ΕΝΟΤΗΤΑ 5 : ΝΟΜΟΙ ΝΕΥΤΩΝΑ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (5 Ασκήσεις)

Α. ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (1)

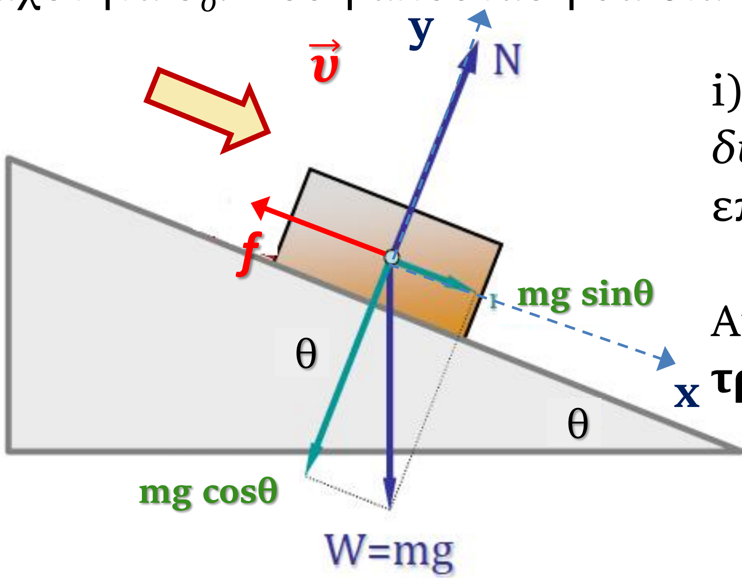
Β. ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΑΖΩΝ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (1)

Γ. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ (1)

Δ. ΚΙΝΗΣΗ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΕΣΟΝ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ (2)

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας *m δύναται να ολισθαίνει* ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_o. Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



i) Αξιοποιούμε την πληροφορία ότι ο κύβος έχει τη *δυνατότητα ισοταχούς ολίσθησης* στο κεκλιμένο επίπεδο.

Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον **συντελεστή τριβής ολίσθησης** μ_1:

Εφαρμογή 2^{ου} Νόμου Νεύτωνα

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow mgsin\theta - f = 0 \Leftrightarrow mgsin\theta - \mu_1 N = 0 \Leftrightarrow mgsin\theta = \mu_1 N \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N - mgcos\theta = 0 \Leftrightarrow mgcos\theta = N \qquad \textbf{(2)}$$

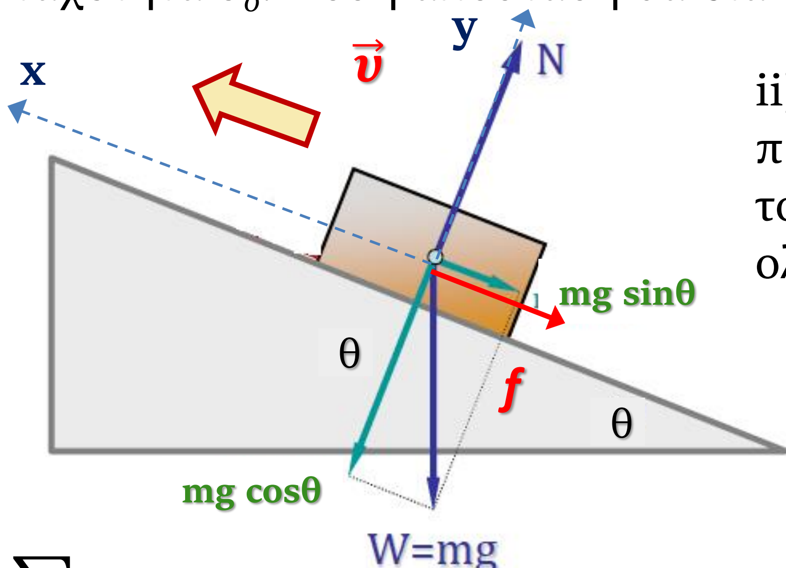
Από (1), (2) έχουμε

$$\boxed{\mu_1 = \tan\theta}$$

Ο συντελεστής χαρακτηρίζει την ολίσθηση του κύβου στο συγκεκριμένο κεκλιμένο επίπεδο ανεξαρτήτως φοράς κίνησης.

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας m *δύναται να ολισθαίνει* ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_o. Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



ii) Μελέτη της κίνησης του κύβου όταν εκτοξεύεται προς τα επάνω. Προσαρμόζουμε τους άξονες ώστε το x να είναι θετικό προς τα επάνω. Η τριβή ολίσθησης f είναι προς τα κάτω.

