ΕΝΟΤΗΤΑ 8 : ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

- Ορισμός και κατηγορίες ρευστών
- Στατική & Δυναμική Ρευστών

1. ΙΔΕΑΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

- Ορισμός
- Γραμμή ροής & συνάρτηση ροής για ιδεατά ρευστά

2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

- Απόδειξη
- Εφαρμογή

3. ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

- Απόδειξη
- Εφαρμογή

4. ΡΟΟΜΕΤΡΟ VENTOURI

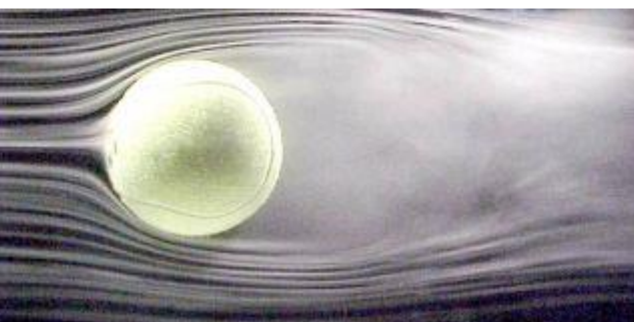
5. ΣΩΛΗΝΑΣ PITOT

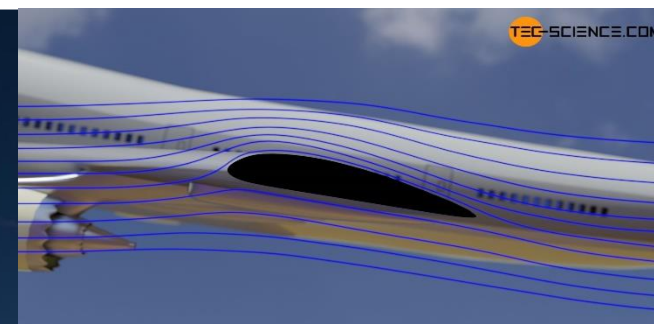
Δυναμική Ρευστών

Δυναμική Ρευστών (Ρευστοδυναμική): *Μελετά τη συμπεριφορά των ρευστών σε κίνηση.*

Τα ρευστά συνήθως βρίσκονται σε συνεχή κίνηση. Οι μηχανικοί καλούνται να μελετήσουν τις συνέπειες της κίνησης των ρευστών ώστε:

- Οι κατασκευές να μπορούν να αντέξουν τις συνέπειες πιέσεων λόγω της κίνησης ρευστών υπό ακραίες συνθήκες.
- Να εκμεταλλευτούν προς όφελος της ανθρωπότητας τα φαινόμενα που συνοδεύουν την κίνηση ρευστών.







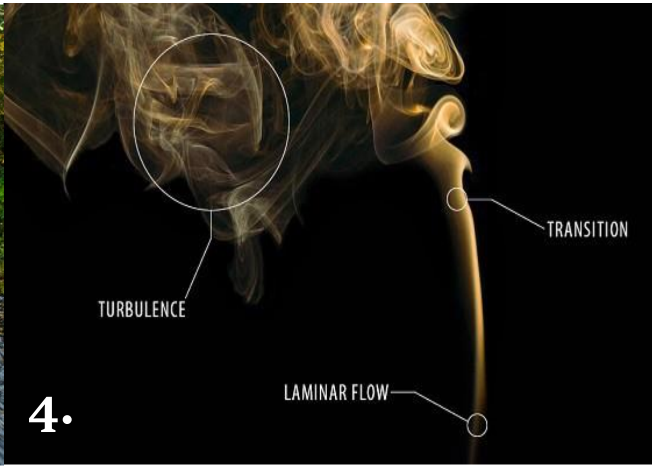
1. Ιδεατά Ρευστά

Τα **πραγματικά ρευστά** περιγράφονται από πολύπλοκες εξισώσεις που επιλύονται με Η/Υ. Παράδειγμα: *αριθμητική πρόγνωση καιρού*. Πολλές από τις ιδιότητές τους γίνονται κατανοητές με τη βοήθεια εξιδανικευμένων προτύπων **ιδεατών ρευστών**.

1. **Ασυμπιεστότητα** : σταθερή πυκνότητα ρευστού (ομογενές) ⇨ $\rho(x, y, z, t) = \rho_0$
2. **Χωρίς ιξώδες (no viscous drag)**: απουσία εσωτερικής τριβής μεταξύ των στρώσεων του ρευστού. Το ιξώδες αντιπροσωπεύει την αντίσταση ενός ρευστού στην κίνηση.
3. **Αστρόβιλη ροή** : δεν παρατηρείται περιστροφή τμημάτων του ρευστού.
4. **Μόνιμη ή στρωτή ροή (laminar)**: η ταχύτητα του κινούμενου ρευστού σε οποιοδήποτε σημείο του δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο ⇨ $\vec{\upsilon}(x, y, z, t) = \vec{\upsilon}(x, y, z)$. Απότομη μεταβολή ταχύτητας ή εμπόδια οδηγούν στη μετάβαση σε **τυρβώδη ροή**.

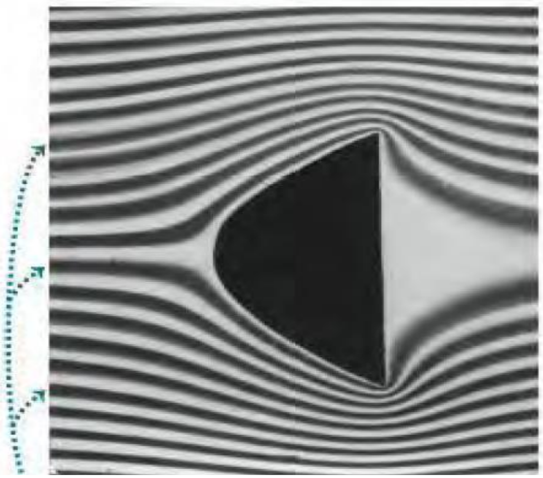

2.


3.



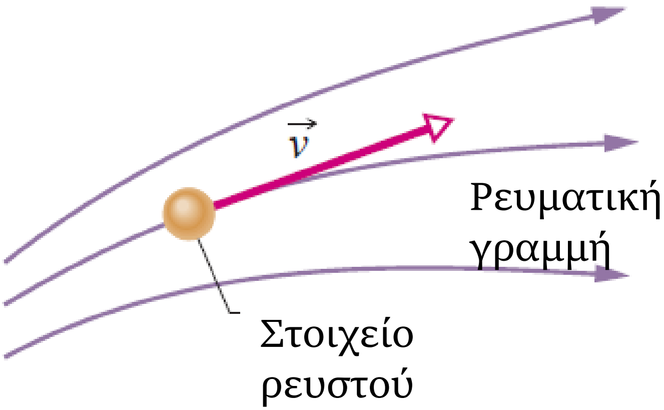
4.

