ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (8 Ασκήσεις)

Α. ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ: ΑΠΟΣΠΑΣΗ/ΣΥΣΣΩΜΑΤΩΣΗ (2)

Β. ΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ΙΜΑΝΤΑ (1)

Γ. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΡΟΥΚΕΤΑΣ (1)

Δ. ΔΙΑΡΡΟΗ ΟΧΗΜΑΤΟΣ (1)

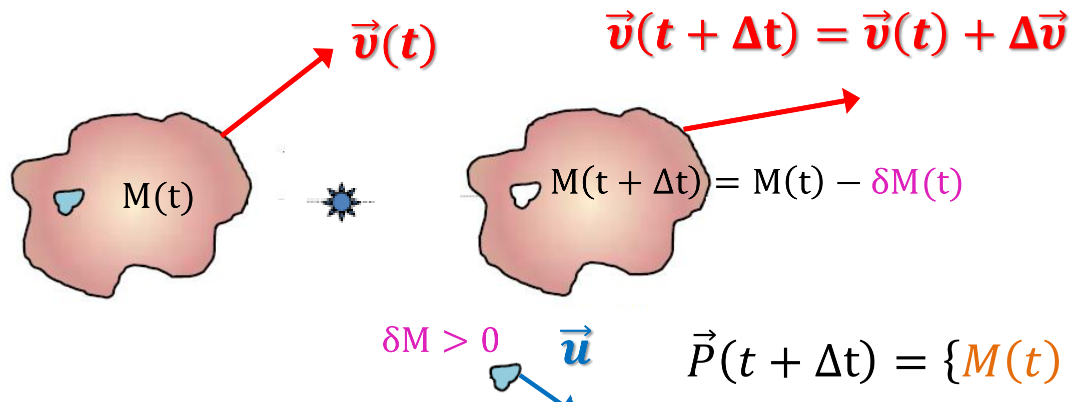
Ε. ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗ ΧΙΟΝΙΟΥ ΣΕ ΕΛΚΗΘΡΟ (1)

Ζ. ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗ ΒΡΟΧΗΣ ΣΕ ΒΑΓΟΝΙ ΤΡΕΝΟΥ (1)

Η. ΡΙΠΗ ΠΟΛΥΒΟΛΟΥ (1)

1. Εξίσωση μεταβλητής μάζας: α) απόσπαση

Εφαρμογή 1α: Μάζα M κινούμενη με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εκτινάσσει στοιχειώδη μάζα ΔM με ταχύτητα $\vec{u}$ μεταβάλλοντας την ταχύτητά της. Να διατυπωθεί η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής του συστήματος.



$\delta M = -\Delta M = -(M(t+\Delta t) - M(t))$

Ορμή του συστήματος σωμάτων πριν και μετά την εκτίναξη του υλικού από τη μάζα.

$$\vec{P}(t) = M(t)\,\vec{\upsilon}(t)$$

$$\vec{P}(t+\Delta t) = \{M(t) - \delta M(t)\}\{\vec{\upsilon}(t) + \Delta\vec{\upsilon}(t)\} + \delta M(t)\,\vec{u}(t)$$

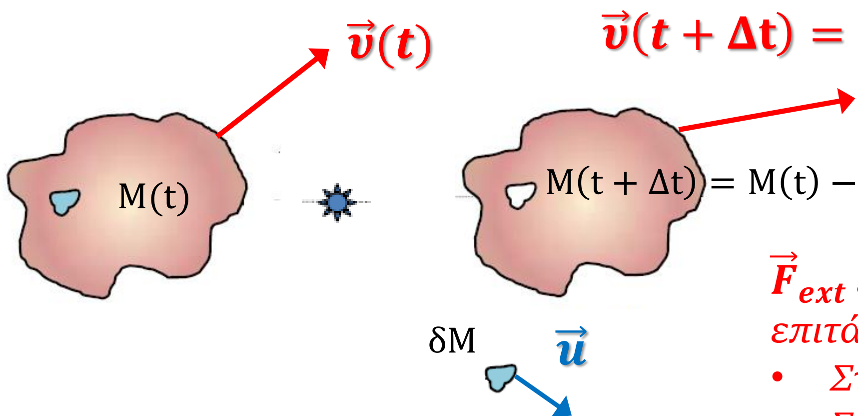
$$\frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = M(t)\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} - \frac{\delta M(t)}{\Delta t}\vec{\upsilon}(t) - \cancelto{0}{\frac{\delta M(t)}{\Delta t}\Delta\vec{\upsilon}(t)} + \frac{\delta M(t)}{\Delta t}\vec{u}(t)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = M(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} + \vec{\upsilon}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta M(t)}{\Delta t} - \vec{u}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta M(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} + \vec{\upsilon}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} - \vec{u}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t}$$

1. Εξίσωση μεταβλητής μάζας: α) απόσπαση

Εφαρμογή 1α: Μάζα Μ κινούμενη με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εκτινάσσει στοιχειώδη μάζα ΔΜ με ταχύτητα $\vec{u}$ μεταβάλλοντας την ταχύτητά της. Να διατυπωθεί η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής του συστήματος.



$$\boxed{\vec{F}_{ext} + \frac{dM(t)}{dt}(\vec{\upsilon}_{rel}) = M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}}$$

$\vec{F}_{ext}$ είναι η εξωτερική δύναμη που επιδρά στο σύστημα. Η επιτάχυνση της μάζας Μ οφείλεται:

- *Στην εξωτερική δύναμη*
- *Στην προωθητική δύναμη λόγω της εκτινασσόμενης μάζας*

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} + \vec{\upsilon}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{M(t+\Delta t) - M(t)}}{\Delta t} - \vec{u}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{M(t+\Delta t) - M(t)}}{\Delta t}$$

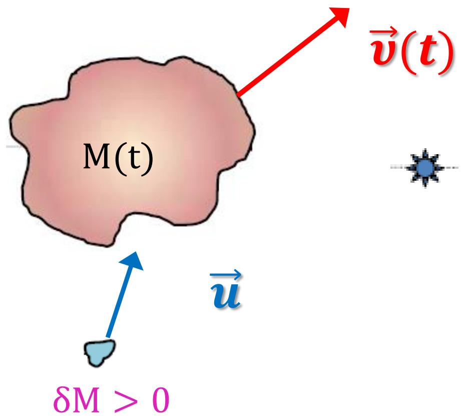
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} + \vec{\upsilon}(t)\frac{dM(t)}{dt} - \vec{u}(t)\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M(t)\,\vec{\upsilon}(t)\right) - \vec{u}(t)\frac{dM(t)}{dt}$$

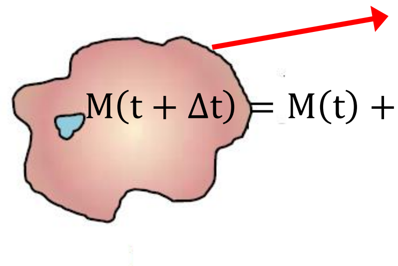
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}\left(\vec{u}(t) - \vec{\upsilon}(t)\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{\upsilon}_{rel})}$$

1. Εξίσωση μεταβλητής μάζας: β) συσσωμάτωση

Εφαρμογή 1β: Μάζα M κινούμενη με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ συσσωματώνεται με στοιχειώδη μάζα ΔΜ με ταχύτητα $\vec{u}$ μεταβάλλοντας την ταχύτητά της. Να διατυπωθεί η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής του συστήματος.





$$\vec{\upsilon}(t+\Delta t) = \vec{\upsilon}(t) + \Delta\vec{\upsilon}$$

Ορμή του συστήματος σωμάτων πριν και μετά τη συσσωμάτωση.

