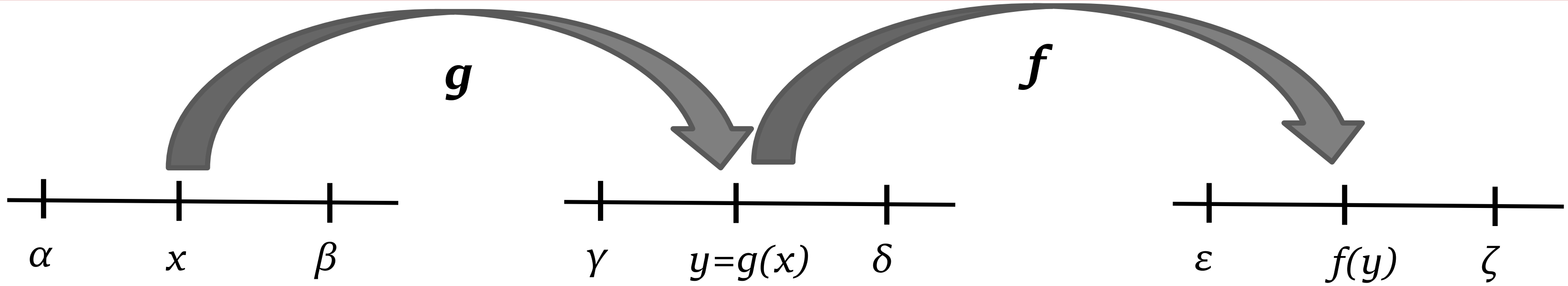
$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$$

$f^{-1}$ *αντίστροφη συνάρτηση της* $f$

$f^{-1}(f(x)) = x$

πχ η αντίστροφη της $f(x) = e^x$ είναι η $g(x) = \ln x$

# 2β. Σύνθεση συναρτήσεων




Αν συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ=(α,β) και $f$ είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η **σύνθεσή** τους **f ∘ g** είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$( f (g(x)))' = f' (g(x)) \cdot g'(x).$$

**<u>Παράδειγμα</u>**

Η συνάρτηση $F = \sqrt{x^2+1}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x}$ θέσουμε όπου $x$ το $g(x) = x^2 + 1$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη σύνθετη συνάρτηση $f\,(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την $f$ σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της $g$ (ως προς $x$).

# 3. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

c: σταθερά

$$\frac{dx^{\nu}}{dx} = \nu x^{\nu-1}$$

ν ∈ N : φυσικός αριθμός
N = {0,1,2,3,...}

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

ν=1

$$\frac{dx^{\rho}}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

ρ ∈ Q : ρητός αριθμός
Q = $\{\frac{\alpha}{\beta}$ , α & β ακέραιοι με β≠0}
Άρρητος π=3.14159....

$$\frac{d\ sinx}{dx} = cosx \qquad \frac{d\ cosx}{dx} = -sinx$$

$$\frac{d\ e^{x}}{dx} = e^{x}$$

$$\frac{d\ \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d\ \log_a x}{dx} = \frac{1}{x\ \ln a}$$

$\ln x \equiv \log_e x$

Βάση φυσικού λογαρίθμου
e=2,71828..

# 3α. Παραδείγματα

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = ?$$

$$\boxed{\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}}$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F = \sqrt{x^2 + a^2}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ θέσουμε όπου $x$ το $g(x) = x^2 + a^2$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$f'(g(x)) = \frac{1}{2}(x^2 + a^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