1. Γραμμές ροής & ρευματικές γραμμές



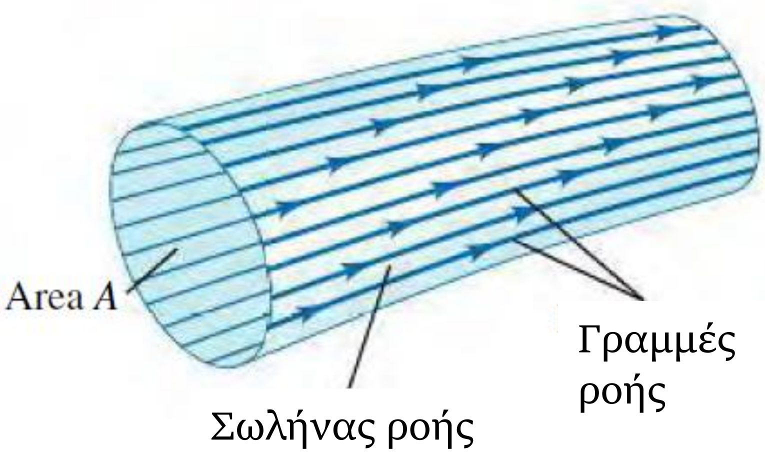
Η χρήση χρωματισμένου υγρού αποκαλύπτει τις γραμμές ροής.

*Η διπλανή ροή είναι **στρωτή** (laminar).*



Γραμμή ροής (flow line) είναι η διαδρομή που ακολουθεί ένα σωμάτιο του ρευστού. *Σε σταθερή/μόνιμη ροή η εικόνα των γραμμών ροών δεν αλλάζει.*

Ρευματική γραμμή (streamline) είναι μια καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας η εφαπτομένη συμπίπτει με τη διεύθυνση της ταχύτητας του ρευστού.

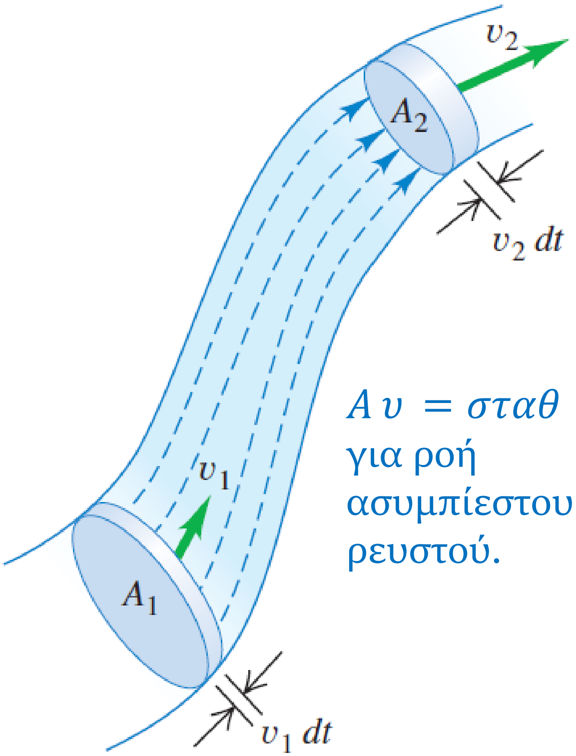


Μόνο σε μόνιμη/στρωτή ροή οι **γραμμές ροής συμπίπτουν με τις ρευματικές γραμμές**. Θα εξετάσουμε στρωτές ροές.

Σωλήνας ροής: το σύνολο των γραμμών ροής οι οποίες διαπερούν μια διατομή Α και σχηματίζουν μια «φλέβα».

Σε στρωτή ροή οι γραμμές ροής δεν μπορούν να τέμνουν τον σωλήνα ροής

2. Εξίσωση συνέχειας



$A\,\upsilon\ = \sigma\tau\alpha\theta$ για ροή ασυμπίεστου ρευστού.

Θεωρούμε ένα *σωλήνα ροής* που ξεκινά από μια διατομή A_1 και καταλήγει γενικά σε διατομή A_2.

Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt, μόρια του ρευστού ακολουθούν τις γραμμές ροής και εισρέουν (εκρέουν) μέσω της Α1 (Α2) καλύπτοντας απόσταση $\Delta x_1 = \upsilon_1\ \Delta t$ ($\Delta x_2 = \upsilon_2\ \Delta t$). Σχηματίζονται όγκοι εισροής $\Delta V_1 = A_1 \upsilon_1 \Delta t$ και εκροής $\Delta V_2 = A_2 \upsilon_2 \Delta t$.

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \boldsymbol{\Delta x_1} = \rho_1 A_1 \boldsymbol{\upsilon_1 \Delta t}$$

Μάζα που εισρέει από την διατομή Α1 σε χρόνο Δt

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 \boldsymbol{\Delta x_2} = \rho_2 A_2 \boldsymbol{\upsilon_2 \Delta t}$$

Μάζα που εκρέει από την διατομή Α2 σε χρόνο Δt

Διατήρηση μάζας: Από τον *ορισμό του σωλήνα ροής*, σε *μόνιμη ροή* οι γραμμές ροής δεν διασχίζουν τα τοιχώματά του. *Η μάζα ρευστού δεν μεταβάλλεται κατά τη ροή του.*

Σε σωλήνα ροής $\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2$

$$\boxed{\rho\, A\, \upsilon\ = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

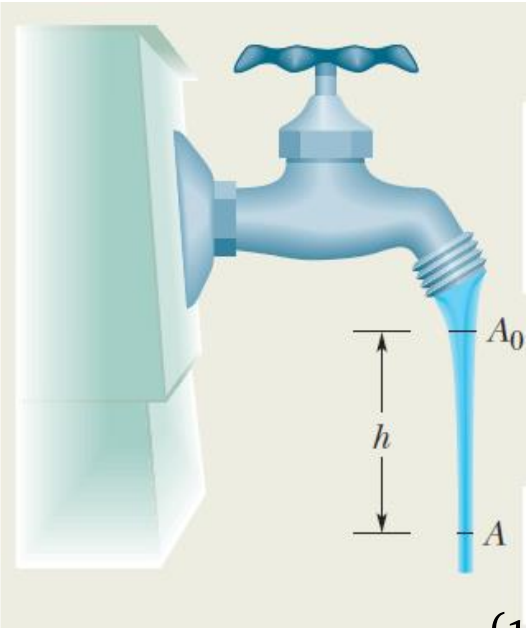
Γενική μορφή εξίσωσης συνέχειας συμπιεστού ρευστού

Ασυμπίεστο ρευστό

$$\boxed{A\,\upsilon\ = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

Εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστου ρευστού

2. Εξίσωση συνέχειας: Παράδειγμα



Εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστου ρευστού

$$A_0 \upsilon_0 = A\upsilon \quad (\mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2gh}$$

Λόγω του πεδίου βαρύτητας

$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh} \qquad (\mathbf{2})$$

$$(1), (2) \Rightarrow \quad A = A_0 \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}} < A_0$$

Παροχή όγκου: $\dfrac{dV}{dt} = A\upsilon$

Καθώς το μέλι πέφτει, η ταχύτητα ροής αυξάνεται...