$$\vec{P}(t) = M(t)\,\vec{\upsilon}(t) + \delta M(t)\,\vec{u}(t)$$

$$\vec{P}(t+\Delta t) = \{M(t) + \delta M(t)\}\{\vec{\upsilon}(t) + \Delta\vec{\upsilon}(t)\}$$

$$\delta M = \Delta M = M(t+\Delta t) - M(t)$$

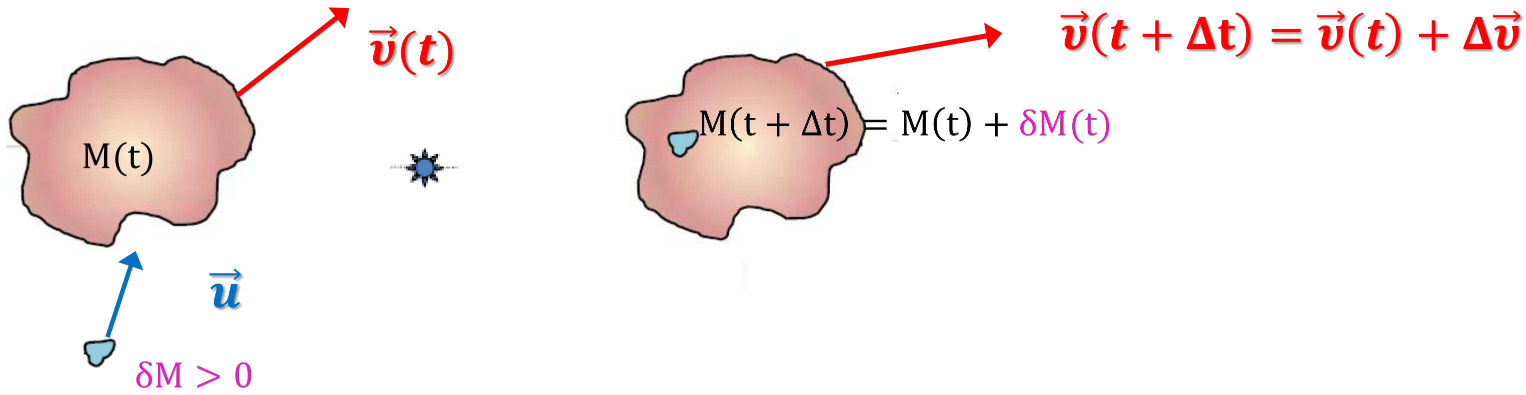
$$\frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = M(t)\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} + \frac{\delta M(t)}{\Delta t}\vec{\upsilon}(t) + \cancelto{0}{\frac{\delta M(t)}{\Delta t}\Delta\vec{\upsilon}(t)} - \frac{\delta M(t)}{\Delta t}\vec{u}(t)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = M(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} + \vec{\upsilon}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta M(t)}{\Delta t} - \vec{u}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta M(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} + \vec{\upsilon}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} - \vec{u}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t}$$

1. Εξίσωση μεταβλητής μάζας: συσσωμάτωσης

Εφαρμογή 1β: Μάζα Μ κινούμενη με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ συσσωματώνεται με στοιχειώδη μάζα ΔΜ με ταχύτητα $\vec{u}$ μεταβάλλοντας την ταχύτητά της. Να διατυπωθεί η εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της ορμής του συστήματος.



$$\frac{d\vec{P}}{dt}=M(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t}+\vec{\upsilon}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{M(t+\Delta t)-M(t)}}{\Delta t}-\vec{u}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{M(t+\Delta t)-M(t)}}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}+\vec{\upsilon}(t)\frac{dM(t)}{dt}-\vec{u}(t)\frac{dM(t)}{dt}=M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}-\frac{dM(t)}{dt}\left(\vec{u}(t)-\vec{\upsilon}(t)\right)$$

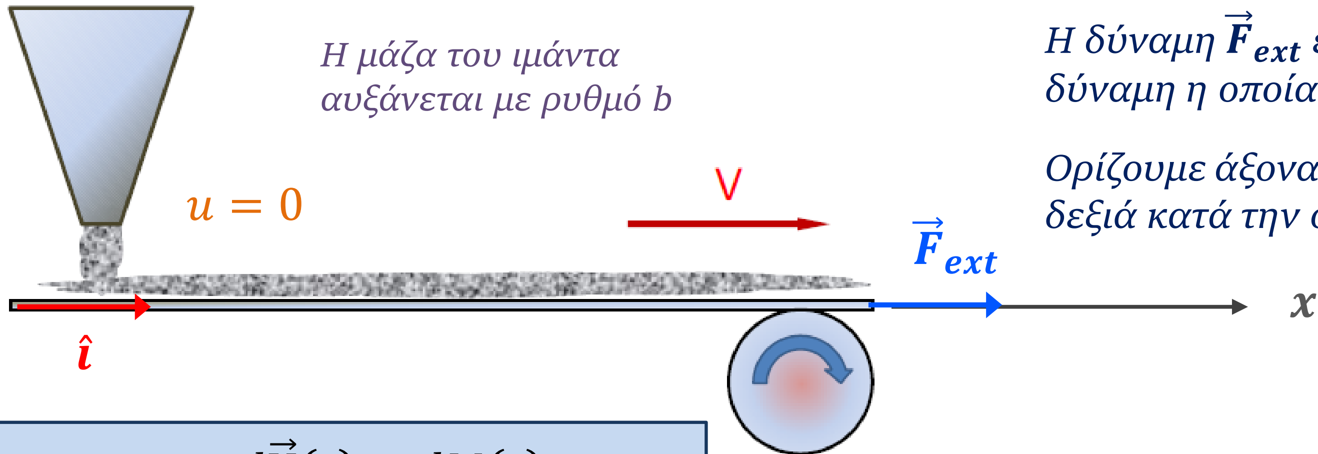
$$\boxed{\vec{F}_{ext}=\frac{d\vec{P}}{dt}=M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}-\frac{dM(t)}{dt}(\vec{\upsilon}_{rel})}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext}+\frac{dM(t)}{dt}(\vec{\upsilon}_{rel})=M(t)\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}}$$

Η σχέση είναι η ίδια όπως και στην περίπτωση της εκτίναξης μάζας

2. Τροφοδότηση ιμάντα

Εφαρμογή 2: Κινούμενος ιμάντας μεταφέρει χαλίκα τα οποία πέφτουν κατακόρυφα από χοάνη με ρυθμό b = dM/dt. Να υπολογισθεί η δύναμη που πρέπει να δράσει στον ιμάντα ώστε να διατηρεί σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$ λόγω του πρόσθετου φορτίου.



Η δύναμη $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}$ είναι η μοναδική εξωτερική δύναμη η οποία ασκείται στο σύστημα.