Εφαρμογή 2ου Νόμου Νεύτωνα

$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow -mgsin\theta - \boldsymbol{f} = ma \Leftrightarrow -mgsin\theta - \boldsymbol{\mu_1 N} = ma \quad \textbf{(1)}$$

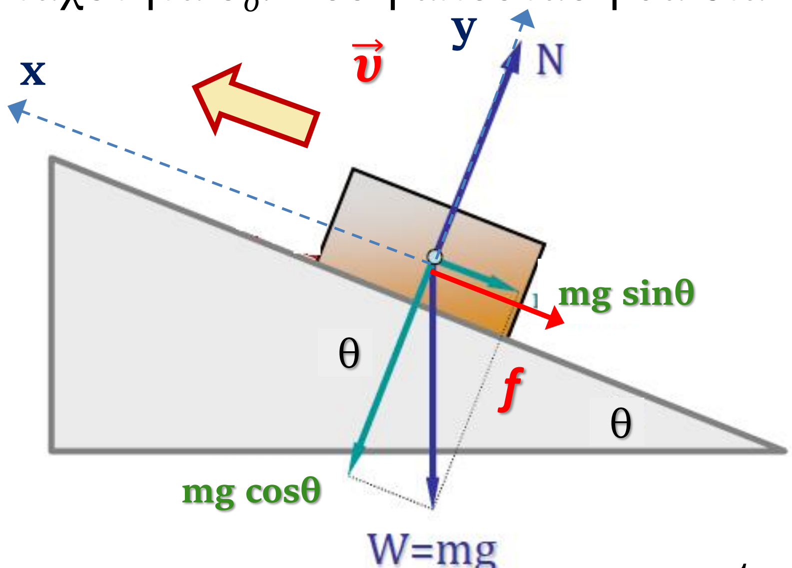
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N - mgcos\theta = 0 \Leftrightarrow mgcos\theta = N \quad \textbf{(2)}$$

Από (1), (2) έχουμε $\quad -mgsin\theta - \boldsymbol{tan\theta} mgcos\theta = ma \Leftrightarrow \alpha = -2gsin\theta$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -2gsin\theta \Leftrightarrow \int_0^t \frac{dv(t')}{dt'}dt' = -2gsin\theta \int_0^t dt' \Leftrightarrow v(t) - \overset{v_0}{v(0)} = -2\, g\, t\, sin\theta$$

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας m *δύναται να ολισθαίνει* ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_o. Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;



$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - 2\, g\, t\, sin\theta$$

Άρα ο κύβος ακινητοποιείται σε χρόνο

$$\boxed{\tau = \frac{\upsilon_0}{2gsin\theta}}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \upsilon_0(t) - 2\, g\, t\, sin\theta \Leftrightarrow \int_0^t \frac{dx(t')}{dt'}dt' = \int_0^t \upsilon_0 dt' - 2gsin\theta \int_0^t t'dt'$$

$$\Leftrightarrow x(t) - x(0) = \upsilon_o t - gt^2 sin\theta \Leftrightarrow x(t) = \upsilon_o t - gt^2 sin\theta$$

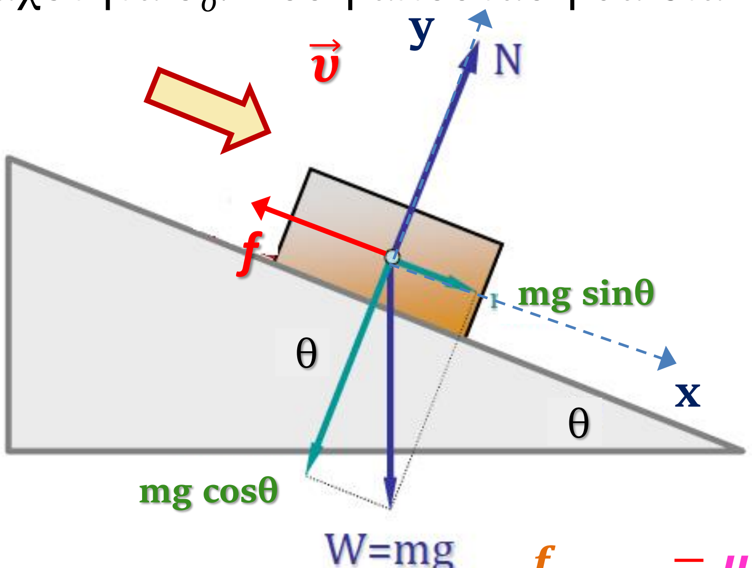
Άρα μέχρι να ακινητοποιηθεί ο κύβος θα διανύσει απόσταση $s = x(\tau)$.

Για t=0 ο κύβος βρίσκονταν στην αρχή του άξονα x. Άρα x(0)=0

$$\boxed{s = \frac{{\upsilon_0}^2}{4gsin\theta}}$$

1. Ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή

Εφαρμογή: Κύβος μάζας m *δύναται να ολισθαίνει* ισοταχώς σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Ο κύβος εκτοξεύεται προς τα επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα υ_o. Πόση απόσταση θα διανύσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω πάλι;