... και η διατομή της ροής μειώνεται.

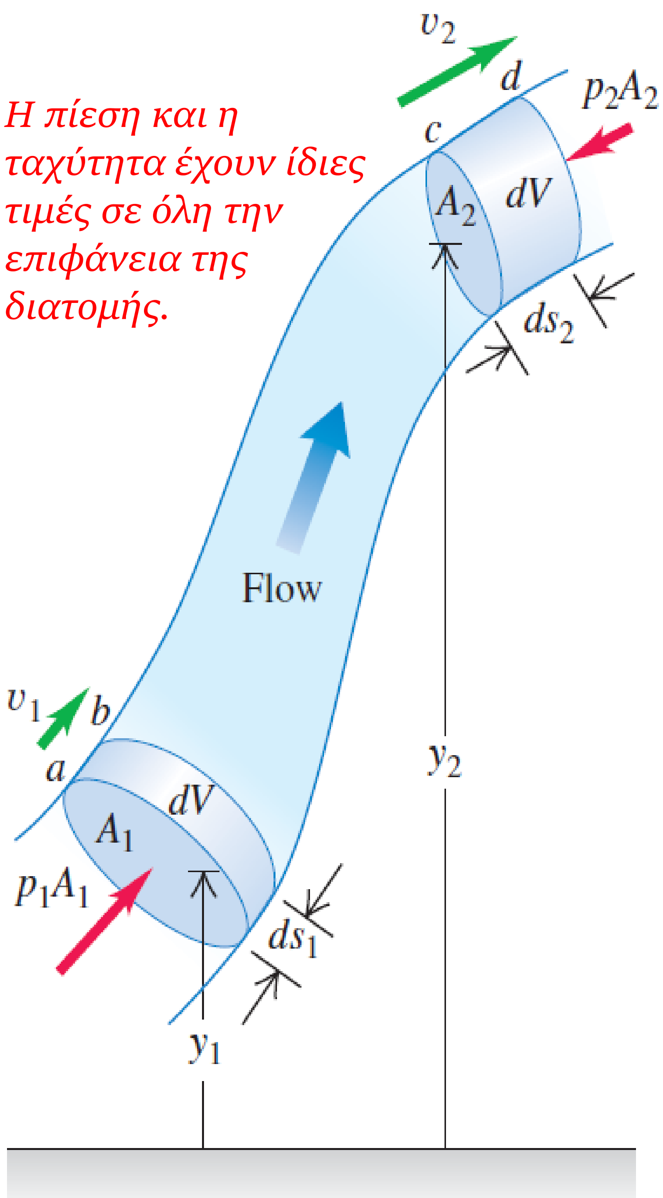
Η παροχή του ρευστού $\frac{dV}{dt} = A\upsilon$ παραμένει σταθερή.

Η παροχή όγκου, δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο ο όγκος του ρευστού διέρχεται από μια διατομή Α του σωλήνα, διατηρείται σταθερός.

Για να παραμείνει σταθερή η παροχή όγκου, όταν η διατομή του σωλήνα ροής μειώνεται τότε η ταχύτητα ροής αυξάνεται και αντιστρόφως. Παράδειγμα ποτάμι.

3. Εξίσωση Bernoulli

Η πίεση και η ταχύτητα έχουν ίδιες τιμές σε όλη την επιφάνεια της διατομής.



$$A\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Η εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστου ρευστού υποδεικνύει ότι η ταχύτητά του μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η διατομή του σωλήνα ροής.

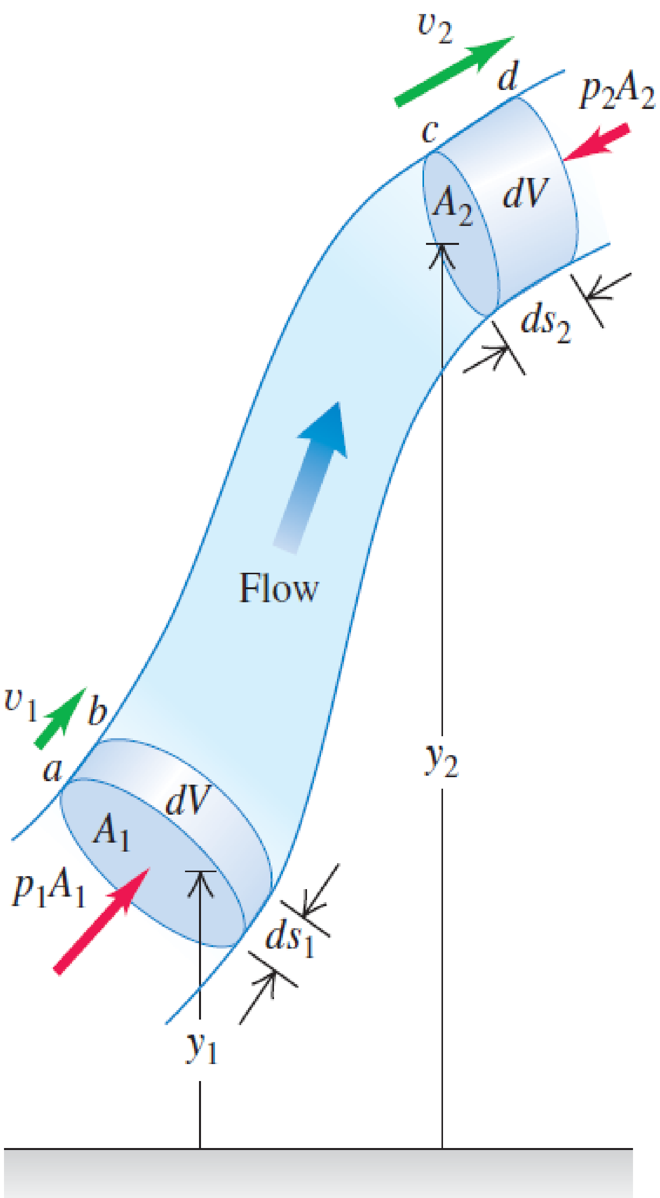
Θα δείξουμε ότι μεταβάλλεται και η πίεση, όχι μόνο εξαιτίας της μεταβολής του ύψους (στατική θεώρηση) αλλά λόγω της μεταβολής ταχύτητας του ρευστού.