Ορίζουμε άξονα x με θετική φορά προς τα δεξιά κατά την οποία κινείται ο ιμάντας.

$$\vec{F}_{ext} = M(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{rel}})$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{V} = (u - V)\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

$$F_{ext} = M(t)\frac{dV(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(u - V) = 0 - \frac{dM(t)}{dt}(0 - V)$$

Συνιστώσες κατά μήκος άξονα x

Ο ιμάντας πρέπει να κινείται με σταθερή ταχύτητα

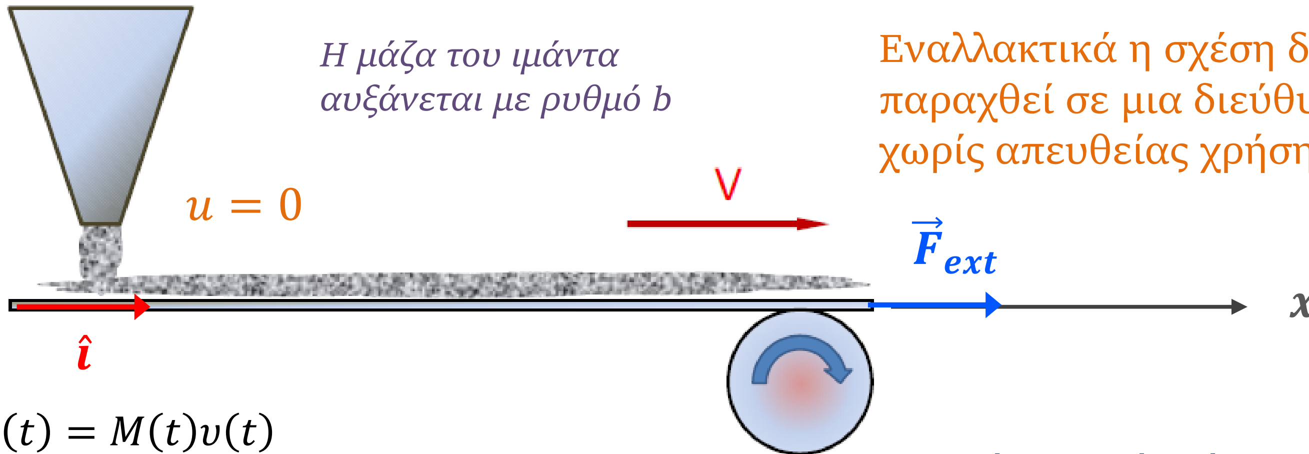
Τα χαλίκα πέφτουν κατακόρυφα δεν προσθέτουν ορμή στον ιμάντα στην διεύθυνση x

$$F_{ext} = V\frac{dM(t)}{dt} = \boldsymbol{b}V$$

Η δύναμη η οποία πρέπει να ασκηθεί θα είναι ανάλογη του ρυθμού ροής των χαλικιών μέσω του τροφοδότη.

2. Τροφοδότηση ιμάντα

Εφαρμογή 2: Κινούμενος ιμάντας μεταφέρει χαλίκα τα οποία πέφτουν κατακόρυφα από χοάνη με ρυθμό b = dM/dt. Να υπολογισθεί η δύναμη που πρέπει να δράσει στον ιμάντα ώστε να διατηρεί σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$ λόγω του πρόσθετου φορτίου.



Εναλλακτικά η σχέση διατήρησης ορμής μπορεί να παραχθεί σε μια διεύθυνση ενδιαφέροντος χωρίς απευθείας χρήση της διανυσματικής σχέσης.

$\delta M = \Delta M = M(t + \Delta t) - M(t)$

$M(t + \Delta t) = M(t) + \delta M(t)$

$$P(t) = M(t)v(t)$$

$$P(t + \Delta t) = (M(t) + \delta M)(v(t) + \Delta v(t))$$

Συνιστώσα ορμής μόνο κατά μήκος άξονα x

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = M(t)\, v(t) + M(t)\, \Delta v(t) + \delta M\, v(t) + \delta M\, \Delta v(t) - M(t)v(t)$$

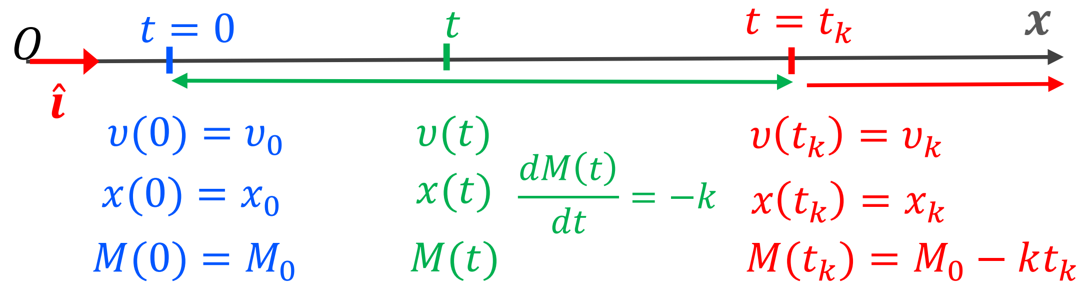
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = M(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} + v(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta M(t)}{\Delta t} = M(t)\cancel{\frac{dv(t)}{dt}} + v(t)\frac{dM(t)}{dt} = V\frac{dM(t)}{dt}$$

Σταθερή ταχύτητα του ιμάντα

$$\boxed{F_{ext} = V\frac{dM(t)}{dt} = bV}$$

3. Μελέτη κίνησης ρουκέτας

Εφαρμογή 3: Ρουκέτα έχει αρχική μάζα M_0. Μάζα καυσίμου εκτοξεύεται με σταθερό ρυθμό *k (k>0)* και σχετική ταχύτητα υ_{rel}. Να βρεθούν οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν ταχύτητα *υ(t)* και θέση *x(t)* της ρουκέτας. Ποιά η τελική ταχύτητα και θέση της ρουκέτας *υ(t)* και *x(t)*;



$$\frac{dM}{dt} = -k \Rightarrow dM = -k\,dt \Rightarrow \int_0^t dM = -k\int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} M(t) = M_0 - kt \\ M_{fuel} = M_0 - M(t_k) \end{gathered}} \qquad \boxed{t_k = \frac{M_f}{k}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{\boldsymbol{rel}})}$$

$$\vec{\upsilon}_{rel} = \vec{u} - \vec{\upsilon} = -\upsilon_{rel}\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Οι δυνάμεις αντίστασης του αέρα αγνοούνται οπότε δεν ασκείται στο σύστημα εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{ext}$

$$0 = M(t)\frac{d\upsilon(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(-\upsilon_{rel}) \quad \Rightarrow \quad M(t)\frac{d\upsilon(t)}{dt} = -\upsilon_{rel}\frac{dM(t)}{dt} = k\,\upsilon_{rel}$$

Η ρουκέτα επιταχύνεται προς τα εμπρός όσο καταναλώνεται το καύσιμο

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt} = k\,\upsilon_{rel} = 0$$

Όταν το καύσιμο εξαντλείται και δεν υπάρχει προώθηση τότε η ρουκέτα κινείται με σταθερή ταχύτητα

3. Μελέτη κίνησης ρουκέτας

Εφαρμογή 3: Ρουκέτα έχει αρχική μάζα M_0. Μάζα καυσίμου εκτοξεύεται με σταθερό ρυθμό *k (k>0)* και σχετική ταχύτητα v_{rel}. Να βρεθούν οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν ταχύτητα *υ(t)* και θέση *x(t)* της ρουκέτας. Ποιά η τελική ταχύτητα και θέση της ρουκέτας *υ(t)* και *x(t)*;

$v(0) = v_0$ | $v(t)$ | $v(t_k) = v_k$

$x(0) = x_0$ | $x(t)$ | $\dfrac{dM(t)}{dt} = -k$ | $x(t_k) = x_k$

$M(0) = M_0$ | $M(t)$ | $M(t_k) = M_f$

$$\boxed{M(t) = M_0 - kt}$$

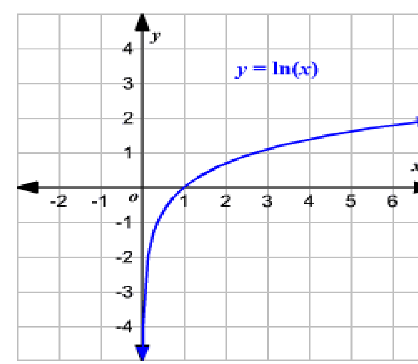
$$\boxed{t_k = \frac{M_f}{k}}$$

$$M(t)\frac{dv(t)}{dt} = -v_{rel}\frac{dM(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -v_{rel}\frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -v_{rel}\frac{d}{dt}(\ln M(t)) \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{dv(t')}{dt'}dt' = -v_{rel}\int_0^t \frac{d}{dt'}(\ln M(t'))\,dt' \Rightarrow \quad [v(t')]_0^t = -v_{rel}[\ln M(t')]_0^t$$

$$v(t) - v_0 = -v_{rel}\ln\frac{M(t)}{M_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + v_{rel}\ln\frac{M_0}{M_0 - kt}}$$



$$\boxed{v(t_k) = v_0 + v_{rel}\ \ln\frac{M_0}{M_0 - M_f}}$$

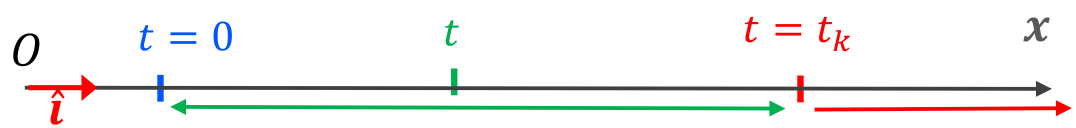
$v(t) > v_0$ *επειδή* $\ln\frac{M_0}{M_0-kt} > 1$

