

# ΦΥΣΙΚΗ Ι

## Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

### ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες
- Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Βαθμωτό Γινόμενο Τριών Διανυσμάτων

### ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Διανυσματική Φύση της Δύναμης
- Σύνθεση Δυνάμεων

### ΡΟΠΗ

- Η Έννοια της Ροπής
- Ροπή Πολλών Δυνάμεων
- Ζεύγος Δυνάμεων

# ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

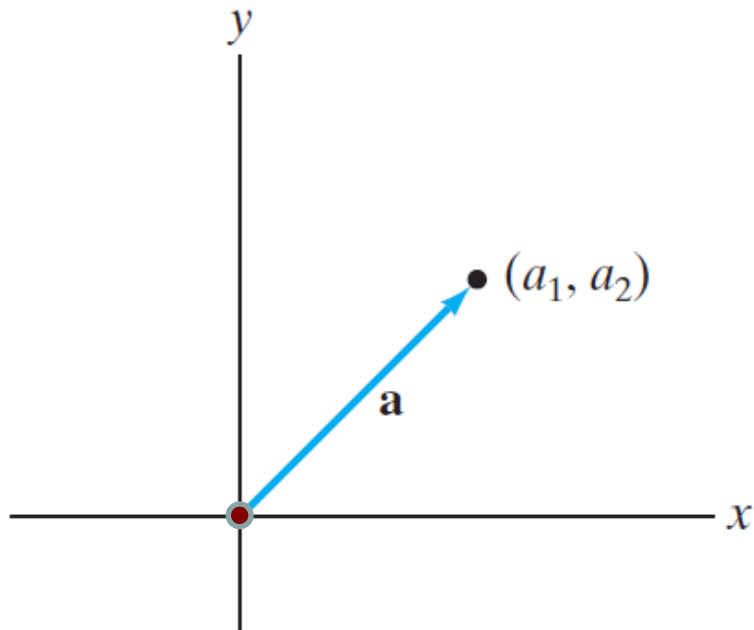
## ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ALONSO FINN	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
<b>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</b> Εσωτερικό & Εξωτερικό Γινόμενο	3.1 – 3.8	3.1 – 3.5	3.1 – 3.3	1.7 – 1.10
<b>ΔΥΝΑΜΕΙΣ</b> Διανυσματική Φύση	4.1, 4.2	4.1, 4.2	5.4	5.1
<b>ΡΟΠΗ</b>	4.3, 4.4	10.1-10.4	10.8, 11.6	10.1

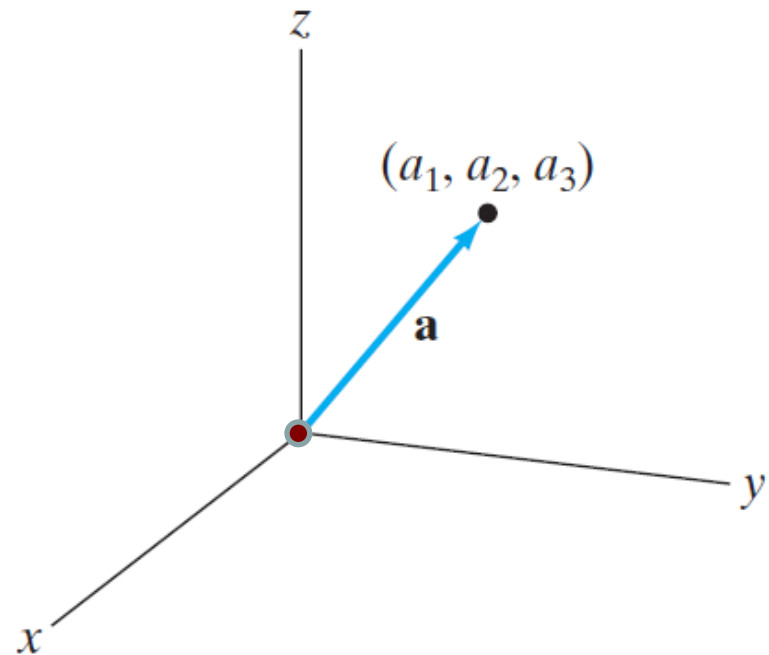
# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο  $(a_1, a_2)$  του διδιάστατου επιπέδου και στο σημείο  $(a_1, a_2, a_3)$  του τριδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