Θεωρούμε στοιχείο του **ιδεατού** ρευστού σε τμήμα του σωλήνα ροής, το οποίο σε χρόνο Δt μετατοπίζεται από από τη θέση a-c (μεταξύ διατομών a & c) στη θέση b-d (μεταξύ b & d).

Η μετατόπιση ισοδυναμεί με μια συνολική **ανύψωση** του ρευστού μεταξύ διατομών a & b με μάζα $\Delta m = \rho\Delta V = \rho\, A_1 \upsilon_1$(ύψος y_1) στη θέση μεταξύ c & d (ύψος y_2).

Εξίσωση συνέχειας: $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$
Ο όγκος ρευστού που διέρχεται από την διατομή A1 σε χρόνο Δt είναι ίσος με αυτόν που διέρχεται από την A2.

3. Εξίσωση Bernoulli



Θεώρημα έργου – ενέργειας: *Το έργο που παράγεται επί ενός σώματος ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας*.

$$W_{total} = K_{t+\Delta t} - K_t = \Delta K \qquad (\mathbf{3})$$

Μεταβολή κινητικής ενέργειας

$$K_t = K_{a-b} + K_{b-c} \qquad K_{t+dt} = K_{b-c} + K_{c-d}$$

$$\Delta K = K_{b-c} + K_{c-d} - K_{a-b} - K_{b-c} = K_{c-d} - K_{a-b}$$

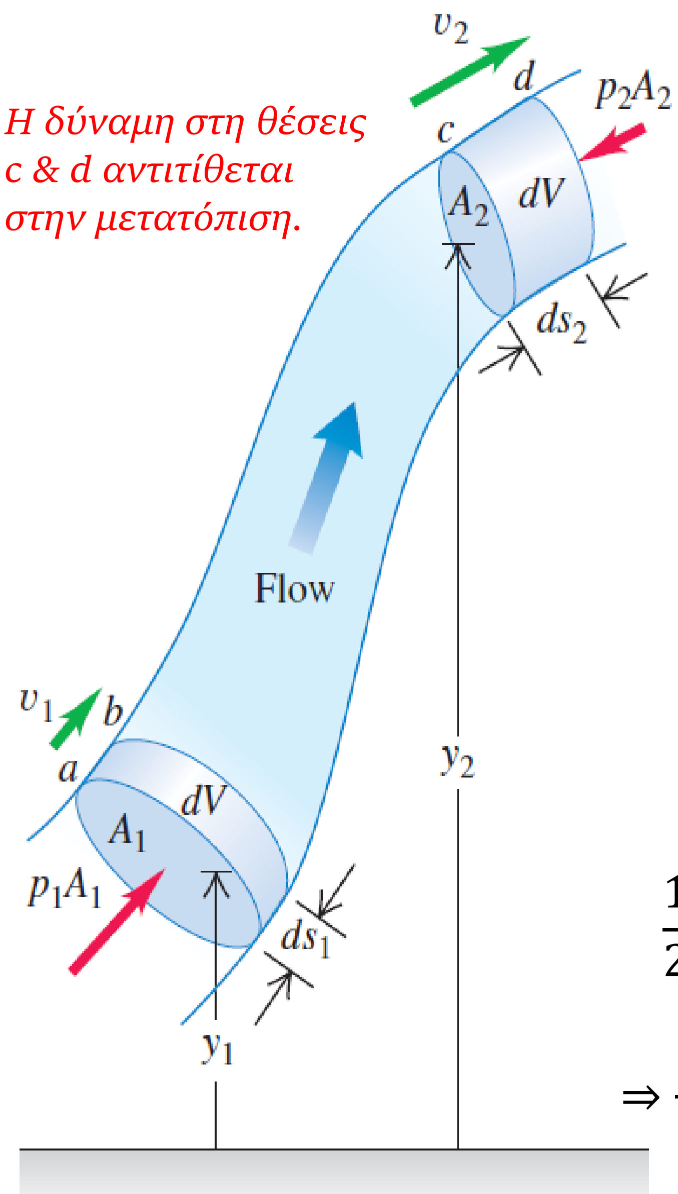
$$= \frac{1}{2}(dm)v_2^2 - \frac{1}{2}(dm)v_1^2 \qquad (\mathbf{4})$$

Επειδή η ροή είναι μόνιμη, η κινητική ενέργεια στο τμήμα του ρευστού “*b-c*” παραμένει σταθερή στο χρονικό διάστημα [*t, t+dt*].

Θα μπορούσε να το δείξει αυτό κάποιος ‘τεμαχίζοντας’ το τμήμα αυτό σε μικρά dm.

3. Εξίσωση Bernoulli

Η δύναμη στη θέσεις c & d αντιτίθεται στην μετατόπιση.



Συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο του ρευστού από το περιβάλλον κατά την μετατόπιση (a-c ⇨ b-d):

*Η μετατόπιση του στοιχείου ισοδυναμεί με ανύψωση της μάζας dm από την a-b στη θέση c-d. Σε **μόνιμη ροή** οι ιδιότητες του ρευστού στο τμήμα b-c δεν αλλάζουν.*

Βαρυτική δύναμη:

$$W_g = -(dm)\, g\, (y_2 - y_1) \quad \mathbf{(5)}$$

Πίεση από το περιβάλλον ρευστό:

$$W_p = p_1 A_1 \mathrm{d}s_1 - p_2 A_2 \mathrm{d}s_2 = p_1 dV - p_2 dV = (p_1 - p_2) dV \quad \mathbf{(6)}$$