3. Μελέτη κίνησης ρουκέτας

$$\boxed{M(t) = M_0 - kt}$$

$$\boxed{t_k = \frac{M_f}{k}}$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 + \upsilon_{rel} \ln \frac{M_0}{M_0 - kt}}$$



$\upsilon(0) = \upsilon_0$ $\quad$ $\upsilon(t)$ $\quad$ $\upsilon(t_k) = \upsilon_k$

$x(0) = x_0$ $\quad$ $x(t)$ $\quad \dfrac{dM(t)}{dt} = -k$ $\quad$ $x(t_k) = x_k$

$M(0) = M_0$ $\quad$ $M(t)$ $\quad$ $M(t_k) = M_f$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \upsilon_0 + \upsilon_{rel} \ln \frac{M_0}{M_0 - kt} = \upsilon_0 - \upsilon_{rel} \ln \frac{M_0 - kt}{M_0} = \upsilon_0 - \upsilon_{rel} \ln \left(1 - \frac{k}{M_0} t\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{dx(t')}{dt'} dt' = \int_0^t \upsilon_0 \; dt' - \upsilon_{rel} \int_0^t \ln \left(1 - \frac{k}{M_0} t'\right) dt' \Rightarrow x(t) = x_0 + \upsilon_0 \mathrm{t} - \upsilon_{rel} \int_0^t \ln \left(1 - \frac{k}{M_0} t'\right) dt'$$

Στρατηγική με αλλαγή μεταβλητής

$$\boxed{u = g(t') = 1 - \frac{k}{M_0} t' \;\Rightarrow \frac{du}{dt'} = -\frac{k}{M_0} \quad \Rightarrow dt' = -\frac{M_0}{k} du}$$

Νέα μεταβλητή!

Νέα όρια!

$$u_1 = g(0) = 1,$$

$$u_2 = g(t) = 1 - \frac{k}{M_0} t$$

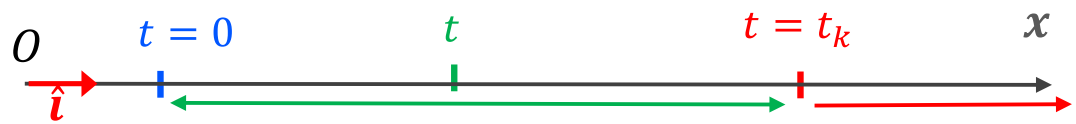
$$\int_0^t \ln \left(1 - \frac{k}{M_0} t'\right) dt' = -\frac{M_0}{k} \int_1^{1 - \frac{k}{M_0} t} \ln u \, du = -\frac{M_0}{k} \int_1^{1 - \frac{k}{M_0} t} \left(\frac{du}{du}\right) \ln u \, du = [u \; \ln u]_1^{1 - \frac{k}{M_0} t} - \int_1^{1 - \frac{k}{M_0} t} u \frac{1}{u} du$$

Στρατηγική με παραγοντική ολοκλήρωση

3. Μελέτη κίνησης ρουκέτας

$$\boxed{M(t) = M_0 - kt}$$

$$\boxed{t_k = \frac{M_f}{k}}$$



$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 + \upsilon_{rel} \ln \frac{M_0}{M_0 - kt}}$$

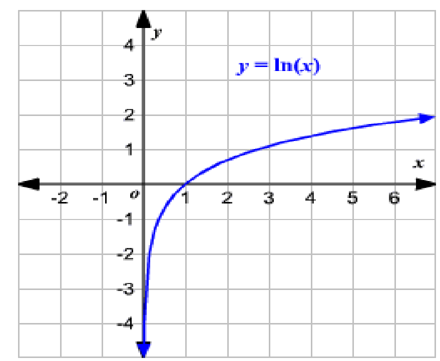
$\upsilon(0) = \upsilon_0$ $\quad$ $\upsilon(t)$ $\quad$ $\upsilon(t_k) = \upsilon_k$

$x(0) = x_0$ $\quad$ $x(t)$ $\quad \frac{dM(t)}{dt} = -k$ $\quad$ $x(t_k) = x_k$

$M(0) = M_0$ $\quad$ $M(t)$ $\quad$ $M(t_k) = M_f$

$$\int_0^t \ln\left(1 - \frac{k}{M_0}t'\right)dt' = -\frac{M_0}{k}[u\ \ln u]_1^{1-\frac{k}{M_0}t} + \frac{M_0}{k}\int_1^{1-\frac{k}{M_0}t} u\frac{1}{u}du =$$

$$= -\frac{M_0}{k}(1 - \frac{k}{M_0}t)\ln(1 - \frac{k}{M_0}t) \ - t$$



$$x(t) = x_0 + \upsilon_0 t - \upsilon_{rel}\int_0^t \ln\left(1 - \frac{k}{M_0}t'\right)dt' = x_0 + \upsilon_0 t - \upsilon_{rel}\{-\frac{M_0}{k}(1 - \frac{k}{M_0}t)\ln(1 - \frac{k}{M_0}t) \ - t\}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + (\upsilon_0 + \upsilon_{rel})t + \upsilon_{rel}(\frac{M_0}{k} - t)\ln(1 - \frac{k}{M_0}t)}$$

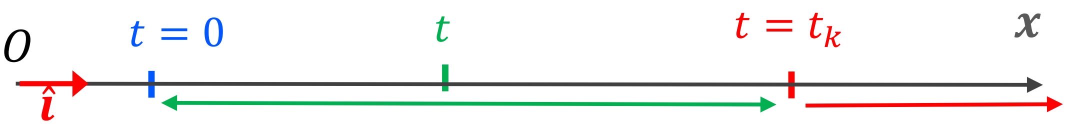
Η απόσταση αυξάνεται

$$\frac{M_0}{k} - t = \frac{M(t)}{k} > 0 \qquad 1 - \frac{k}{M_0}t = \frac{M(t)}{M_0} < 1$$

3. Μελέτη κίνησης ρουκέτας

$$M(t) = M_0 - kt$$

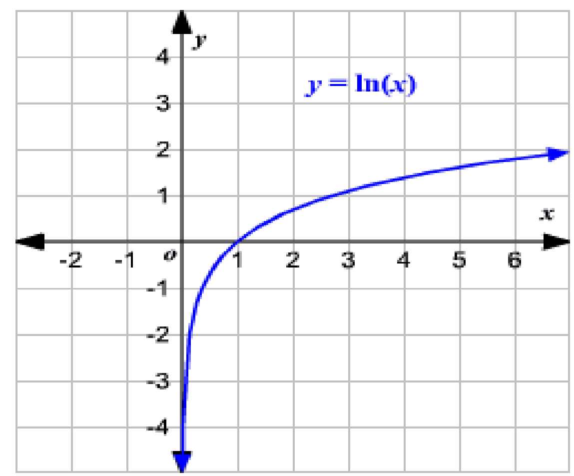
$$t_k = \frac{M_f}{k}$$



$t=0$	t	$t=t_k$
$v(0) = v_0$	$v(t)$	$v(t_k) = v_k$
$x(0) = x_0$	$x(t)$ $\quad \frac{dM(t)}{dt} = -k$	$x(t_k) = x_k$
$M(0) = M_0$	$M(t)$	$M(t_k) = M_f$

$$v(t) = v_0 + v_{rel} \ln \frac{M_0}{M_0 - kt}$$

$$v(t_k) = v_0 + v_{rel} \ln \frac{M_0}{M_0 - M_f}$$



$$\frac{M_0}{k} - t = \frac{M(t)}{k} > 0 \qquad 1 - \frac{k}{M_0} t = \frac{M(t)}{M_0} < 1$$