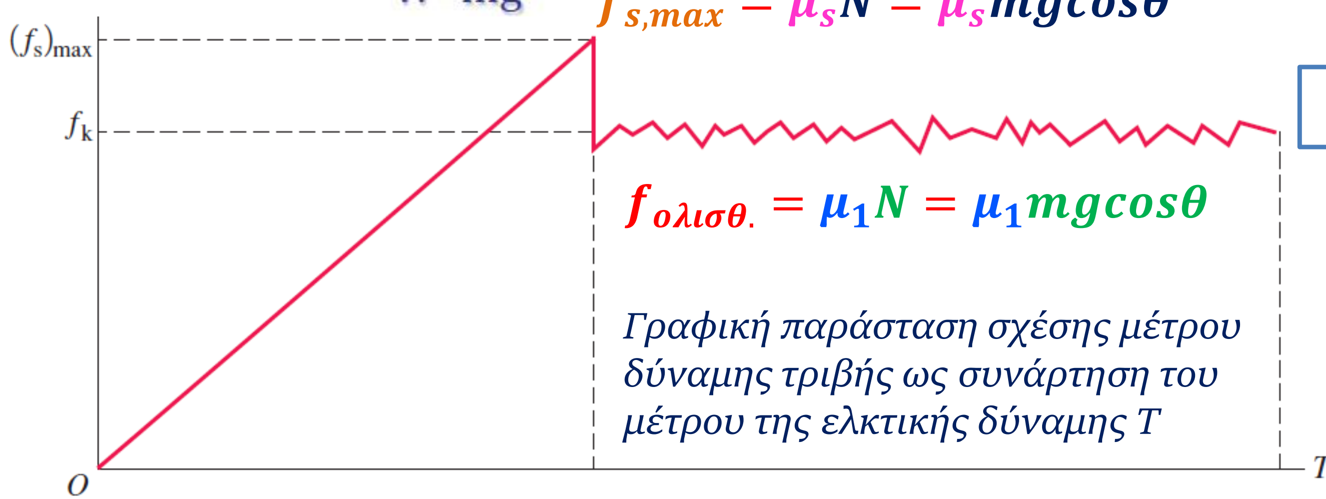


iii) **Μόλις φτάσει στο ανώτατο σημείο, θα ολισθήσει προς τα κάτω;**

Μπορεί η ελκτική δύναμη T=$mgsin\theta$ να υπερνικήσει τη μέγιστη στατική τριβή;

$$\frac{T}{f_{s,max}} = \frac{mgsin\theta}{\mu_s mgcos\theta} = \frac{\boldsymbol{tan\theta}}{\mu_s} = \frac{\boldsymbol{\mu_1}}{\mu_s}$$

$$\boldsymbol{f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s mgcos\theta}$$



$$\boldsymbol{f_{ολισθ.} = \mu_1 N = \mu_1 mgcos\theta}$$

Γραφική παράσταση σχέσης μέτρου δύναμης τριβής ως συνάρτηση του μέτρου της ελκτικής δύναμης T

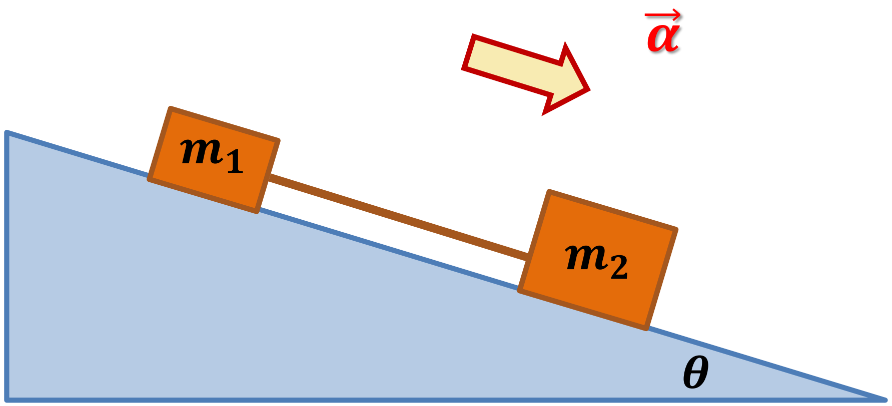
$$\boxed{\boldsymbol{\mu_1 \leq \mu_s \Rightarrow T \leq f_{s,max}}}$$

Άρα ο κύβος δεν θα ολισθήσει εκ νέου προς τα κάτω.

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμογή: Οι μάζες m_1 και m_2 είναι προσδεδεμένες στην *αβαρή ράβδο*. Το σύστημα ολισθαίνει με επιτάχυνση α. Να βρεθούν τα εξής:

α) Να υπολογισθεί η τάση T στην ράβδο.
β) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση α.
γ) Ποιές αλλαγές συμβαίνουν εάν εναλλαγούν οι μάζες;