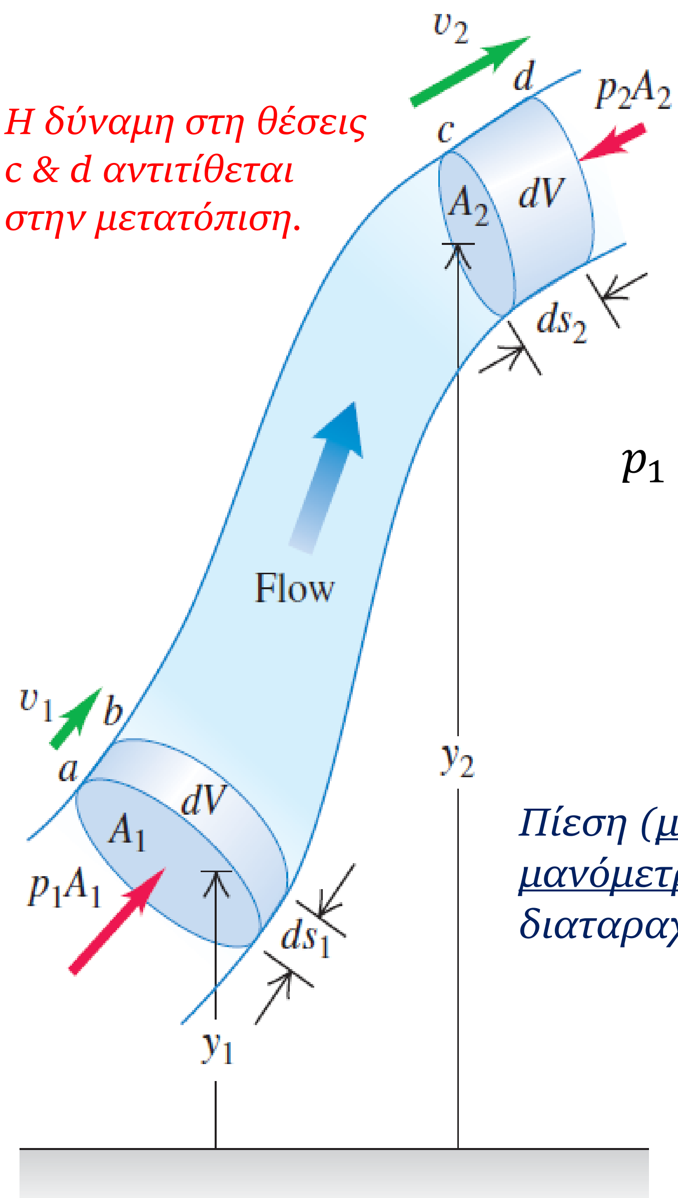
Εφαρμογή θεωρήματος έργου-ενέργειας

(3) - (6) ⇒

$$\frac{1}{2}(dm)v_2^2 - \frac{1}{2}(dm)v_1^2 = -(dm)g\,(y_2 - y_1) + (p_1 - p_2)dV$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(dm)v_2^2 - \frac{1}{2}(dm)v_1^2 = -(dm)g\,(y_2 - y_1) + (p_1 - p_2)\frac{dm}{\rho}$$

3. Εξίσωση Bernoulli



Η δύναμη στη θέσεις c & d αντιτίθεται στην μετατόπιση.

Μεταβολή πίεσης λόγω αλλαγής ταχύτητας

Μεταβολή πίεσης λόγω βάρος ρευστού και διαφορά ύψους στα άκρα.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)$$

Δεν ισχύει μόνο για τα άκρα του σωλήνα αλλά και για οποιαδήποτε σημεία 1 και 2 του ρευστού

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

Ύψος στοιχείου ρευστού πάνω από κάποιο σημείο αναφοράς

$$\boxed{\boldsymbol{p} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho\upsilon^2} + \boldsymbol{\rho g y} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}.}$$

Πίεση (μετριέται με μανόμετρο, αρκεί να μην διαταραχθεί η ροή)

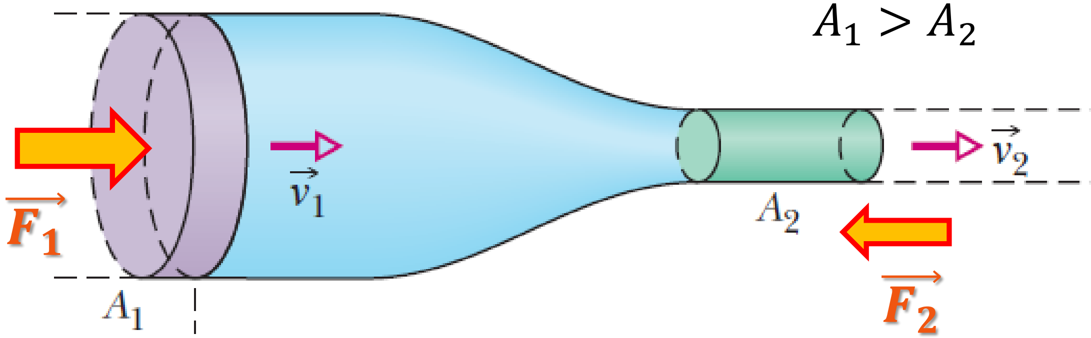
Δυναμική πίεση

Υδροστατική πίεση

Εξίσωση Bernoulli: “Η ολική πίεση παραμένει σταθερή κατά μήκος ενός σωλήνα ροής.”
Ισχύει μόνο για στρωτή ροή, ασυμπίεστου υγρού χωρίς ιξώδες!

3. Εξίσωση Bernoulli: Διερεύνηση

Οριζόντιος σωλήνας μεταβλητής διατομής



$A_1 > A_2$

Ασυμπίεστο ρευστό ρέει στον σωλήνα.

$$\mathrm{F}_1 = A_1 p_1 > A_2 p_2 = F_2$$

Ασκείται συνισταμένη δύναμη προς τα εμπρός.

Εξίσωση συνέχειας ασυμπίεστου υγρού

$$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} \upsilon_1$$

Εξίσωση Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{\upsilon_2^2} + \rho g h$$

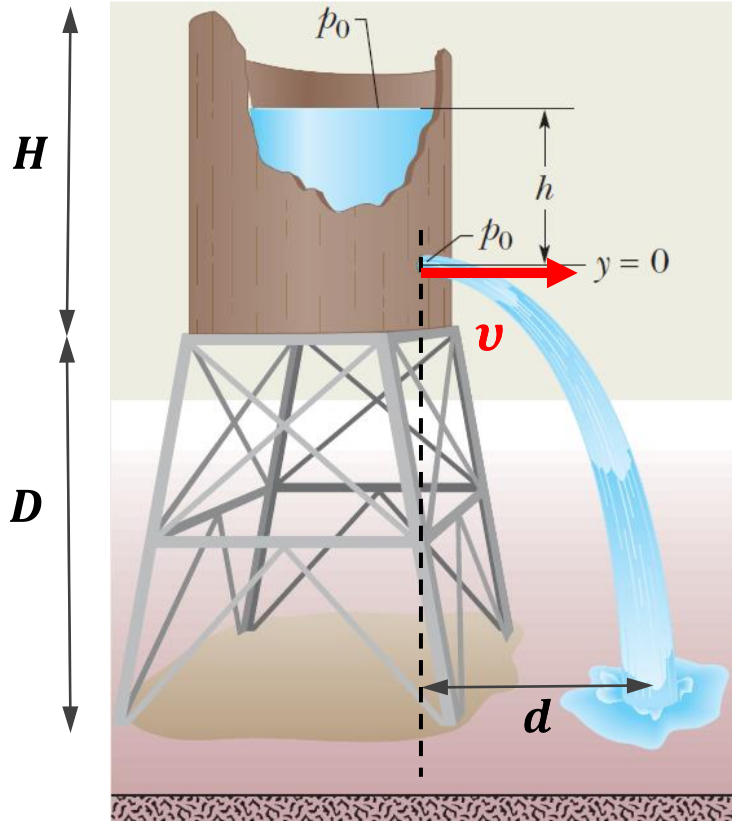
$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 \underbrace{\left\{ \mathbf{-1} + \left(\frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{A_2}} \right)^{\mathbf{2}} \right\}}_{> \mathbf{0}} \Rightarrow p_1 > p_2$$