In  $\mathbf{R}^2$



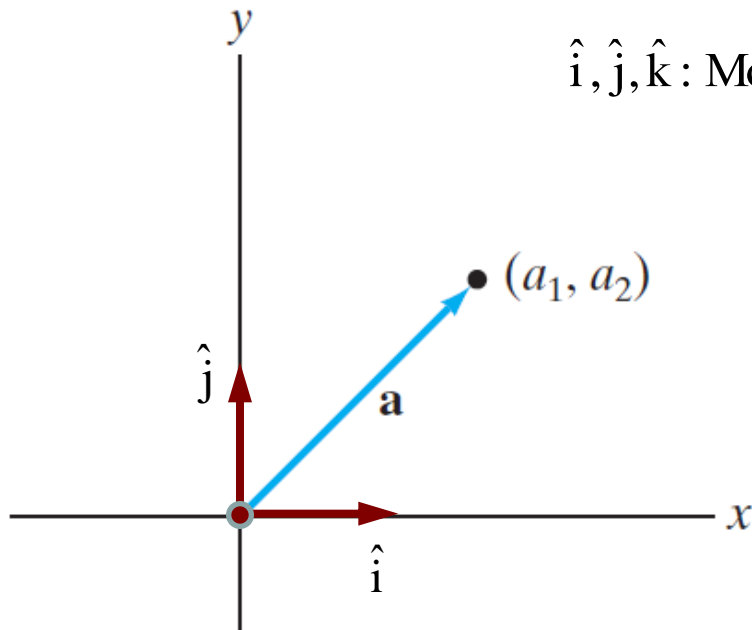
In  $\mathbf{R}^3$



# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο  $(a_1, a_2)$  του διδιάστατου επιπέδου και στο σημείο  $(a_1, a_2, a_3)$  του τριδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