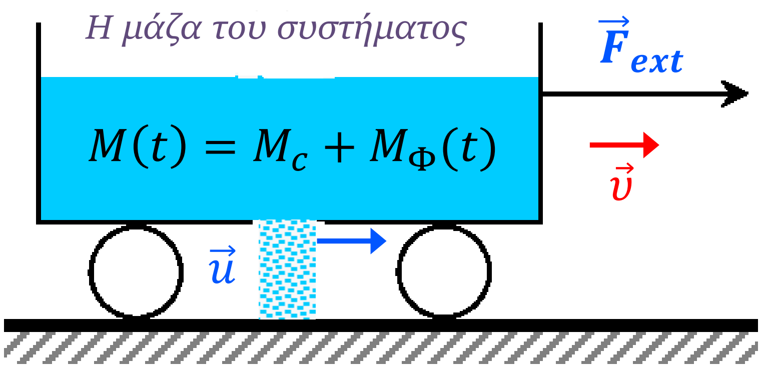
$$x(t) = x_0 + (v_0 + v_{rel})\mathrm{t} + v_{rel}\left(\frac{M_0}{k} - t\right) \ln\left(1 - \frac{k}{M_0} t\right)$$

$$x(t_k) = x_0 + (v_0 + v_{rel})t_k + v_{rel}\left(\frac{M_0}{k} - t_k\right) \ln\left(1 - \frac{k}{M_0} t_k\right)$$

Η απόσταση για $t = t_k$

4. Διαρροή οχήματος

Εφαρμογή 4: Τροχήλατο όχημα μάζας M_c φέρει άμμο αρχικής μάζας M_s η οποία διαρρέει κατακόρυφα με ρυθμό b ενώ δύναμη εφαρμόζεται στο όχημα. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος τη στιγμή που θα έχει αδειάσει το όχημα.



Η δύναμη $\vec{F}_{ext}$ είναι η μοναδική εξωτερική δύναμη η οποία ασκείται στο σύστημα.

Ορίζουμε άξονα x με θετική φορά προς τα δεξιά κατά την οποία κινείται το όχημα.

$$\frac{dM}{dt} = -b \Rightarrow dM = -b\,dt \Rightarrow \int_0^t dM = -b\int_0^t dt' \Rightarrow \quad M(t) - M_0 = -bt \Rightarrow$$

$$M_c + M_\Phi(t) - (M_c + M_S) = -bt \Rightarrow \quad M_\Phi(t) - M_S = -bt \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} t = t_S & \\ M_\Phi(t_S) = 0 & t_S = \dfrac{M_S}{b} \end{array}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{v}_{rel})}$$

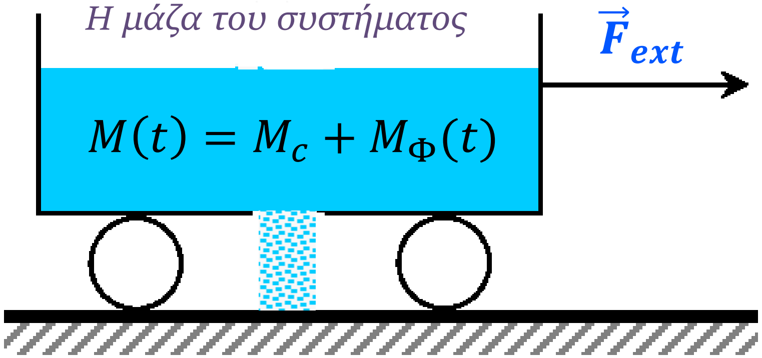
$$\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v} = (v - v)\hat{\imath}$$

$$F_{ext} = M(t)\frac{dv(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(v(t) - v(t)) = M(t)\frac{dv(t)}{dt}$$

Συνιστώσες κατά μήκος άξονα x

4. Διαρροή οχήματος

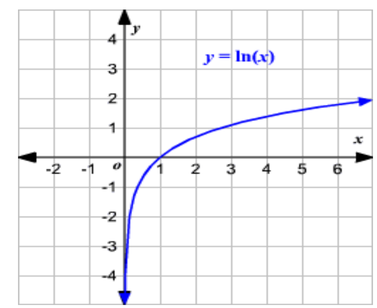
Εφαρμογή 4: Τροχήλατο όχημα μάζας M_c φέρει άμμο αρχικής μάζας M_s η οποία διαρρέει κατακόρυφα με ρυθμό b ενώ δύναμη εφαρμόζεται στο όχημα. Να βρεθεί η ταχύτητα του οχήματος τη στιγμή που θα έχει αδειάσει το όχημα.



$$t_S = \frac{M_S}{b}$$

$$M_\Phi(t) = M_S - bt$$

$$M(t) = M_c + M_S - bt$$



$$F_{ext} = M(t)\frac{dv(t)}{dt} = M(t)\frac{dv(t)}{dt} = (M_c + M_S - bt)\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{F_{ext}}{M_c + M_S - bt} \Rightarrow \int_0^t \frac{dv(t')}{dt'}dt' = F_{ext}\int_0^t \frac{1}{M_c + M_S - bt'}dt' = \frac{-F_{ext}}{b}\int_0^t \frac{d}{dt'}(\ln(M_c + M_S - bt'))\,dt'$$

$$v(t) = v_0 - \frac{F_{ext}}{b}\ln\frac{M_c + M_S - bt}{M_c + M_S}$$

$$\frac{M_c + M_S - bt}{M_c + M_S} < 1$$

Η ταχύτητα του οχήματος αυξάνεται όσο αδειάζει η άμμος.

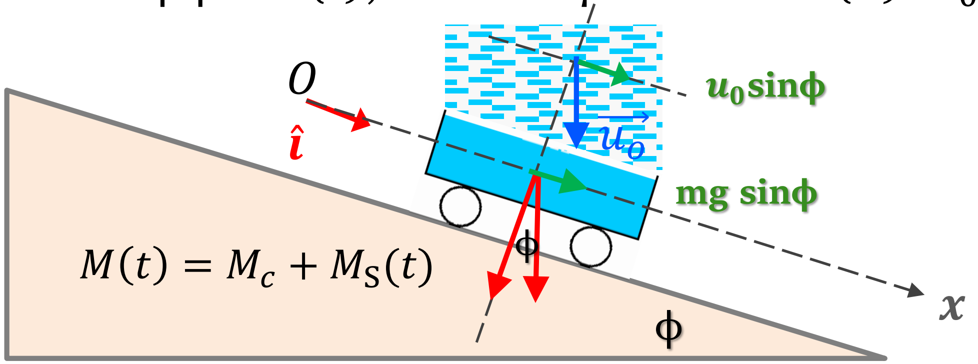
$$v(t_S) = v_0 - \frac{F_{ext}}{b}\ln\frac{M_c}{M_c + M_S}$$

$$t = t_S$$

Όταν αδειάσει όλη η άμμος, το όχημα θα αρχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

5. Συσσώρευση χιονιού σε έλκυθρο

Εφαρμογή 5: Έλκηθρο μάζας M_c κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ. Χιόνι πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα u_0 και ρυθμό λ ($^{kgr}/_{sec}$). Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας του ελκήθρου $\upsilon(t)$, αν είναι γνωστό ότι $\upsilon(0)=\upsilon_0$.