Επομένως ισχύει $\upsilon_2 > \upsilon_1 \,\&\, p_2 < p_1$

Στοιχείο ιδανικού ρευστού που ρέει σε οριζόντιο σωλήνα που **στενεύει** πρέπει να **επιταχύνει**. Θα πρέπει να κινείται σε περιοχή **χαμηλότερης στατικής πίεσης**, ώστε να υπάρχει **συνισταμένη δύναμη προς τα εμπρός** που το επιταχύνει.

3. Εξίσωση Bernoulli: Εφαρμογή

Νερό διαρρέει από οπή σε δεξαμενή. Η οπή βρίσκεται απόσταση h κάτω από την επιφάνεια του νερού. Το ύψος της δεξαμενής είναι H και η βάση της βρίσκεται σε ύψος D. Να βρεθούν i) η ταχύτητα εκροής του νερού υ και ii) ο χρόνος πτώσης έως το έδαφος.



Διατομή δεξαμενής: A Διατομή οπής: α

Θεωρούμε ότι το νερό ρέει προς τα κάτω σε ένα σωλήνα ροής (δεξαμενή) με διατομή εισόδου A (ταχύτητα υ_0) και διατομή εξόδου α (ταχύτητα υ).

Επίσης η (στατική) πίεση στην επιφάνεια του νερού και στην οπή είναι p_0. Και τα δύο σημεία σε ατμοσφαιρική πίεση.

i) Υπολογισμός ταχύτητα εκροής

Εξίσωση συνέχειας: $A\,\upsilon_0 = \alpha\upsilon \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{\alpha}{\mathrm{A}}\upsilon$ **(7)**

Επειδή $\mathrm{A} >>> \alpha \Rightarrow \upsilon_0 \to 0$ *Ρευστό σχεδόν ακίνητο στο επάνω μέρος της δεξαμενής.*

Εξίσωση Bernoulli: $p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ **(8)**

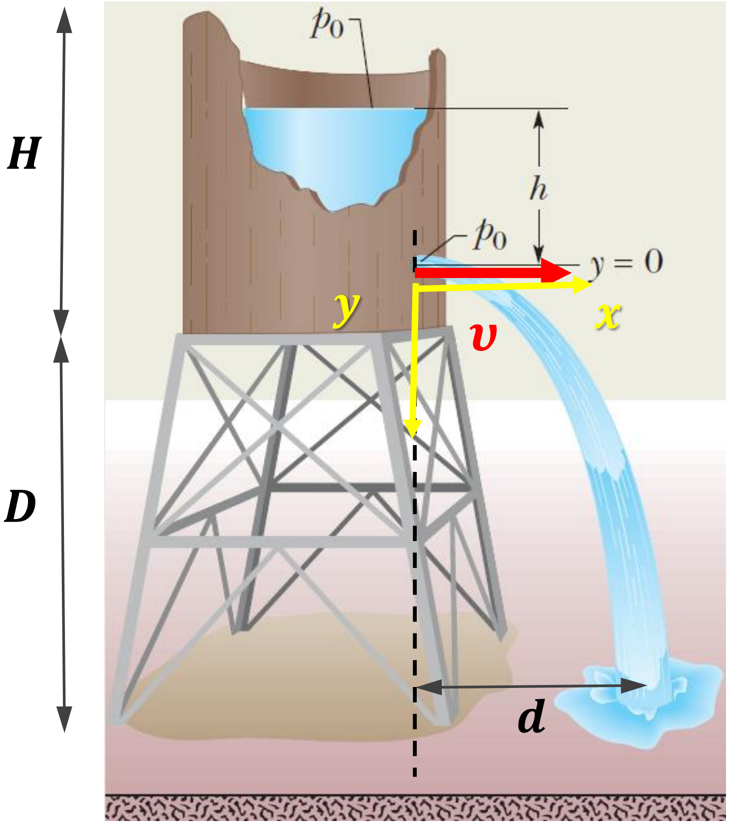
Επίπεδο αναφοράς με μηδενικό ύψος (y=0) είναι αυτό της οπής.

Είσοδος: επιφάνεια *Έξοδος: οπή*

3. Εξίσωση Bernoulli: Εφαρμογή

Από (7), (8) για $\quad A >>> \alpha \quad \Rightarrow \upsilon_0 \to 0$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}}$$



ii) Υπολογισμός χρόνου πτώσης τ & d

Μελέτη στη διεύθυνση y

$$mg = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^v dv' = g\int_0^t dt' \Rightarrow v = gt$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = gt \Rightarrow \int_0^y dy' = g\int_0^t t'\,dt' \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2$$

Επομένως $\quad \boxed{\tau = \sqrt{\frac{2(\mathrm{H} - h + D)}{g}}}$

Μελέτη στη διεύθυνση x

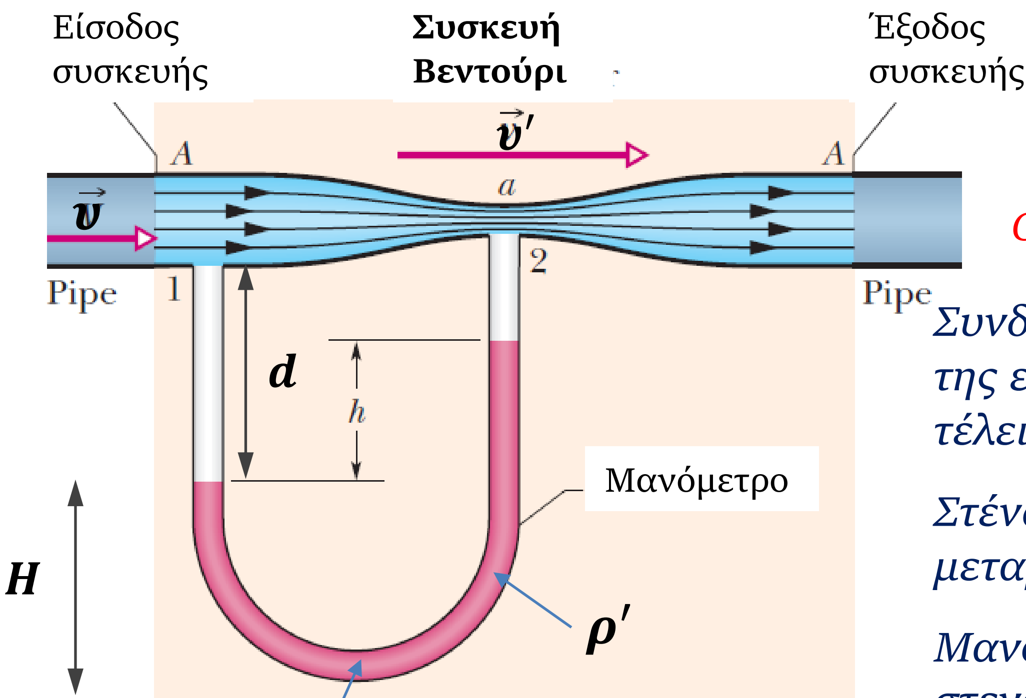
$$0 = m\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \int_\upsilon^u du' = 0 \Rightarrow u = \upsilon \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \upsilon$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx' = \upsilon\int_0^t dt' \Rightarrow x = \upsilon t$$