# 3β. Παραδείγματα

$$( f (g(x)))' = f' (g(x)) \cdot g'(x).$$

$$\frac{de^{sinx}}{dx} = ?$$

$$\frac{d\, e^{x}}{dx} = e^{x}$$

$$\frac{d\, sinx}{dx} = cosx$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F = e^{sinx}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(x) = e^{x}$ θέσουμε όπου $x$ το $g(x) = sinx$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$f'(g(x)) = e^{sinx}$$

$$g'(x) = cosx$$

$$\frac{de^{sinx}}{dx} = e^{sinx}cosx$$

# 3γ. Παραδείγματα

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sinx}\right) = ?$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} sinx = cosx}$$

$$\boxed{(\,f\,(g(x)))' = f\,'\,(g(x)) \cdot g'(x).}$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{sinx}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(x) = \frac{1}{x}$ θέσουμε όπου $x$ το $g(x) = sinx$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$h \equiv h(x)$ $\quad$ $s \equiv s(x) \neq 0$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{h}{s}\right) = \left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{dh}{dx}s - h\frac{ds}{dx}\right)}$$

$$g'(x) = cosx$$

$$f'\big(g(x)\big) = ?$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{d\,1}{dx}x - 1\frac{dx}{dx}\right) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\,0 - 1\,) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(g(x)) = -\frac{1}{\big(g(x)\big)^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{sinx}\right) = -\frac{cosx}{\sin^2 x}$$

# 3δ. Παραδείγματα

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** *x(t)* καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκος του άξονα κατά τη χρονική στιγμή $t$.

$$x(t) = x_o + \upsilon_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2$$

**Ταχύτητα** $\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \upsilon_o + \alpha\,(t - t_o)$

**Επιτάχυνση** $\alpha(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \alpha$

*Το κινητό κινείται με* ***σταθερή επιτάχυνση α****:*

*Τη χρονική στιγμή* $t = t_o$ *βρίσκεται στη θέση* $x_o$ *και έχει ταχύτητα* $\upsilon_o$

# 3ε. Παραδείγματα

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** *x(t)* καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκους του άξονα κατά τη χρονική στιγμή $t$.

$$x(t) = x_o \cos(\omega t) + \frac{\upsilon_o}{\omega} \sin(\omega t)$$

**Ταχύτητα** $\upsilon(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_o \sin(\omega t) + \upsilon_o \cos(\omega t)$

**Επιτάχυνση** $\alpha(t) = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x_o \cos(\omega t) - \omega\upsilon_o \sin(\omega t)$

*Το κινητό κινείται με* ***μεταβλητή στο χρόνο επιτάχυνση***

$x(0) = x_o$

$\upsilon(0) = \upsilon_o$

$\alpha(t) = -\omega^2 \left[x_o \cos(\omega t) + \frac{\upsilon_o}{\omega} \sin(\omega t)\right] = -\omega^2 \ x(t)$

## *Β. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών*

# Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots\ x_n)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης $f$ ως προς τη μεταβλητή $x_i$. Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης $f$ για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής $x_i$, δηλαδή "προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής $x_i$".

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Έστω $f = f(x,y)$ τότε ορίζονται οι πρώτες μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = \sigma\tau\alpha\theta}} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

*Μεταβάλλεται η τιμή της f λόγω μεταβολής* ***μόνο*** *της x κατά Δx*

*Η μερική παράγωγος ως προς μια μεταβλητή μεταπίπτει στη συνηθισμένη παράγωγο όταν θεωρήσουμε τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές.*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ x = \sigma\tau\alpha\theta}} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

*Μεταβάλλεται η τιμή της f λόγω μεταβολής* ***μόνο*** *της y κατά Δy*

# Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση f(x,y,z) = 5xy + 2$(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης.

$\frac{\partial f}{\partial x} = ?$, $\frac{\partial f}{\partial y} = ?$, $\frac{\partial f}{\partial z} = ?$

# Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση f(x,y,z) = 5xy + 2$(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = ??$$

# Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση f(x,y,z) = 5xy + 2$(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4z \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4x$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

# Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση f(x,y,z) = 5xy + 2$(x^2 + y^2)z$ . Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 5 \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

# Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση f(x,y,z) = 5xy + 2$(x^2 + y^2)z$ . Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4z \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4x \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 4y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$$

# Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$ .

Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

Δηλαδή η σειρά με την οποία γίνεται η παραγώγιση δεν έχει σημασία. Αυτό είναι **γενικός κανόνας** για μια συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots\ x_n)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Όπου $x_i, x_j$ ανήκουν στις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots\ x_n$

# Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις **μιας άλλης μεταβλητής *t***. Δηλαδή ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \\ x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots\ldots,\ x_n = x_n(t) \end{array}\right\}$$

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση **μιας μεταβλητής** $g(t) = f(\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\,)$

Η **ολική παράγωγος** της συνάρτησης $g$ **ως προς *t*** είναι η εξής:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

# Παράδειγμα

*Ανεξάρτητες μεταβλητές x, y*

$f = f(x,y) = xy$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$x = x(t) = \alpha \cos(\omega t)$
$y = y(t) = \alpha \sin(\omega t)$

*Ανεξάρτητη μεταβλητή t*

$x_1 = x \qquad x_2 = y$

Ορίζεται συνάρτηση $g = g(t) = f(x,y) = \alpha^2 \cos(\omega t)\ \sin(\omega t)$

*Ανεξάρτητη μεταβλητή t*

Η **ολική παράγωγος** της g **ως προς *t*** είναι

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \mathbf{y}\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{x}\frac{dy}{dt}$$

$$= \boldsymbol{\alpha sin(\omega t)}\,\{-\alpha\omega sin(\omega t)\} + \ \boldsymbol{\alpha cos\omega t}\{\alpha\omega\cos(\omega t)\}$$

*Εκφράζουμε τα πάντα ως προς t*

$$\frac{dg(t)}{dt} = \alpha^2\omega\,(cos^2\,\omega t\ -\ sin^2\,\omega t)$$

# Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \ldots\ xn)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots , x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις **πολλών μεταβλητών** $\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots , y_n}$. Δηλαδή ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} f = f(x_1, x_2, \ldots , x_n) \\ \\ x_1 = x_1(y_1, y_2, \ldots , y_n), \quad x_2=x_2(y_1, y_2, \ldots , y_n) , \ldots\ldots , x_n=x_n(y_1, y_2, \ldots , y_n) \end{array}\right\}$$

*Ανεξάρτητες μεταβλητές*

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση **πολλών μεταβλητών** $g(y_1, y_2, \ldots , y_n ) = f(x_1, x_2, \ldots , x_n )$

Η **μερική παράγωγος** της συνάρτηση g **ως προς $\mathbf{y_i}$** είναι η εξής:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \boldsymbol{y_i}} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \boldsymbol{y_i}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

*Επειδή η g είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών ορίζονται μερικές παράγωγοι ως προς κάθε μεταβλητή.*

# Παράδειγμα

*Ανεξάρτητες μεταβλητές x, y*

$f = f(x,y) = xy$

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \dots\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

$x = x(s, t) = s + t^2$

$y = y(s, t) = s + t$ *Ανεξάρτητες μεταβλητές s, t*

$x_1 = x \qquad y_1 = s$

$x_2 = y \qquad y_2 = t$

*Ανεξάρτητες μεταβλητές s, t*

Ορίζεται σύνθετη συνάρτηση $g = g(s, t) = f(x,y) = (s + t^2)(s + t) = s^2 + st + st^2 + t^3$

Η **μερική παράγωγος** της g **ως προς *s*** είναι

*Είναι μια νέα συνάρτηση με ανεξάρτητες μεταβλητές s, t*

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{s}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{s}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{s}} = \boldsymbol{y}\frac{\partial x}{\partial s} + \boldsymbol{x}\frac{\partial y}{\partial s} = (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t})1 + \left(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}}\right)1 = 2s + t + t^2$$