Η δύναμη $\vec{F}_{ext}$ (συνιστώσα βάρους ελκήθρου) είναι η μοναδική εξωτερική δύναμη η οποία ασκείται στο σύστημα. Αγνοούμε άλλες δυνάμεις αντίστασης αέρα κτλ.

Ορίζουμε άξονα x με θετική φορά προς τα δεξιά κατά την οποία κινείται το όχημα.

$$\frac{dM}{dt} = \lambda \Rightarrow dM = \lambda\, dt \Rightarrow \int_0^t dM = \lambda \int_0^t dt' \Rightarrow \quad M(t) - M_c = \lambda t \Rightarrow \quad \boxed{M(t) = M_c + \lambda t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{\upsilon}_{rel})}$$

$$\vec{\upsilon}_{rel} = \vec{u} - \vec{\upsilon}$$

$$\boxed{w(t) = (\upsilon(t) - u_0 sin\varphi)}$$

$$F_{ext} = M(t)\frac{d\upsilon(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(u_0 sin\varphi - \upsilon(t))$$

Συνιστώσες κατά μήκος άξονα x

$$M(t) g sin\varphi = M(t)\frac{dw(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt} w(t)$$

Αντικατάσταση μεταβλητής για επίλυση εξίσωσης

5. Συσσώρευση χιονιού σε έλκυθρο

Εφαρμογή 5: Έλκηθρο μάζας M_c κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ. Χιόνι πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα u_0 και ρυθμό λ ($^{kgr}/_{sec}$). Να βρεθεί η εξίσωση της ταχύτητας του ελκήθρου $\upsilon(t)$, αν είναι γνωστό ότι $\upsilon(0)=\upsilon_0$.

$$\boxed{M(t) = M_c + \lambda t}$$

$$\boxed{w(t) = (\upsilon(t) - u_0 sin\varphi)}$$

$$M(t) gsin\varphi = M(t)\frac{dw(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt}w(t) \Rightarrow$$

$$(M_c + \lambda t) gsin\varphi = \frac{d}{dt}M(t)w(t) \Rightarrow$$

$$\int_0^t (M_c + \lambda t')gsin\varphi \; dt' = \int_0^t \frac{d}{dt'}[M(t')w(t')] \; dt' \Rightarrow g \; sin\varphi \; (M_c t + \frac{\lambda}{2}t^2) = [M(t')w(t')]_0^t \Rightarrow$$

$$g \; sin\varphi \; (M_c t + \frac{\lambda}{2}t^2) = M(t)w(t) - M(0)w(0) \Rightarrow$$

$$g \; sin\varphi \; (M_c t + \frac{\lambda}{2}t^2) = (M_c + \lambda t)(\upsilon(t) - u_0 sin\varphi) - M_c(\upsilon_0 - u_0 sin\varphi) \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = u_0 sin\varphi + \frac{M_c}{M_c + \lambda t}(\upsilon_0 - u_0 sin\varphi) + \frac{M_c t + \frac{\lambda}{2}t^2}{M_c + \lambda t} g \; sin\varphi}$$

5. Συσσώρευση χιονιού σε έλκυθρο

Υπολογισμός: Να βρεθεί η μάζα και η ταχύτητα του ελκήθρου σε χρόνο t_0.

$M_c = 10\,kgr$

$g = 10\ {}^{m}/_{s^2}$

$\varphi = 30^0 \rightarrow\ \sin\varphi = {}^{1}/_{2}$

$u_0 = 0.2\ {}^{m}/_{s}$

$\lambda = 2\ {}^{gr}/_{s}$

$v_0 = 0\ {}^{m}/_{s}$

$M(t) = M_c + \lambda t$

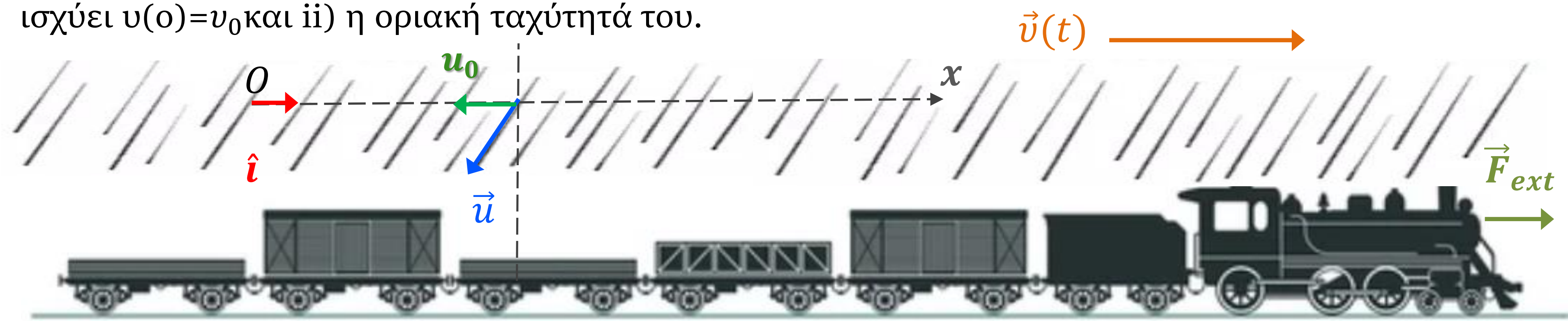
$$v(t) = u_0 sin\varphi + \frac{M_c}{M_c + \lambda t}(v_0 - u_0 sin\varphi) + \frac{M_c + \frac{\lambda}{2}t}{M_c + \lambda t}\,t\ g\ sin\varphi$$

$$v(t_0) = 0.1 + \frac{10}{10 + 0.002t_0}(0 - 0.1) + \frac{10 + 0.001t_0}{10 + 0.002t_0}\ 5\ t_0$$

$$M(t) = M_c + \lambda t = 10 + 0.002t_0$$

6. Συσσώρευση βροχής σε βαγόνι τρένου

Εφαρμογή 6: Μεταφορικό τρένο με άδεια ανοικτά βαγόνια συνολικής μάζας M_c επιταχύνεται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F. Την χρονική στιγμή t=ο αρχίζει να βρέχει γεμίζοντας τα βαγόνια. Εάν η ταχύτητα της βροχής έχει οριζόντια συνιστώσα u_0 αντίθετη της κίνησης του τρένου και η αποτιθέμενη ποσότητα νερού έχει ρυθμό λ, να βρεθούν i) ταχύτητα του τρένου $\upsilon(t)$ εάν ισχύει υ(ο)=υ_0και ii) η οριακή ταχύτητά του.