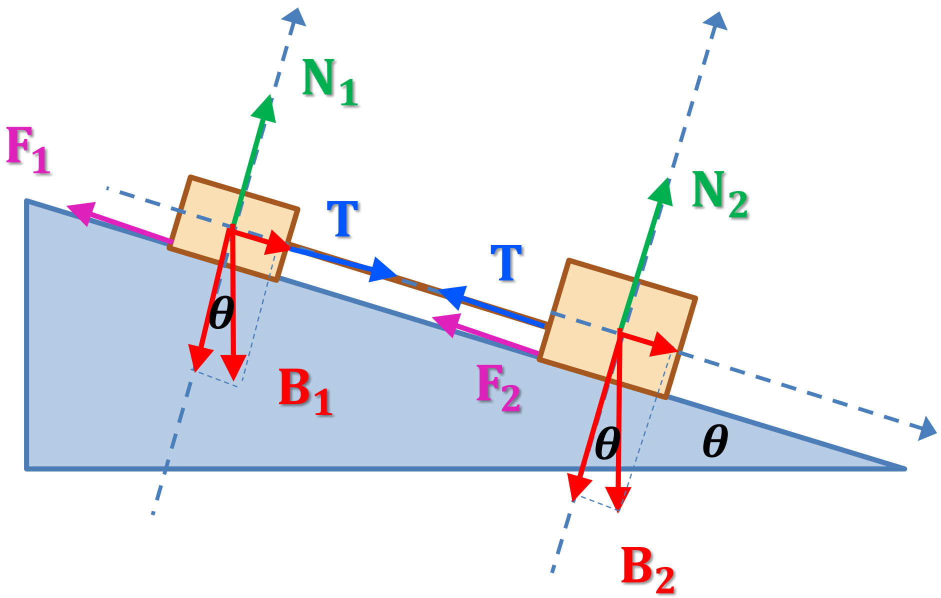
Μάζες	Συντελεστές τριβής ολίσθησης
$m_1 = 1.65\ kg$	$\mu_1 = 0.226$
$m_2 = 3.30\ kg$	$\mu_2 = 0.113$

Παρατήρηση: Αφού η ράβδος είναι *αβαρής* αν εφαρμόσουμε τον 2^o Νόμο Νεύτωνα καταλήγουμε στο ότι η τάση στο ένα άκρο της ράβδου είναι ίση με την τάση στο άλλο άκρο της.

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμογή: Οι μάζες m_1 και m_2 είναι προσδεδεμένες στην αβαρή ράβδο. Το σύστημα ολισθαίνει με επιτάχυνση α.

α) Να υπολογισθεί η τάση T στην ράβδο.



Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες κατά μήκος του παράλληλου και κάθετου στην κίνηση των μαζών.

Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο Νεύτωνα για κάθε σώμα και κάθε συνιστώσα.

Η ράβδος συγκρατεί τις δύο μάζες μαζί.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 g sin\theta - \mu_1 N_1 + T = m_1 \alpha \\ N_1 = m_1 g cos\theta \end{array}\right\}$$

$$m_1 g sin\theta - \mu_1 m_1 g cos\theta + \mathrm{T} = m_1 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = g sin\theta - \mu_1 g cos\theta + \mathrm{T}/m_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_2 g sin\theta - \mu_2 N_2 - T = m_2 \alpha \\ N_2 = m_2 g cos\theta \end{array}\right\}$$

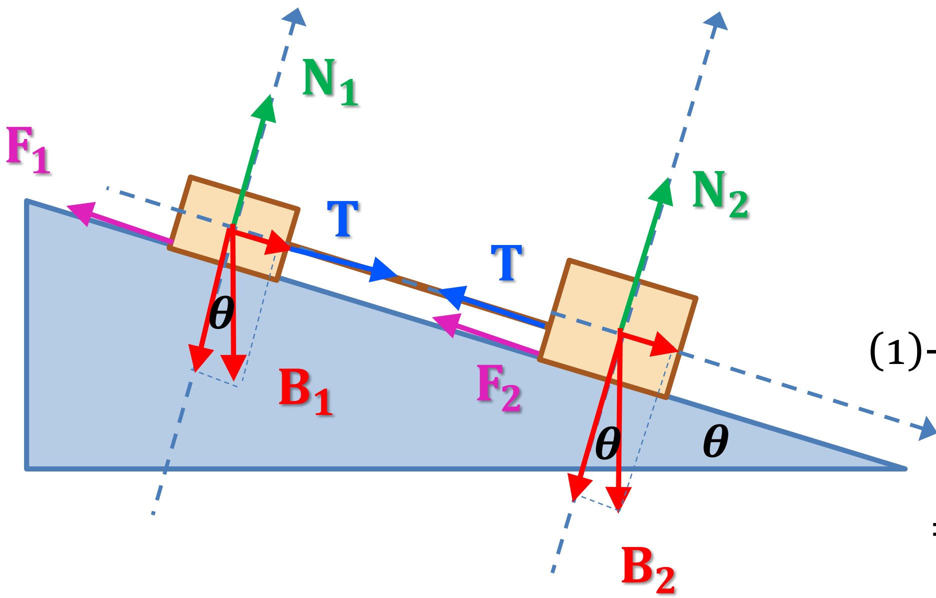
$$m_2 g sin\theta - \mu_2 m_2 g cos\theta = m_2 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha = g sin\theta - \mu_2 g cos\theta - \mathrm{T}/m_2}$$

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

Εφαρμογή: Οι μάζες m_1 και m_2 είναι προσδεδεμένες στην αβαρή ράβδο. Το σύστημα ολισθαίνει με επιτάχυνση α.