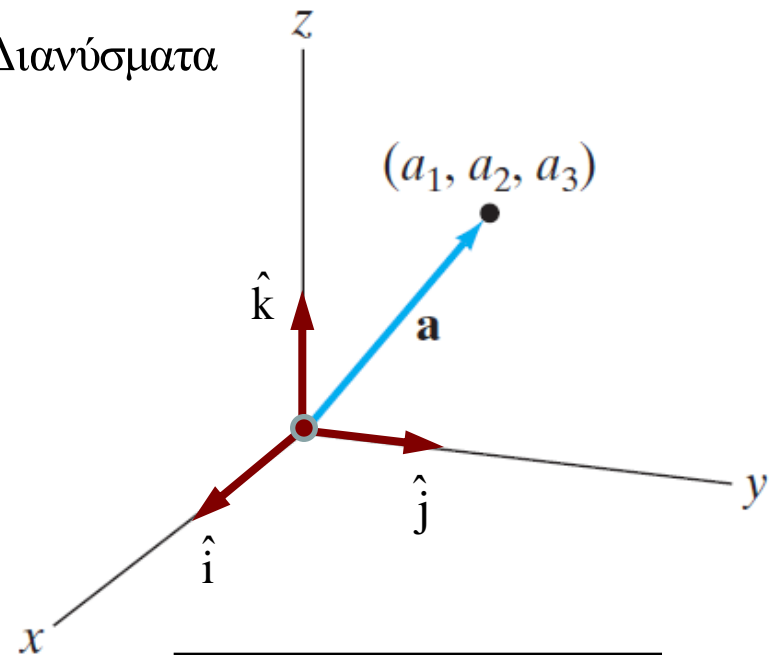
In  $\mathbf{R}^2$



$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ : Μοναδιαία Διανύσματα

In  $\mathbf{R}^3$

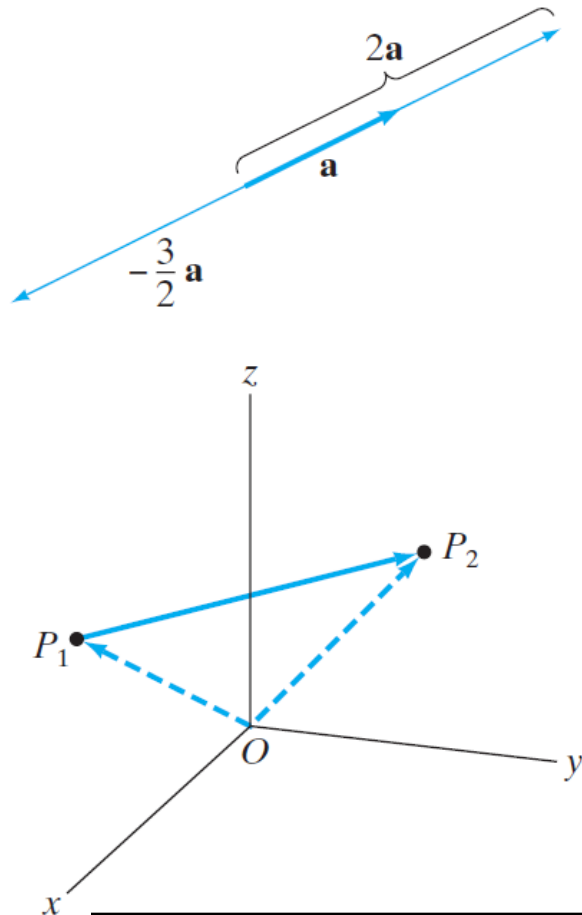


$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

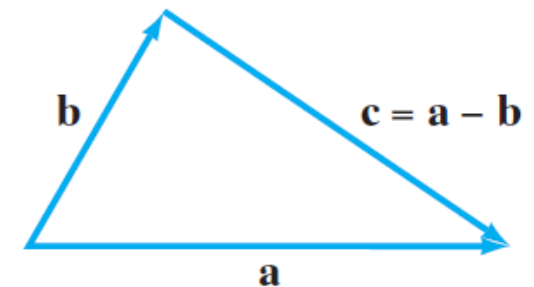
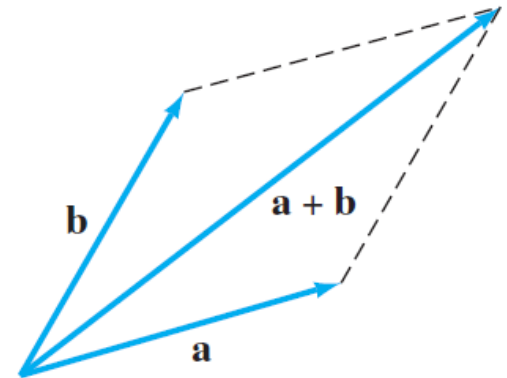
## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αριθμητικά Πολλαπλάσια



$$\vec{P}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Άθροισμα Διανυσμάτων



Διαφορά Διανυσμάτων

# ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για τα διανύσματα  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$  και  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$  του τριδιάστατου χώρου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

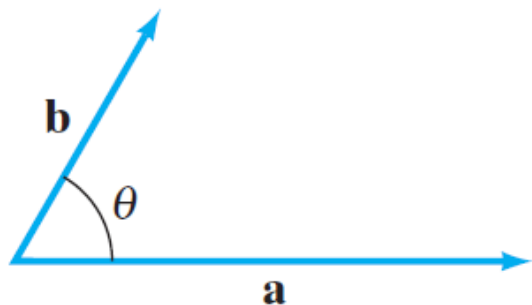
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ , and  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  if and only if  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ;
3.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ ;
4.  $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$ .

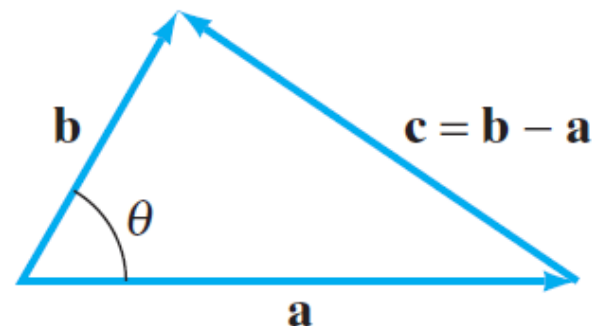
$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$$

# ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



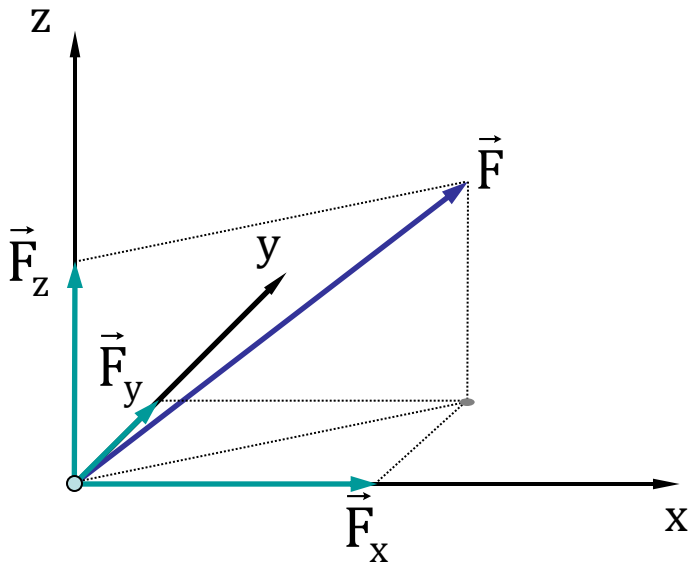
$$\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

**Δύναμη:** Διανυσματικό μέγεθος – Για τον καθορισμό της χρειάζεται το μέτρο της και η φορά της.

*Ο ακριβής ορισμός της δύναμης θα δοθεί σε συνδυασμό με τη δυναμική της κίνησης (Νόμοι του Νεύτωνα).*

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μια δύναμη  $F$  μπορεί να οριστεί πλήρως από τις τρεις συνιστώσες της  $F_x$ ,  $F_y$  και  $F_z$ :



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ : Μοναδιαία Διανύσματα

Μέτρο της Δύναμης:  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

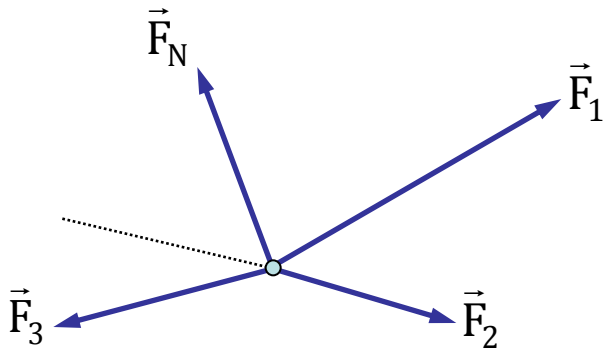
Μονάδα Μέτρησης (S.I.): **N** (Newton)



# ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

**Συντρέχουσες δυνάμεις:** Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο υλικό σημείο

**Συνισταμένη:** Το διανυσματικό άθροισμα όλων των συντρέχουσών δυνάμεων



$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{Nx} = \sum_{i=1}^N F_{ix}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{Ny} = \sum_{i=1}^N F_{iy}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{Nz} = \sum_{i=1}^N F_{iz}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} \quad \text{με} \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \quad \text{τα μοναδιαία διανύσματα}$$

# ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

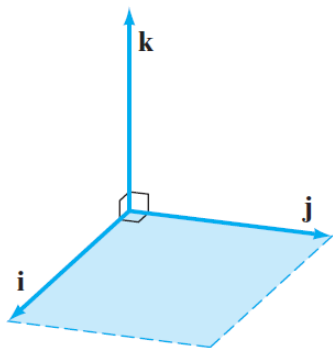
Για τα διανύσματα  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$  και  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$  του τριδιάστατου χώρου το εξωτερικό γινόμενο δίνεται μέσω της ορίζουσας:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

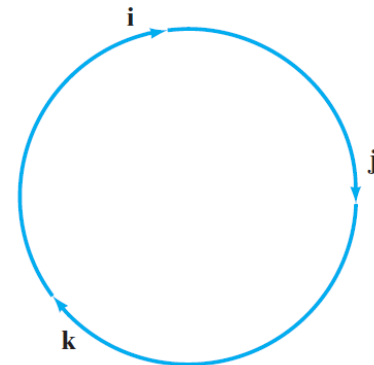
Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διανυσματικό μέγεθος.

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  (anticommutativity);
2.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$  (distributivity);
3.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  (distributivity);
4.  $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$ .



$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$



# ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας  $3 \times 3$  ισοδυναμεί με το άθροισμα τριών ορίζουσών  $2 \times 2$ :

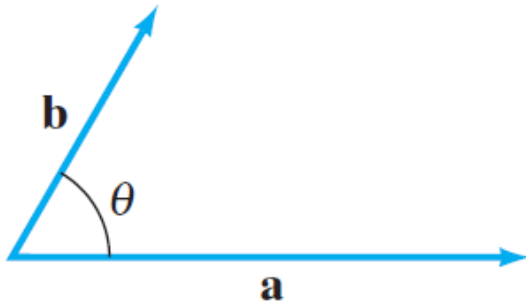
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας μπορεί να γίνει ως προς οποιαδήποτε σειρά ή στήλη με τον μνημονικό κανόνα των προσήμων:

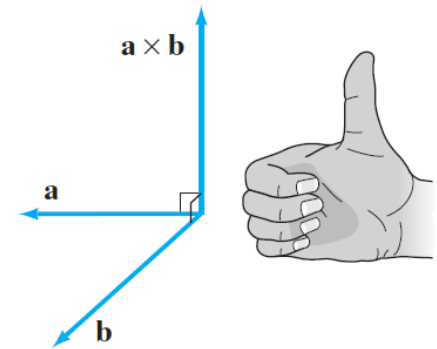
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Είναι προφανές πως ισχύει η γενίκευση, ότι μια ορίζουσα  $n$  τάξεως μπορεί να αντικατασταθεί με  $n$  ορίζουσες τάξεως  $(n-1)$ .

# ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$$



## ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

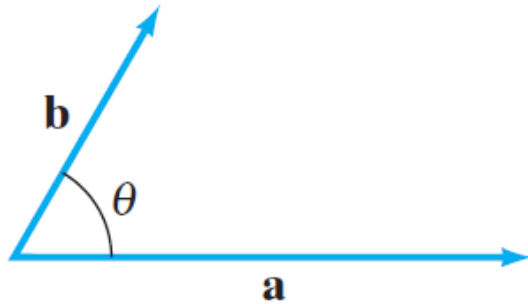


$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$



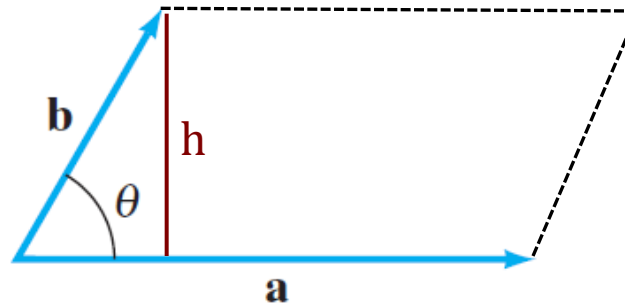
$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$$

# ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$$

Γεωμετρική σημασία  
του Εξωτερικού  
Γινομένου

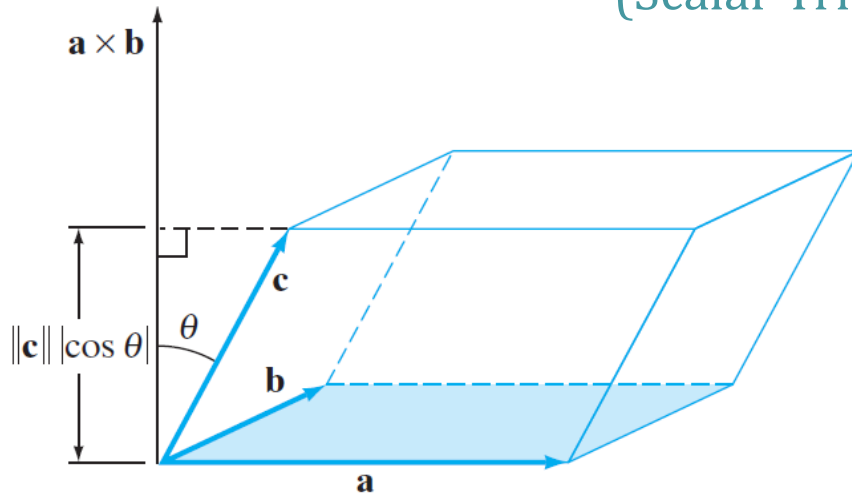


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta = |\vec{a}| (|\vec{b}| \sin\theta) = |\vec{a}| h = E$$

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το **εμβαδόν** του αντίστοιχου παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα.

# ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

(Scalar Triple Product)



Ορίζεται σαν το μεικτό γινόμενο:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

και είναι ένα **βαθμωτό** μέγεθος.

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

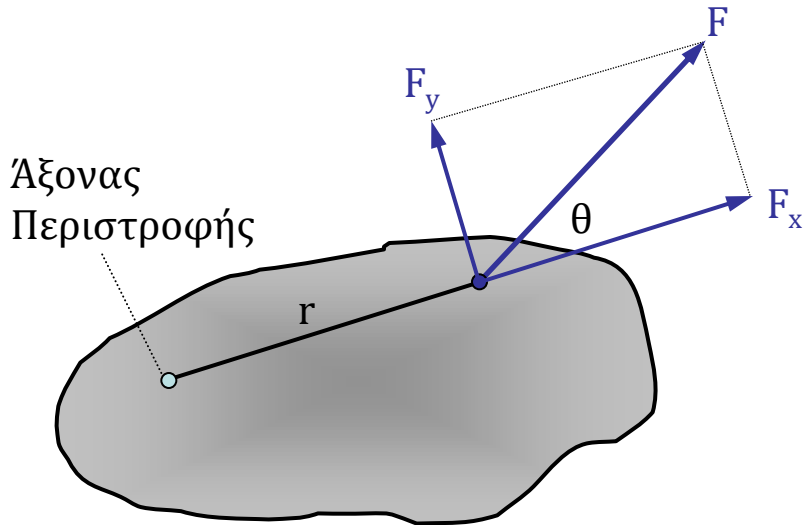
**Γεωμετρική σημασία του Τριπλού Γινομένου**

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos \theta = (|\vec{c}| \cos \theta) |\vec{a} \times \vec{b}| = (|\vec{c}| \cos \theta) E = V$$

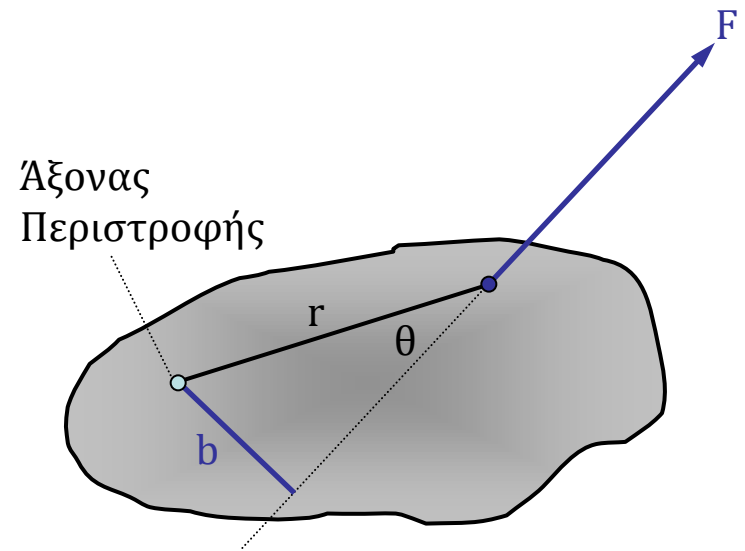
Το τριπλό γινόμενο διανυσμάτων ισούται με τον **όγκο** του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα.

# ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ροπή: Η ικανότητα μιας δύναμης  $F$  να θέτει σε περιστροφή ένα σώμα



$F_y$ : Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης στο διάστημα  $r$



$b$ : Η απόσταση του άξονα περιστροφής από το φορέα της δύναμης  $F$  (βραχίονας)

$$\tau = F_y r = [F \sin(\theta)] r$$

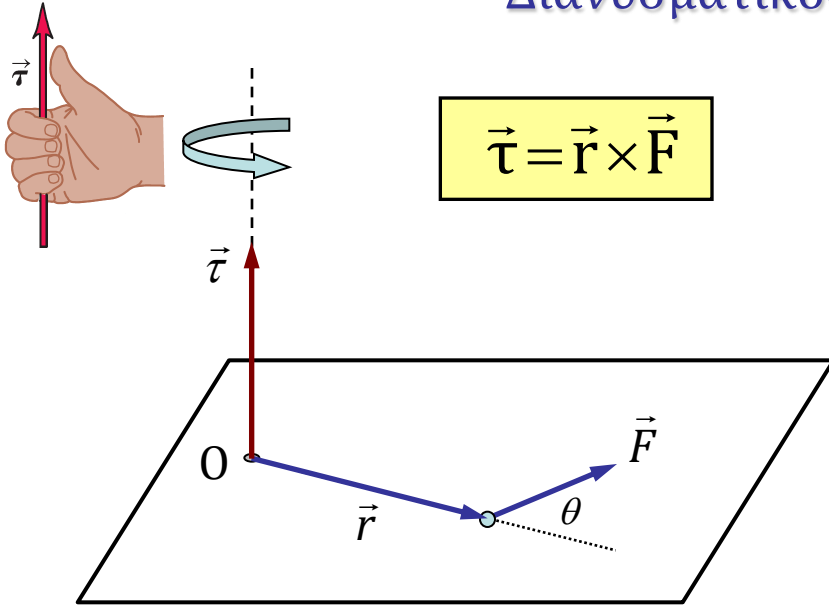
Μέτρο της ροπής  $\tau$

$$\tau = F b = F [r \sin(\theta)]$$

$$\tau = r F \sin(\theta)$$

# ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

## Διανυσματικός ορισμός της ροπής



**Μέτρο:**  $\tau = r F \sin(\theta)$

**Κατεύθυνση:** Κάθετη στο επίπεδο επιβατικής ακτίνας - δύναμης ( $r$ - $F$ )

**Φορά:** Καθοριζόμενη από τον κανόνα του αντίχειρα του δεξιού χεριού

**Μονάδα μέτρησης:** Nm (S.I.)

- Η ροπή δύναμης ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.
- Μετατόπιση της δύναμης κατά μήκος του άξονα εφαρμογής αφήνει αναλλοίωτη την ροπή της.
- Αλλαγή του σημείου αναφοράς αλλάζει την ροπή της δύναμης.



# ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Διανυσματικός ορισμός της ροπής

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ \vec{r} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}) \times (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & x_0 F_x \hat{i} \times \hat{i} + x_0 F_y \hat{i} \times \hat{j} + x_0 F_z \hat{i} \times \hat{k} \\ & + y_0 F_x \hat{j} \times \hat{i} + y_0 F_y \hat{j} \times \hat{j} + y_0 F_z \hat{j} \times \hat{k} \\ & + z_0 F_x \hat{k} \times \hat{i} + z_0 F_y \hat{k} \times \hat{j} + z_0 F_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|l|l|} \hline \hat{i} \times \hat{i} = 0 & \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{j} = 0 & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{k} = 0 & \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \\ \hline \end{array}$$

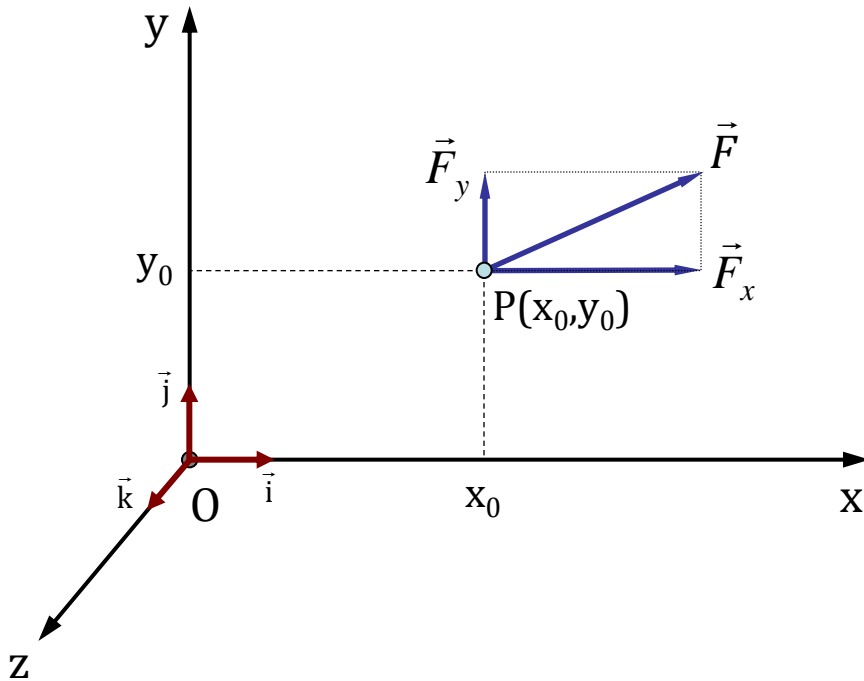
$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & (y_0 F_z - z_0 F_y) \hat{i} \\ & - (x_0 F_z - z_0 F_x) \hat{j} \\ & + (x_0 F_y - y_0 F_x) \hat{k} \end{aligned}$$