Η **μερική παράγωγος** της g **ως προς *t*** είναι

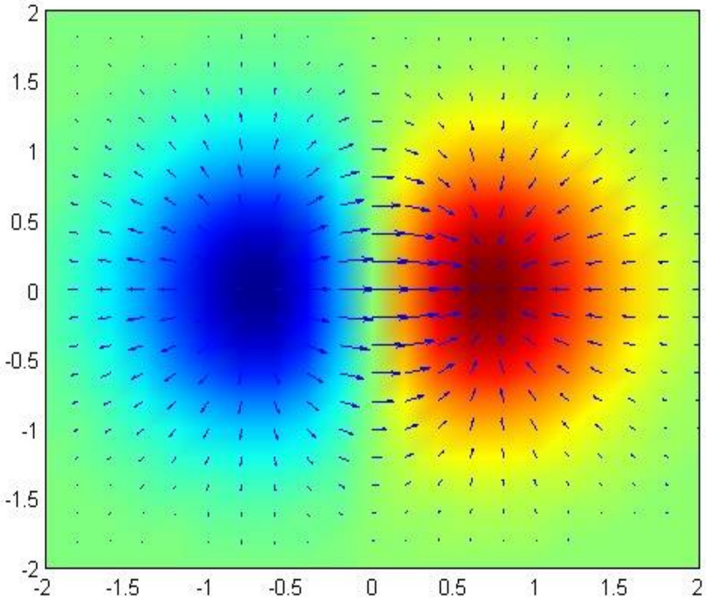
$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{y}\frac{\partial x}{\partial t} + \boldsymbol{x}\frac{\partial y}{\partial t} = (\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t})2t + \left(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}}\right)1 = s + 2st + 3t^2$$

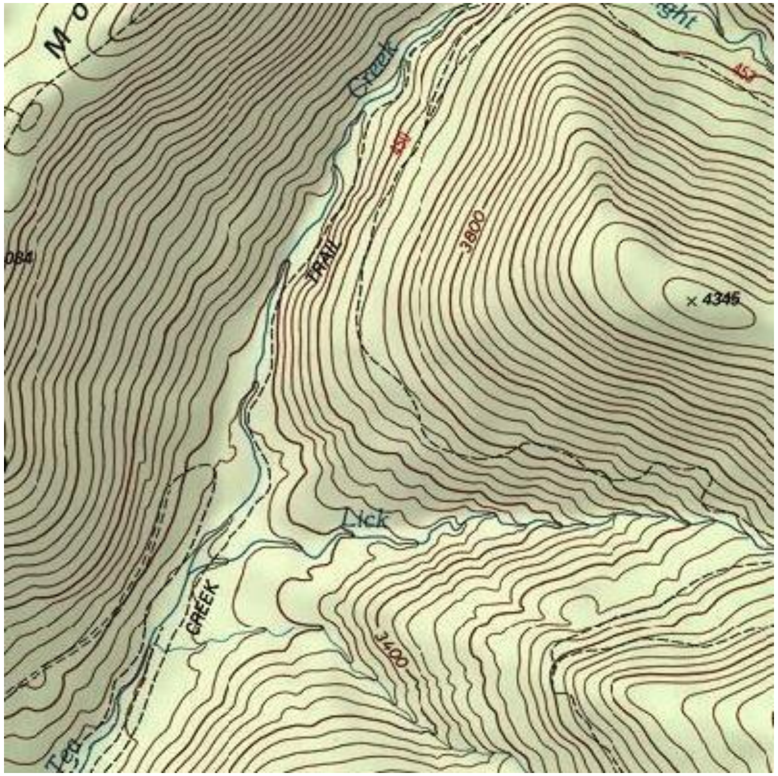
# Βαθμίδα συνάρτησης

Έστω $f = f(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$. Η **βαθμίδα** (gradient) της συνάρτησης είναι **διανυσματικό** μέγεθος και ορίζεται ως εξής