$$\frac{dM}{dt} = \lambda \Rightarrow dM = \lambda\, dt \Rightarrow \int_0^t dM = \lambda \int_0^t dt' \Rightarrow \qquad M(t) - M_c = \lambda t \Rightarrow \qquad \boxed{M(t) = M_c + \lambda t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{\upsilon}_{rel})}$$

$$\vec{\upsilon}_{rel} = \vec{u} - \vec{\upsilon}(t)$$

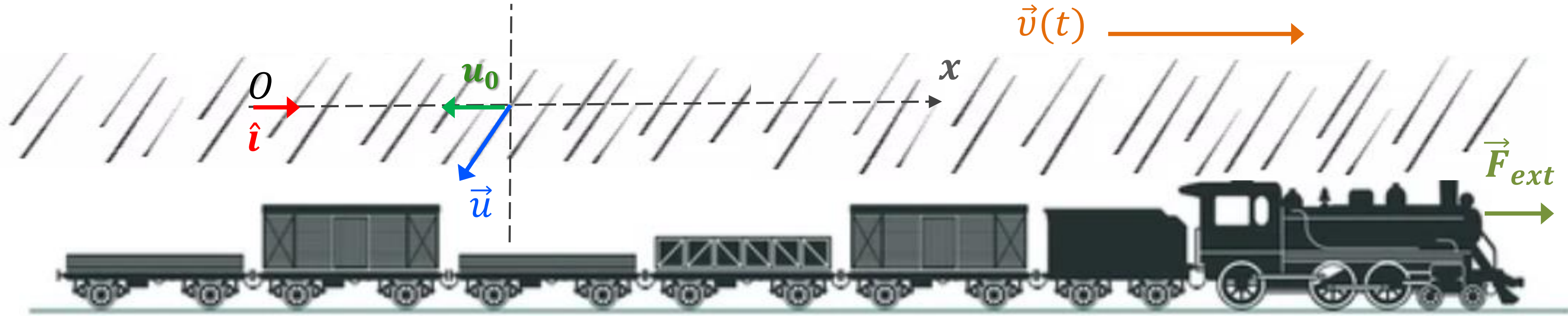
$$F_{ext} = M(t)\frac{d\upsilon(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(-u_0 - \upsilon(t))$$

Συνιστώσες κατά μήκος άξονα x

$$F_{ext} = M(t)\frac{dw(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt}(w(t))$$

$$\boxed{w(t) = u_0 + \upsilon(t)}$$

6. Συσσώρευση βροχής σε βαγόνι τρένου



Εναλλακτικά η σχέση διατήρησης ορμής μπορεί να παραχθεί σε μια διεύθυνση ενδιαφέροντος χωρίς απευθείας χρήση της διανυσματικής σχέσης.

$$\mathrm{M(t+\Delta t) = M(t) + \Delta M(t)}$$

Συνιστώσα ορμής μόνο κατά μήκος άξονα x

$$P(t) = M(t)v(t) - \Delta \mathrm{M}\, u_0$$

$$P(t+\Delta t) = (M(t) + \Delta \mathrm{M})(v(t) + \Delta v(t))$$

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = M(t)\, v(t) + M(t)\, \Delta v(t) + \Delta \mathrm{M}\, v(t) + \Delta \mathrm{M}\, \Delta v(t) - M(t) v(t) + \Delta \mathrm{M}\, u_0$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = M(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} + v(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{M}(t)}{\Delta t} + u_0 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{M}(t)}{\Delta t} = M(t)\frac{dv(t)}{dt} + (v(t) + u_0)\frac{dM(t)}{dt}$$

$$F_{ext} = M(t)\frac{dw(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt}(w(t))$$

$$\boxed{w(t) = u_0 + v(t)}$$

6. Συσσώρευση βροχής σε βαγόνι τρένου

$$F_{ext} = M(t)\frac{dw(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt}w(t) \Rightarrow F_{ext} = \frac{d}{dt}M(t)w(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{w(t) = u_0 + \upsilon(t)}$$

$$\boxed{M(t) = M_c + \lambda t}$$

$$\int_0^t F_{ext}\ dt' = \int_0^t \frac{d}{dt'}M(t')w(t')\ dt' \Rightarrow F_{ext}\,t = [M(t')w(t')]_0^t \Rightarrow$$

$$F_{ext}\,t = M(t)w(t) - M(0)w(0) \Rightarrow \qquad F_{ext}\,t = (M_c + \lambda t)(u_0 + \upsilon(t)) - M_c(u_0 + \upsilon_0) \Rightarrow$$

Καθώς $t \to \infty$ ο όρος πολύ γρήγορα κυριαρχεί.

Καθώς $t \to \infty$ ο όρος τείνει πολύ γρήγορα στο ο.

$$\boxed{\upsilon(t) = -u_0 + \frac{F_{ext}}{M_c + \lambda t}t + \frac{M_c}{M_c + \lambda t}(u_0 + \upsilon_0)}$$

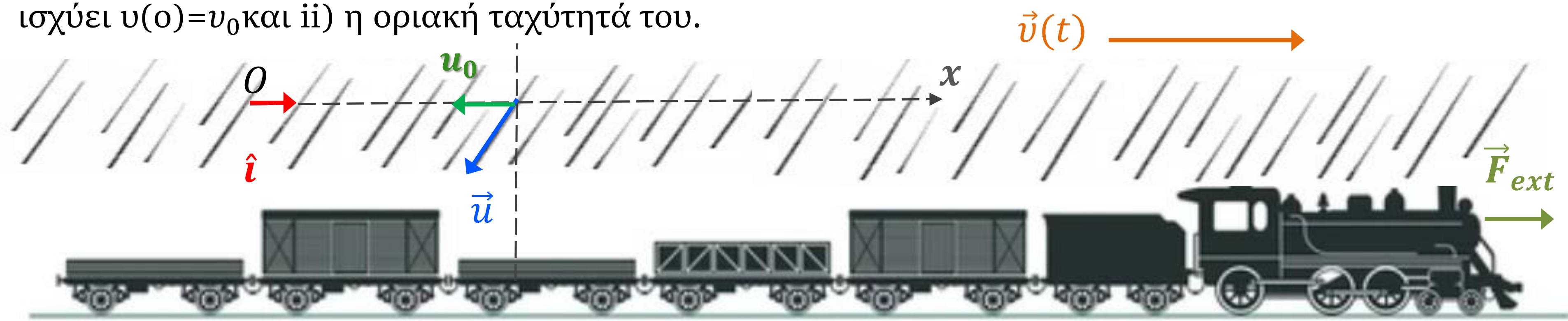
$$\frac{F_{ext}}{M_c + \lambda t}t \to \frac{F_{ext}}{\lambda t}t \approx \frac{F_{ext}}{\lambda} \qquad\qquad \frac{M_c}{M_c + \lambda t}(u_0 + \upsilon_0) \to 0$$

$$\boxed{\upsilon(t) \to \upsilon_{o\rho} = -u_0 + \frac{F_{ext}}{\lambda}}$$

Το τρένο τείνει να αποκτήσει μια οριακή σταθερή ταχύτητα μετά απο μεγάλο χρονικό διάστημα.

6. Συσσώρευση βροχής σε βαγόνι τρένου

Εφαρμογή 6: Μεταφορικό τρένο με άδεια ανοικτά βαγόνια συνολικής μάζας M_c επιταχύνεται υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F. Την χρονική στιγμή t=0 αρχίζει να βρέχει γεμίζοντας τα βαγόνια. Εάν η ταχύτητα της βροχής έχει οριζόντια συνιστώσα u_0 αντίθετη της κίνησης του τρένου και η αποτιθέμενη ποσότητα νερού έχει ρυθμό λ, να βρεθούν i) ταχύτητα του τρένου $\upsilon(t)$ εάν ισχύει υ(0)=υ_0και ii) η οριακή ταχύτητά του.



$$\boxed{\upsilon(t) = -u_0 + \frac{F_{ext}}{M_c + \lambda t}\, t + \frac{M_c}{M_c + \lambda t}(u_0 + \upsilon_0)}$$

Επιτάχυνση τρένου

$$\alpha(t) = -\frac{M_c\,\lambda}{(M_c + \lambda t)^2}(u_0 + \upsilon_0) + \frac{F_{ext}}{M_c + \lambda t} - \frac{F_{ext}\,\lambda\, t}{(M_c + \lambda t)^2} = \frac{1}{(M_c + \lambda t)^2}\{-M_c\,\lambda(u_0 + \upsilon_0) + F_{ext}\,M_c\}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{(M_c + \lambda t)^2}\{-M_c\,\lambda(u_0 + \upsilon_0) + F_{ext}\,M_c\} \Rightarrow x(t) = x_0 + \cdots$$

Θέση τρένου

7. Ριπή πολυβόλου

Εφαρμογή 7: Πολυβόλο εκτοξεύει βλήματα βάρους $m_0 = 50\ gr$ με σταθερό ρυθμό και με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 1000\ {}^{m}/_{sec}$. Ο πολυβολητής μπορεί να εξασκήσει στο πολυβόλο μέση δύναμη *150 Nt*. Ποιό το μέγιστο πλήθος βλημάτων που μπορεί να βάλλει ο πολυβολητής με αυτή τη δύναμη;

Το όπλο πρέπει να συγκρατηθεί από τον πολυβολυτή και να του ασκηθεί δύναμη.