Επομένως $\quad d = \upsilon\tau \Rightarrow \quad \boxed{d = 2\sqrt{h(H - h + D)}}$

Αν $D = 0 \Rightarrow d = 2\sqrt{h(H - h)}$

4. Ροόμετρο Ventouri (Βεντουρίμετρο)



Συσκευή μέτρησης της ταχύτητας ρευστού (υ) σε σωλήνα διατομής Α.

Οριζόντιος σωλήνας ($y_1 = y_2$)

Συνδέεται σε 2 σημεία στον σωλήνα. Η διατομή της εισόδου & εξόδου της συσκευής εφαρμόζει τέλεια στην διατομή του σωλήνα.

Στένωμα της συσκευής με διατομή α αναγκάζει μεταβολή της ταχύτητας ροής σε υ΄.

Μανόμετρο συνδέει το πλατύτερο με το στενότερο σημείο για μέτρηση πίεσης.

Η διαφορά στατικής πίεσης στα σημεία 1 & 2 προκαλεί διαφορά στο ύψος του ρευστού στις στήλες

Εξίσωση συνέχειας: $A\,\upsilon = \alpha \upsilon'$ **(9)**

Εξίσωση Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon'^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(\upsilon'^2 - \upsilon^2)$ **(10)**

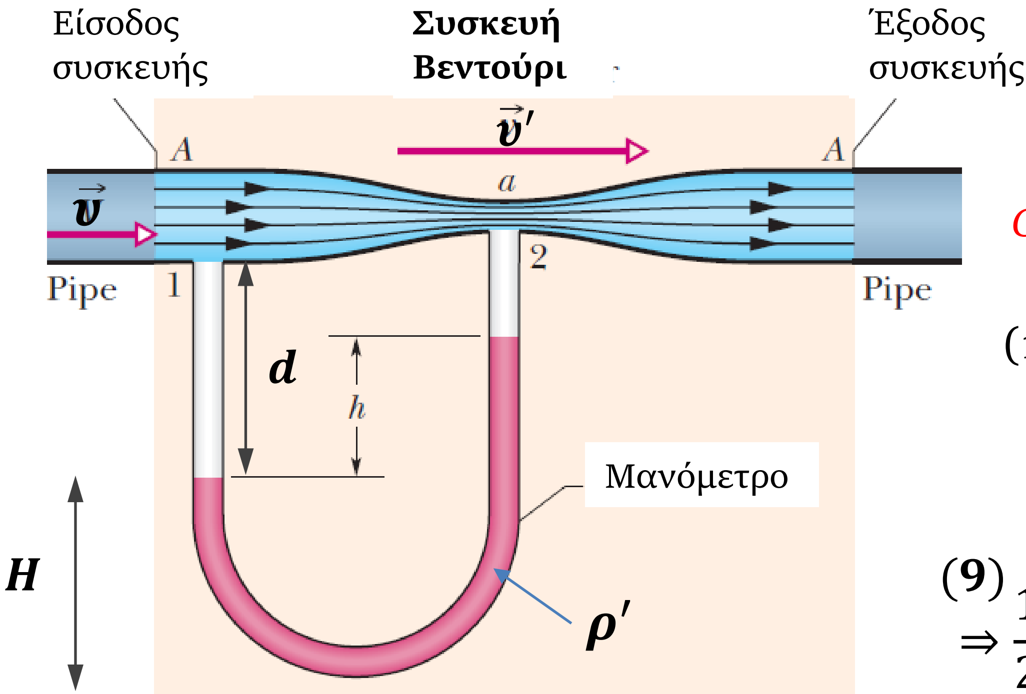
Ρευστό σε στατική ισορροπία στο μανόμετρο

$$p_1 + \rho' g H + \rho g d = p_2 + \rho' g (H + h) + \rho g (d - h)$$

$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = gh(\rho' - \rho) \qquad \textbf{(11)}$$

4. Ροόμετρο Ventouri (Βεντουρίμετρο)



Συσκευή μέτρησης της ταχύτητας ρευστού (υ) σε σωλήνα διατομής Α.

Οριζόντιος σωλήνας ($y_1 = y_2$)

(10), (11) ⇒

$$\frac{1}{2}\rho\left(v'^2 - v^2\right) = gh(\rho' - \rho)$$

(9)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2\left\{\left(\frac{A}{\alpha}\right)^2 - 1\right\} = gh(\rho' - \rho)$$

Εναλλακτική έκφραση η οποία δεν κάνει χρήση της πυκνότητας ρευστού στο μανόμετρο (ρ').

$$\upsilon = \alpha\sqrt{\frac{2gh(\rho'-\rho)}{\rho(A^2 - \alpha^2)}}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = gh(\rho - \rho') = -gh(\rho' - \rho)$$