*Τελεστής Ανάδελτα ή Nabla*

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$



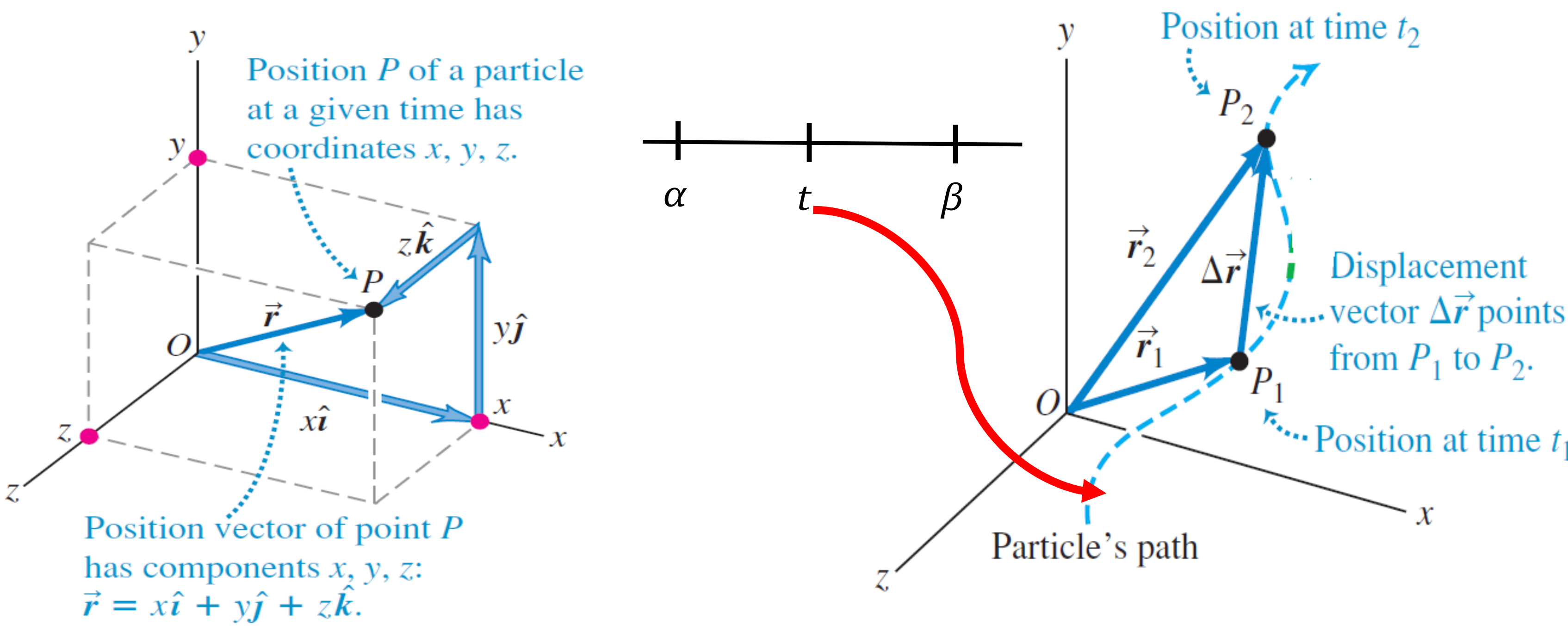




Το διάνυσμα της βαθμίδας είναι πάντα κάθετο στις επιφάνειας στις οποίες η συνάρτηση έχει σταθερή τιμή (2D: π.χ. ισουψείς σε τοπογραφικό χάρτη). Έχει κατεύθυνση προς τη μέγιστη αύξηση της συνάρτησης.

# Γ. Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής

# Διανυσματική συνάρτηση : διάνυσμα θέσεως

Τέτοια είναι το **διάνυσμα θέσεως**, ένα *δέσμιο διάνυσμα*, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος $t$ μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο $P$ και διαγράφει μια *καμπύλη στον χώρο*, την *τροχιά του σημείου*.




$$\vec{r}(\mathrm{t}) = (\, \mathrm{x(t)}, \mathrm{y(t)}, \mathrm{z(t)}\, ) = \mathrm{x(t)}\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{z(t)}\, \widehat{\boldsymbol{k}}$$

*Οι συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος θέσεως είναι οι συντεταγμένες του κινητού. Είναι συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t.*

# Στιγμιαία ταχύτητα κινητού στο χώρο

$$\vec{r}(\mathrm{t}) = (\,\mathrm{x(t)}, \mathrm{y(t)}, \mathrm{z(t)}\,) = \mathrm{x(t)}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{z(t)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

*Όπως στην περίπτωση κίνησης σε μια διάσταση*, η **στιγμιαία ταχύτητα του κινητού** στο χώρο υπολογίζεται ως η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(\mathrm{t})$ ως προς $t$.