α) Να υπολογισθεί η τάση T στην ράβδο.



$$\alpha = gsin\theta - \mu_1 gcos\theta + \mathrm{T}/m_1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\alpha = gsin\theta - \mu_2 gcos\theta - \mathrm{T}/m_2 \qquad \textbf{(2)}$$

(1)-(2) $\Rightarrow -(\mu_1 - \mu_2)\cos\theta + T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\, g\, cos\theta\, m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \qquad \textbf{(3)}$$

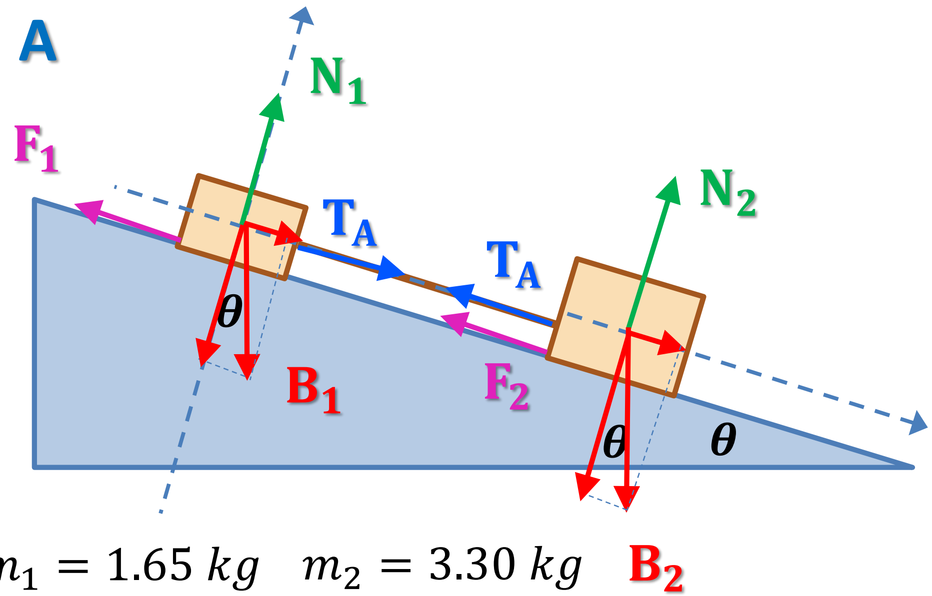
β) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση α.

(1),(3) $\Rightarrow$
$$\boxed{\alpha = gsin\theta - \mu_1 gcos\theta + \frac{(\mu_1 - \mu_2)\, g\, cos\theta\, m_2}{m_1 + m_2}}$$

ή (2),(3) $\Rightarrow$
$$\boxed{\alpha = gsin\theta - \mu_2 gcos\theta - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\, g\, cos\theta\, m_1}{m_1 + m_2}}$$

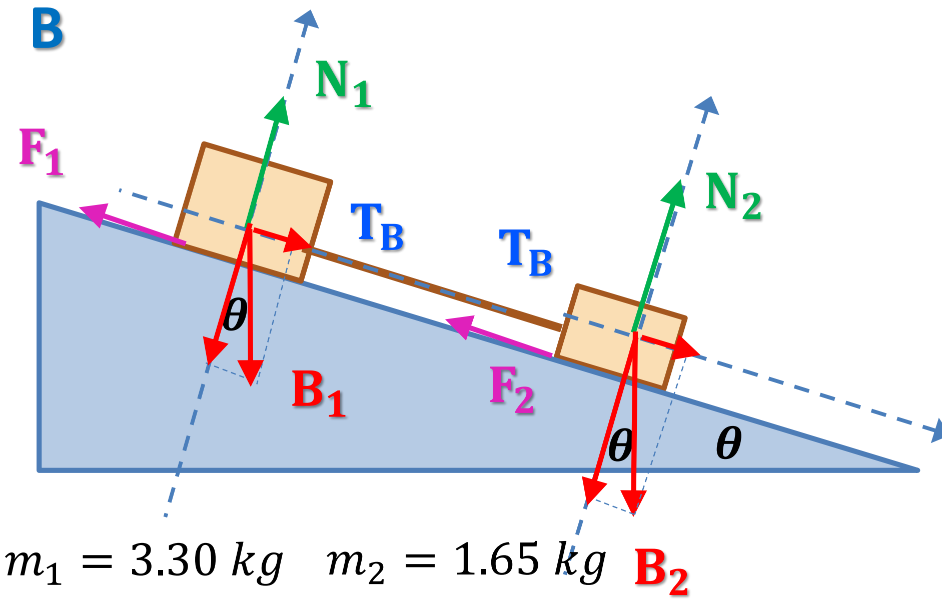
2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

γ) Ποιές αλλαγές συμβαίνουν εάν εναλλαγούν οι μάζες;