Γραφή σε μορφή ορίζουσας

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

# ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ειδική Περίπτωση: Υπολογισμός ροπής δύναμης που βρίσκεται στο επίπεδο XY



Συνιστώσες της  $F$ :  $F_x, F_y$

• Ροπή της  $F_y$ :  $+x_0 F_y$

• Ροπή της  $F_x$ :  $-y_0 F_x$

Συνολικό μέτρο ροπής:

$$\tau = x_0 F_y - y_0 F_x$$

με κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z.

Με βάση τον  
διανυσματικό  
ορισμό της ροπής

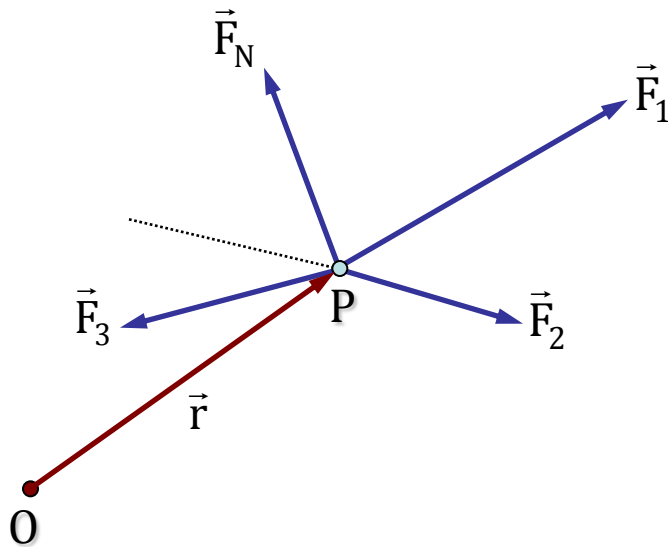
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x_0 F_y - y_0 F_x) \vec{k}$$

# ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Υπολογισμός ροπής πολλών δυνάμεων ως προς το σημείο O, όταν αυτές έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (συντρέχουσες)



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N$$

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_N \\ &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N) \\ &= \vec{r} \times \vec{R}\end{aligned}$$

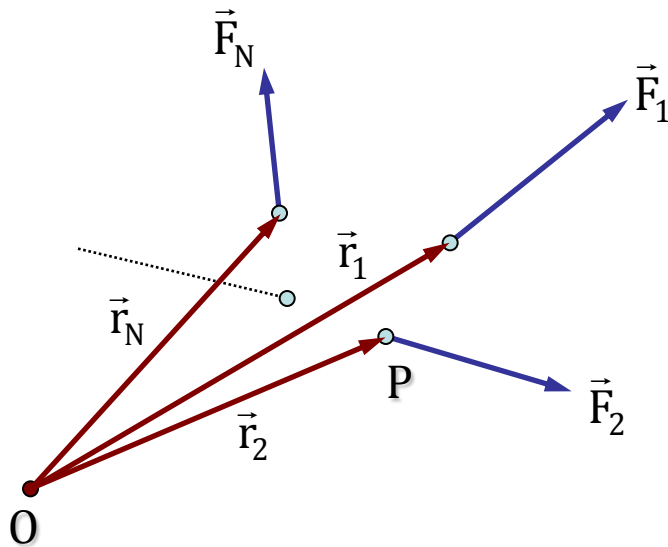
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$$

Η συνισταμένη δύναμη μπορεί να αντικαταστήσει ένα σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων σε ένα σώμα: *Επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα αναφορικά με μετατοπίσεις και περιστροφές.*

$\vec{R}$ : Συνισταμένη των συντρεχουσών

# ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

**Προσοχή!** Εάν οι δυνάμεις δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (δεν είναι συντρέχουσες) τότε η συνισταμένη τους δεν επιφέρει ισοδύναμα αποτελέσματα.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Επειδή κατά κανόνα τα διανύσματα  $\vec{R}$  και  $\vec{\tau}$  **δεν είναι κάθετα μεταξύ τους**, δεν διασφαλίζεται η ικανοποίηση της σχέσης