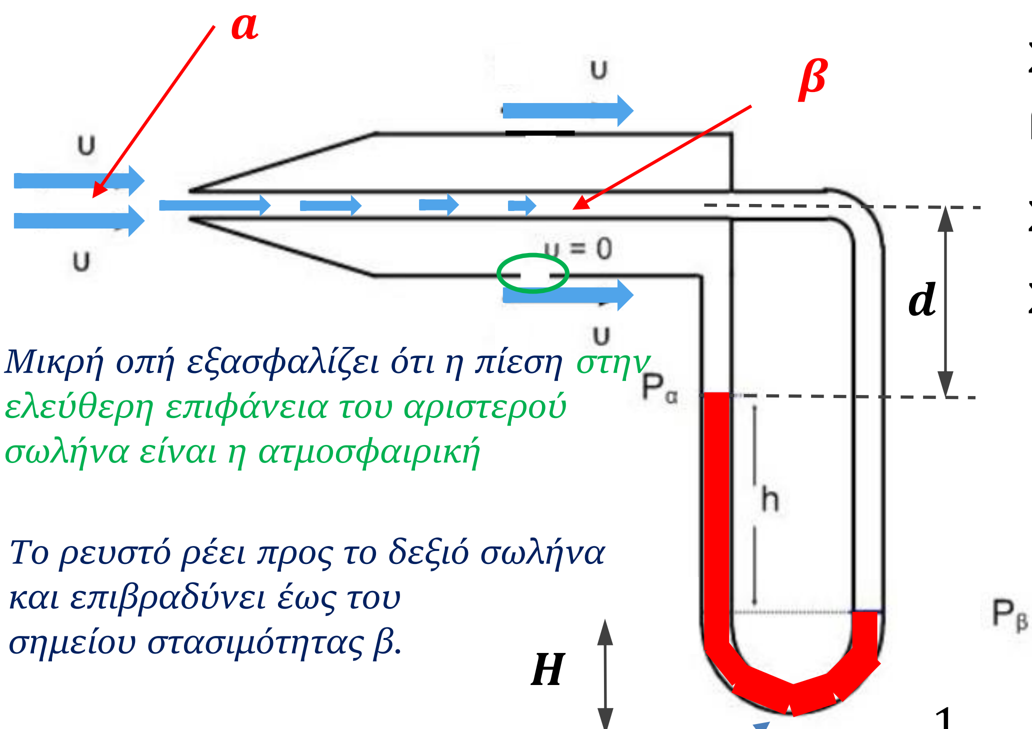
$$\underbrace{gh(\rho'-\rho)}_{>0} = -\underbrace{\Delta p}_{<0}$$

$$\boxed{\upsilon = \alpha\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(\alpha^2 - A^2)}}}$$

Προσοχή άλλαξε σε $\alpha^2 - A^2$

Με τη συσκευή εκμεταλλευόμαστε την **πτώση της στατικής πίεσης** στα σημεία της **ροής με μεγάλη ταχύτητα** ώστε να μετρήσουμε την ταχύτητα ροής μακριά τη στένωση.

5. Σωλήνας Pitot



Συσκευή μέτρησης της ταχύτητας ρευστού (υ).

Σημείο α: ροή με ταχύτητα $\upsilon_\alpha = \upsilon$

Σημείο β: σημείο στασιμότητας $\upsilon_\beta = 0$

Μικρή οπή εξασφαλίζει ότι η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του αριστερού σωλήνα είναι η ατμοσφαιρική

Το ρευστό ρέει προς το δεξιό σωλήνα και επιβραδύνει έως του σημείου στασιμότητας β.

Η διαφορά στις στήλες του μανομέτρου είναι ανάλογη της διαφοράς μεταξύ της στατικής και ολικής πίεσης (στατική + δυναμική)

Εξίσωση Bernoulli για σημεία α & β:

$$p_\alpha + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_\beta \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_\beta - p_\alpha)} \qquad \mathbf{(12)}$$

Ρευστό σε στατική ισορροπία στο μανόμετρο

$$p_\alpha + \rho' g h + \cancel{\rho' g H} = p_\beta + \cancel{\rho' g H} \Rightarrow p_\beta - p_\alpha = \rho' g h \qquad \mathbf{(13)}$$

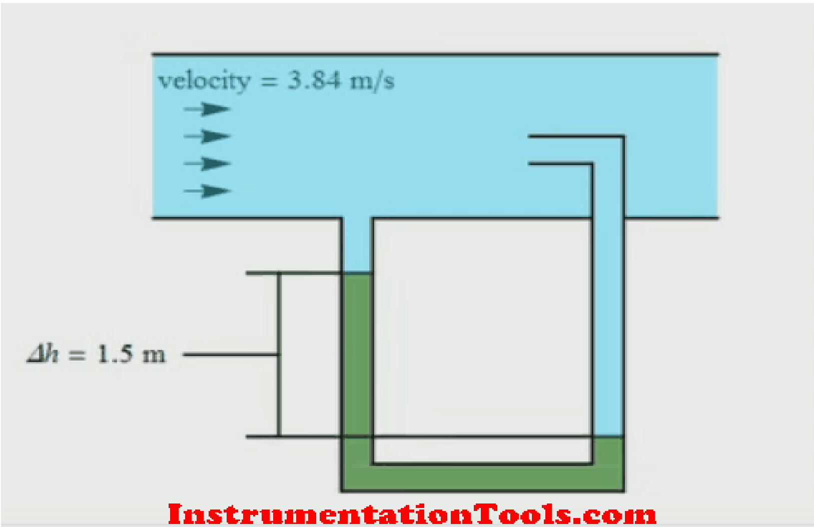
(12), (13) ⇒

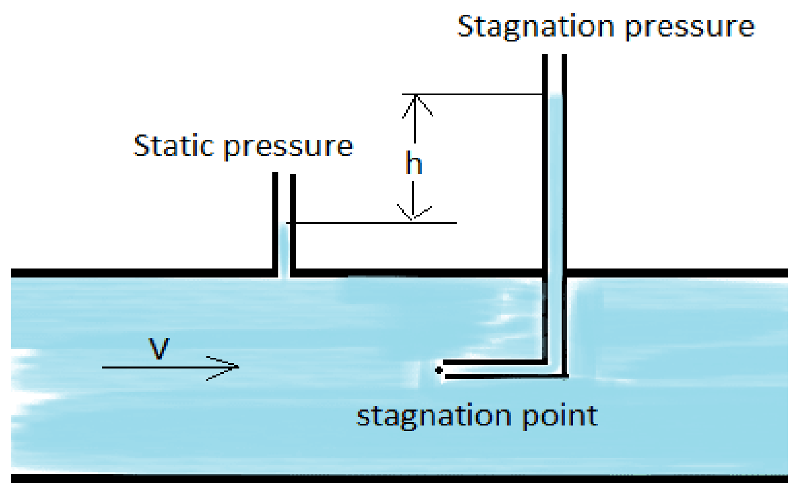
(12), (13) ⇒

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh\frac{\rho'}{\rho}}}$$

5. Σωλήνας Pitot

Εναλλακτικές διατάξεις





Η διαφορά στις στήλες του μανομέτρου είναι ανάλογη της διαφοράς μεταξύ της στατικής και ολικής πίεσης (στατική + δυναμική).

Ο σωλήνας Pitot βρίσκει εφαρμογή στα αεροπλάνα για την μέτρηση της κίνησης του αεροπλάνου ως προς τα ατμοσφαιρικά στρώματα που το περιβάλλουν (όχι ως προς την επιφάνεια της Γης).