$m_1 = 1.65\ kg$ $m_2 = 3.30\ kg$

$\mu_1 = 0.226$ $\mu_2 = 0.113$ $\mu_1 > \mu_2$



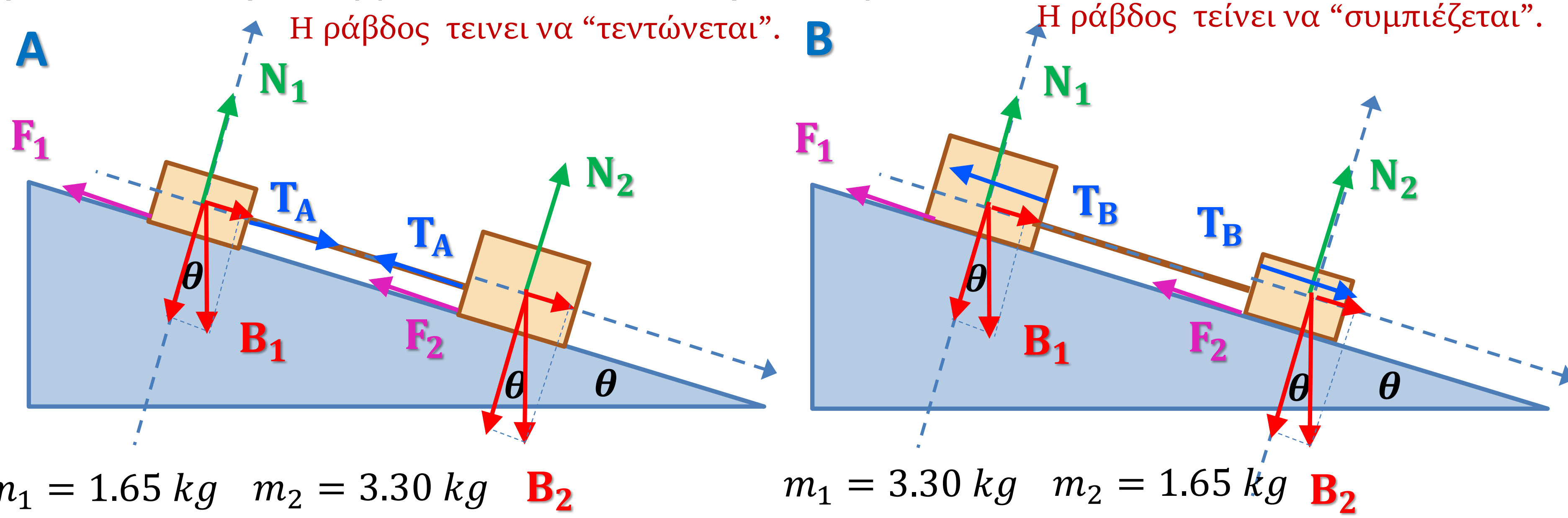
$m_1 = 3.30\ kg$ $m_2 = 1.65\ kg$

$\mu_1 = 0.113$ $\mu_2 = 0.226$ $\mu_1 < \mu_2$

$$T = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\ g\ cos\theta\ m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

2. Ολίσθηση συστήματος σε κεκλιμένο επίπεδο

γ) Ποιές αλλαγές συμβαίνουν εάν εναλλαγούν οι μάζες;



$m_1 = 1.65\ kg$ $m_2 = 3.30\ kg$

$\mu_1 = 0.226$ $\mu_2 = 0.113$ $\mu_1 > \mu_2$

$m_1 = 3.30\ kg$ $m_2 = 1.65\ kg$

$\mu_1 = 0.113$ $\mu_2 = 0.226$ $\mu_1 < \mu_2$

$$T = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\ g\ cos\theta\ m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

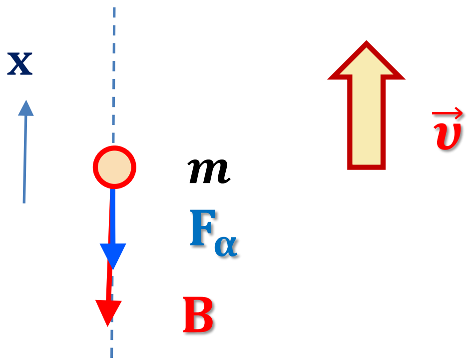
$$T_B = -T_A$$

1) Το μέτρο της τάσης εξαρτάται από την διαφορά των συντελεστών τριβής των σωμάτων και τις μάζες τους.

2) Αν εναλλαγούν οι μάζες τότε η φορά της τάσης στην ράβδο αλλάζει.

3. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και *αντίσταση* $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.



i) Υπολογισμός υ(t)

$$\sum F_x = m\,\alpha \Leftrightarrow -mg - \kappa\upsilon = m\alpha \Leftrightarrow \frac{d\upsilon(t)}{dt} = -g - \frac{\kappa}{m}\upsilon(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\kappa}{m}\left(\upsilon + \frac{m}{\kappa}g\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\upsilon + \frac{m}{\kappa}g\right) = -\frac{\kappa}{m}\left(\upsilon + \frac{m}{\kappa}g\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\kappa}g\right) = 0$$

Θέτουμε $u = u(t) = \upsilon + \frac{m}{\kappa}g$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\kappa}{m}(u) \Rightarrow \frac{1}{u}du = -\frac{\kappa}{m}dt \Rightarrow \int \frac{1}{u}du = \int -\frac{\kappa}{m}dt \Rightarrow \ln u = -\frac{\kappa}{m}t + c_1, \qquad c_1 \in R$$

$$\ln u = \ln e^{-\frac{\kappa}{m}t + c_1} \Rightarrow u = e^{-\frac{\kappa}{m}t + c_1} \Rightarrow u = ce^{-\frac{\kappa}{m}t}, \qquad c \in R$$

Άρα $\qquad \upsilon(t) = u - \frac{m}{\kappa}g = ce^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g$

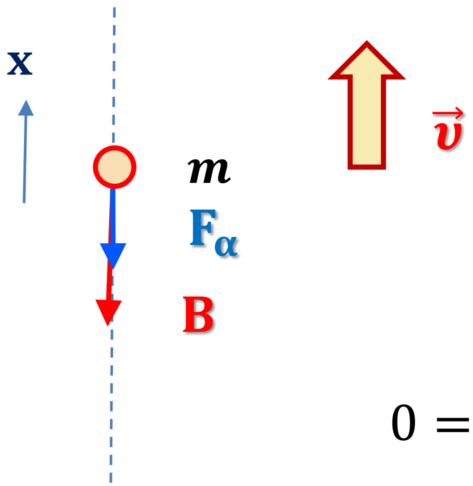
Για t=0 έχουμε υ(0)=υ_0. Άρα $c = \upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g$

Επομένως

$$\boxed{\upsilon(t) = \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g}$$

3. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και *αντίσταση* $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.



ii) Υπολογισμός χρόνου ανόδου t_α

$$\upsilon(t) = (\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g$$

Για t=t_α έχουμε υ=ο. Το σώμα σταματά να ανεβαίνει.

$$0 = \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} - \frac{m}{\kappa}g \Rightarrow \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{m}{\kappa}g$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{\frac{m}{\kappa}g}{\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g} \Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{\frac{m}{\kappa}g}{\frac{\upsilon_0\kappa + mg}{\kappa}} \Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = \frac{mg}{\upsilon_0\kappa + mg}$$

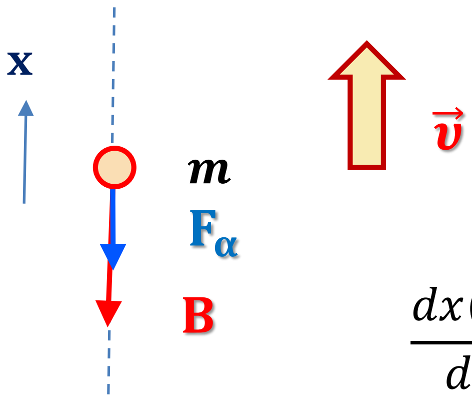
$$\Rightarrow e^{-\frac{\kappa}{m}t_\alpha} = e^{\ln\frac{mg}{\upsilon_0\kappa + mg}} \Rightarrow -\frac{\kappa}{m}t_\alpha = \ln\frac{mg}{\upsilon_0\kappa + mg} \Rightarrow \frac{\kappa}{m}t_\alpha = \ln\frac{\upsilon_0\kappa + mg}{mg}$$

Επομένως

$$\boxed{t_\alpha = \frac{m}{\kappa}\ln(1 + \frac{\upsilon_0\kappa}{mg})}$$

3. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.



iii) Υπολογισμός κατακόρυφης απόστασης *x(t)*

$$\upsilon(t) = (\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g \Rightarrow dx = \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t}dt - \frac{m}{\kappa}gdt$$

$$\Rightarrow \int dx = \int \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t}dt - \int \frac{m}{\kappa}gdt \Rightarrow \int dx = \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)\int e^{-\frac{\kappa}{m}t}dt - \int \frac{m}{\kappa}gdt$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)\left(-\frac{m}{\kappa}\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}gt + c, \qquad c \in R$$

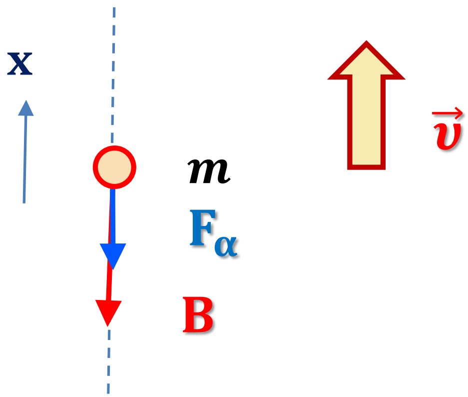
Για t=0 έχουμε x(0)=0. Άρα $c = \left(\frac{m}{\kappa}\right)\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)$

Επομένως

$$\boxed{x(t) = (\frac{m}{\kappa})\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) - \frac{m}{\kappa}gt}$$

3. Κατακόρυφη βολή με αντίσταση

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.