Σύστημα

Όπλο μαζί με σφαίρες και εξωτερική δύναμη είναι αυτή αυτή που ασκεί στο σύστημα ο πολυβολητής.

Θεωρούμε ότι σε χρόνο Δt έχουν εκτοξευθεί n σφαίρες που αντιστοιχεί σε μάζα
$\delta M = -\Delta M = n\, m_0 > 0$

Μάζα όπλου

$M(t+\Delta t) = M(t) - n\, m_0$

$P(t) = M(t)\, \upsilon(t)$

$P(t+\Delta t) = (M(t) - \delta M)(\upsilon(t) + \Delta\upsilon(t)) + \delta M\, u_0$

Συνιστώσα ορμής μόνο κατά μήκος άξονα x

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = M(t)\,\upsilon(t) - \delta M\,\upsilon(t) - M(t)\upsilon(t) - \delta M\cancel{\Delta}\upsilon(t) + \delta M\, u_0 = \delta M\,(u_0 - \upsilon(t))$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = (u_0 - \upsilon(t))\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\delta M}{\Delta t} = (u_0 - \upsilon(t))\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\big(M(t+\Delta t) - M(t)\big)}{\Delta t} = -\,(u_0 - \upsilon(t))\frac{dM}{dt}$$

7. Ριπή πολυβόλου

Εφαρμογή 7: Πολυβόλο εκτοξεύει βλήματα βάρους $m_0 = 50\ gr$ με σταθερό ρυθμό και με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 1000\ {}^{m}/_{sec}$. Ο πολυβολητής μπορεί να εξασκήσει στο πολυβόλο μέση δύναμη *150 Nt*. Ποιό το μέγιστο πλήθος βλημάτων που μπορεί να βάλλει ο πολυβολητής με αυτή τη δύναμη;

Σύστημα

Όπλο μαζί με σφαίρες και εξωτερική δύναμη είναι αυτή αυτή που ασκεί στο σύστημα ο πολυβολητής.

Το όπλο πρέπει να συγκρατηθεί από τον πολυβολυτή και να του ασκηθεί δύναμη.

Θεωρούμε ότι σε χρόνο τ=Δt έχουν εκτοξευθεί n σφαίρες που αντιστοιχεί σε μάζα $\delta M = -\Delta M = n\, m_0 > 0$

$$M(t + \Delta t) = M(t) - n\, m_0$$

$$F_{ext} = -(u_0 - \upsilon(t))\frac{dM}{dt}$$

Θεωρούμε ότι το όπλο μαζί με τον πολυβολητή δεν κινούνται

$$F_{ext} = -\, u_0 \frac{dM}{dt}$$

$$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t)$$

$$\int_{t}^{t+\Delta t} F_{ext}\ dt' = -u_0 \int_{M(t)}^{M(t+\Delta t)} dM \Rightarrow \bar{F}_{ext}\, \Delta t = -u_o [M]_{M(t)}^{M(t+\Delta t)} \Rightarrow \bar{F}_{ext}\, \Delta t = -u_o(\Delta M) \Rightarrow$$

$$\Delta M = -\delta M$$

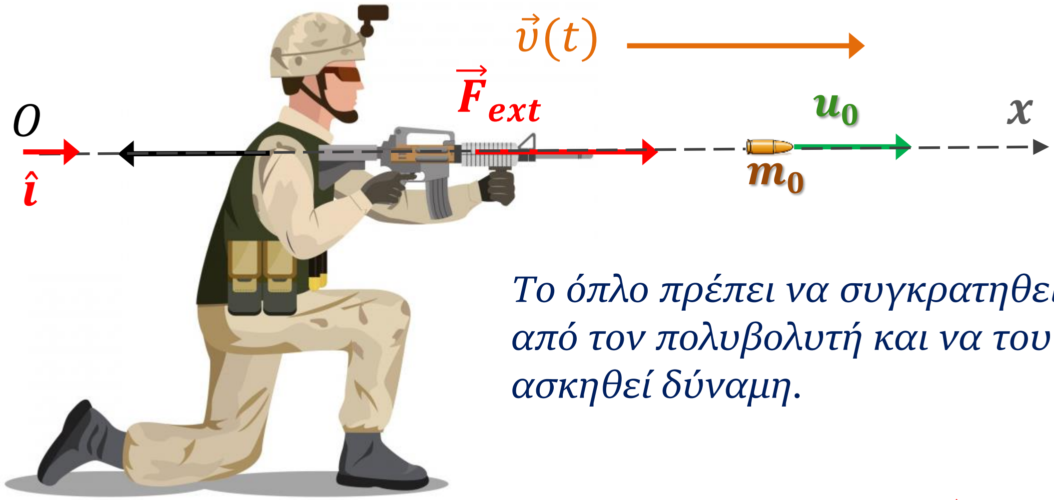
$$\bar{F}_{ext}\, \Delta t = -u_o(-n\, m_0) \Rightarrow \frac{n}{\Delta t} = \frac{\bar{F}_{ext}}{u_0 m_0} \Rightarrow \frac{n}{\Delta t} = 3\ \frac{\beta\lambda\eta\mu\alpha\tau\alpha}{sec}$$

Με τη συγκεκριμένη μέση δύναμη δεν μπορεί να ξεπεραστεί αυτός ο ρυθμός βολής.

Σε χρόνο *Δt = 60 sec* $\qquad n = 180$

7. Ριπή πολυβόλου

Εφαρμογή 7: Πολυβόλο εκτοξεύει βλήματα βάρους $m_0 = 50\ gr$ με σταθερό ρυθμό και με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 1000\ {}^{m}/_{sec}$. Ο πολυβολητής μπορεί να εξασκήσει στο πολυβόλο μέση δύναμη *150 Nt*. Ποιό το μέγιστο πλήθος βλημάτων που μπορεί να βάλλει ο πολυβολητής με αυτή τη δύναμη;



$$\vec{F}_{ext} = M(t)\frac{d\vec{V}(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(\vec{v}_{rel})$$

Το όπλο πρέπει να συγκρατηθεί από τον πολυβολυτή και να του ασκηθεί δύναμη.

Θεωρούμε ότι σε χρόνο Δt έχουν εκτοξευθεί n σφαίρες που αντιστοιχεί σε μάζα $\delta M = -\Delta M = n\, m_0 > 0$

$\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}(t)$

$M(t + \Delta t) = M(t) - n\, m_0$

Συνιστώσες κατά μήκος άξονα x

$$F_{ext} = M(t)\frac{dv(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt}(u_0 - v(t))$$

$$F_{ext} = -\, u_0 \frac{dM}{dt}$$

Θεωρούμε ότι το όπλο μαζί με τον πολυβολητή δεν κινούνται

Λύνοντας με τον ίδιο τρόπο την εξίσωση καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε έτοιμη την διανυσματική εξίσωση και δουλεύουμε με τη συνιστώσα της στη διεύθυνση ενδιαφέροντος. Ενώ προηγούμενως υπολογίσαμε από την αρχή την εξίσωση μόνο στην διεύθυνση ενδιαφέροντος.