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{x(t)}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}) + \frac{d}{dt}(\mathrm{y(t)}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) + \frac{d}{dt}\left(\mathrm{z(t)}\,\hat{\boldsymbol{k}}\right) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + x(t)\,\frac{d\hat{\boldsymbol{\imath}}}{dt}$$

$$+ \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + y(t)\,\frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}} + z(t)\,\frac{d\hat{\boldsymbol{k}}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

*Τα μοναδιαία διανύσματα είναι σταθερά, οπότε οι παράγωγοί τους είναι ο.*

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{\boldsymbol{dx(t)}}{\boldsymbol{dt}}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{dy(t)}}{\boldsymbol{dt}}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\boldsymbol{dz(t)}}{\boldsymbol{dt}}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{v_x}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{v_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{v_z}\hat{\boldsymbol{k}}$$

*Κάθε **συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της αντίστοιχης **συντεταγμένης του κινητού**.*

Το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

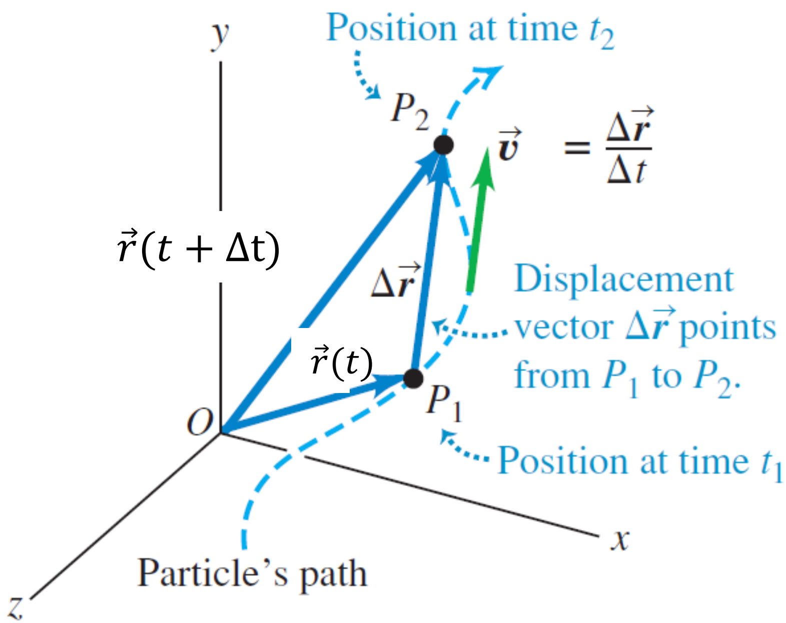
$$|\vec{v}| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

# Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στην τροχιά

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ισούται με το ρυθμό μεταβολής της θέσης του ($\Delta\vec{r}$). *Η διαφορά με την κίνηση σε μια διάσταση είναι ότι τόσο η θέση* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *όσο και η ταχύτητα* $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ *είναι διανύσματα*

$$\vec{\boldsymbol{P}}_{12} = \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{t+\Delta t} - \vec{\boldsymbol{r}}_{t}$$

**Διάνυσμα μετατόπισης**




$$= (x_2 - x_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y_2 - y_1)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z_2 - z_1)\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$* \ \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{\upsilon} \,//\, \Delta\vec{r}$$

Καθώς το Δt τείνει στο 0, τα σημεία P1 και P2 πλησιάζουν και το **διάνυσμα μετατόπισης** $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ τείνει να εφάπτεται στην τροχιά. Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας είναι παράλληλο στο $\Delta\vec{r}$ *. ***Επομένως σε κάθε σημείο της τροχιάς, το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στην τροχιά.***