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$$

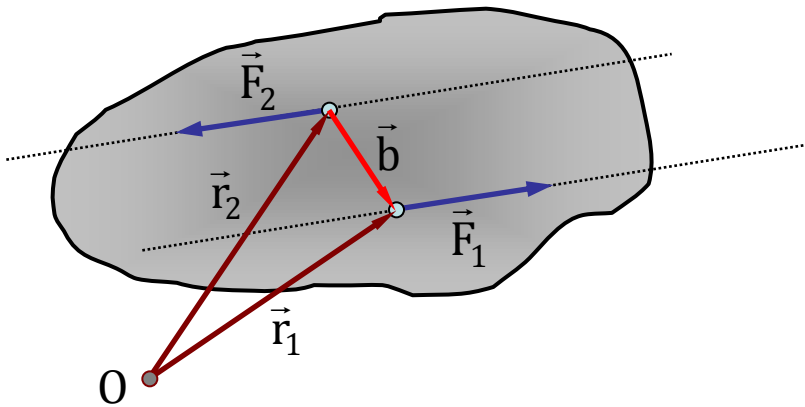
για κάποιο ζητούμενο  $\vec{r}$ .

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \text{Μετατόπιση}$$

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i \quad \Rightarrow \quad \text{Περιστροφή}$$

# ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

**Ζεύγος Δυνάμεων:** Σύστημα δύο ίσων κατά μέτρο αλλά με αντίθετη φορά δυνάμεων με παράλληλες διευθύνσεις.



- Η ροπή του ζεύγους είναι **ανεξάρτητη** από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η ροπή.
- Δεν μπορεί να βρεθεί **μια δύναμη** που να αντικαθιστά το ζεύγος δυνάμεων.

Συνισταμένη Δύναμη

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Άρα, το ζεύγος δυνάμεων δεν προκαλεί μεταφορική κίνηση.

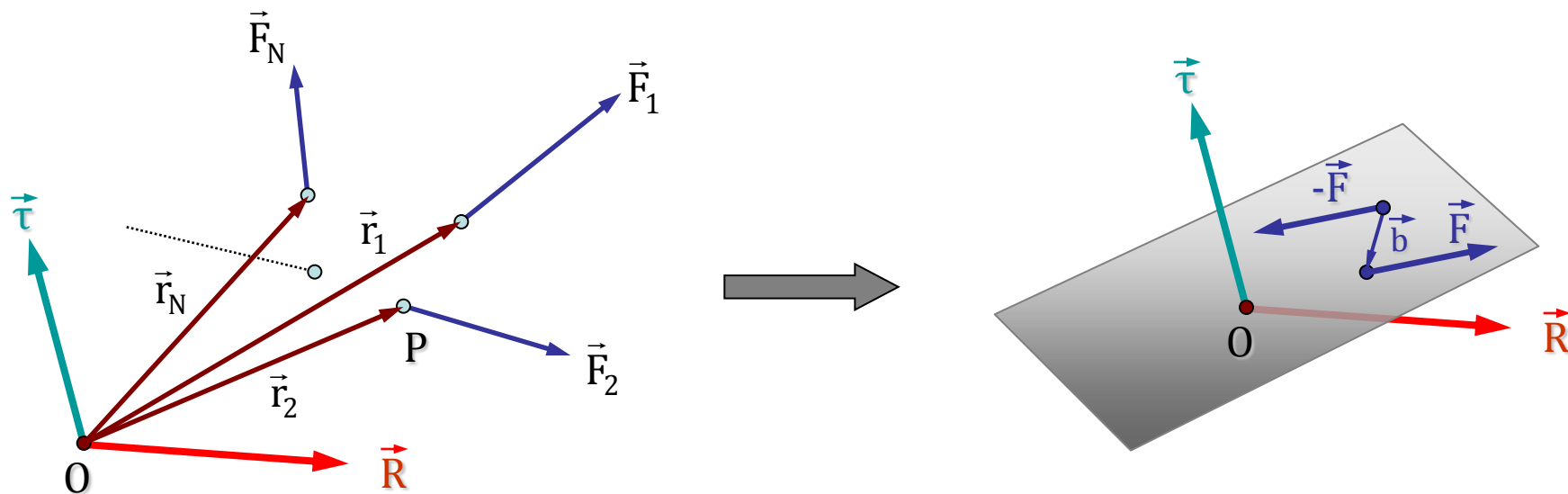
Ασκούμενη Ροπή

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \\ &= \vec{b} \times \vec{F}_1\end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}_1$$

# ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ένα σύστημα πολλών δυνάμεων μπορεί πάντα να αντικατασταθεί με μια δύναμη και ένα ζεύγος δυνάμεων.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{b} \times \vec{F}$$

- Η συνισταμένη δύναμη R διέρχεται από το σημείο υπολογισμού της ροπής O, ώστε να μην συνεισφέρει στην ροπή.

- Το ζεύγος δυνάμεων τοποθετείται σε επίπεδο κάθετο στην συνολική ροπή  $\tau$ .