iv) Μέγιστο ύψος ανόδου h

$$t_\alpha = \frac{m}{\kappa}\ln(1+\frac{\upsilon_0\kappa}{mg})$$

Χρόνος ανόδου

$$x(t) = (\frac{m}{\kappa})\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) - \frac{m}{\kappa}gt$$

$$h = (\frac{m}{\kappa})\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}\{\frac{m}{\kappa}\ln(1+\frac{\upsilon_0\kappa}{mg})\}}) - \frac{m}{\kappa}g\{\frac{m}{\kappa}\ln(1+\frac{\upsilon_0\kappa}{mg})\}$$

$$= \left(\frac{m}{\kappa}\right)\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)\left(1 - e^{\ln\frac{mg}{mg+\upsilon_0\kappa}}\right) - g\frac{m^2}{\kappa^2}\ln(1+\frac{\upsilon_0\kappa}{mg})$$

$$= \left(\frac{m}{\kappa}\right)\left(\frac{\kappa\upsilon_0 + mg}{\kappa}\right)\left(1 - \frac{mg}{\kappa\upsilon_0 + mg}\right) - g\frac{m^2}{\kappa^2}\ln(1+\frac{\upsilon_0\kappa}{mg})$$

Επομένως

$$\boxed{h = \frac{m\upsilon_0}{\kappa} - g\frac{m^2}{\kappa^2}\ln(1+\frac{\upsilon_0\kappa}{mg})}$$

Προσέγγιση συναρτήσεων με σειρά Taylor

Ενίοτε απαιτείται να προχωρήσουμε σε **προσεγγιστικό υπολογισμό** σύνθετων συναρτήσεων ώστε να τις απλοποιήσουμε και να μελετήσουμε τη συμπεριφορά τους κοντά σε μια οριακή τιμή μεταβλητής.

$$x(t) = \left(\frac{m}{\kappa}\right)\left(v_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) - \frac{m}{\kappa}gt \qquad t_\alpha = \frac{m}{\kappa}\ln\left(1 + \frac{v_0\kappa}{mg}\right)$$

Η τιμή των παραπάνω συναρτήσεων εξαρτάται από την μεταβλητή κ. Θέλουμε να μελετήσουμε την τιμή τους για τιμές κ→ 0.

Ανάπτυξη της τιμής συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης f με τη βοήθεια δυναμοσειράς κατά Taylor κοντά στο σημείο x_0:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)$$

Προσέγγιση συναρτήσεων με σειρά Taylor

Παραδείγματα ανάπτυξης συναρτησεων σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x_o=0$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)$$

$$\boldsymbol{f(x) = e^x} \qquad \boldsymbol{f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x}$$

$$f(x) = \frac{(x-0)^0}{0!} f(0) + \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$= 1 + \mathrm{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

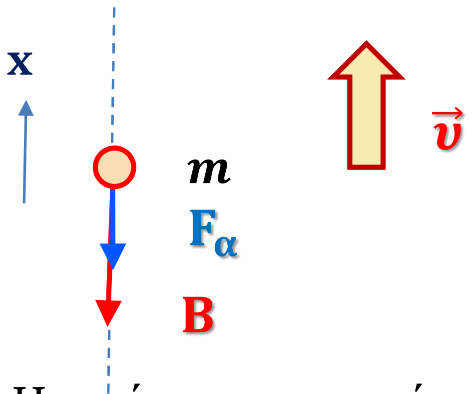
$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x+1)} \qquad \boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x+1}} \qquad \boldsymbol{f''^{(x)} = -\frac{1}{(x+1)^2}} \qquad \boldsymbol{f''^{(x)} = \frac{2}{(x+1)^3}}$$

$$f(x) = \frac{(x-0)^0}{0!} f(0) + \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$= 0 + \mathrm{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

Προσέγγιση συναρτήσεων με σειρά Taylor

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.



v) Διερεύνηση

$$\upsilon = (\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g$$

$$x(t) = (\frac{m}{\kappa})\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) - \frac{m}{\kappa}gt$$

Η τιμή των συναρτήσεων εξαρτάται από την μεταβλητή κ. **Θέλουμε να μελετήσουμε την τιμή τους για τιμές κ→ 0**.

$$\boxed{e^x = 1 + \mathrm{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots}$$

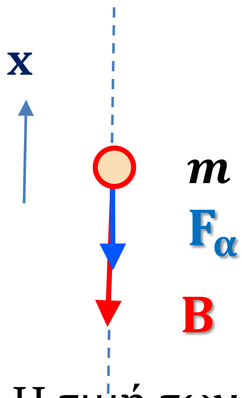
$$e^{-\frac{\kappa}{m}t} = 1 + \left(-\frac{\kappa}{m}t\right) + \frac{1}{2}(-\frac{\kappa}{m}t)^2 + \cdots$$

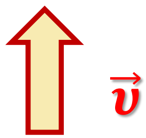
$$\upsilon(t) = -\frac{m}{\kappa}g + \left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)\left\{1 - \frac{\kappa}{m}t + \frac{1}{2}\frac{\kappa^2}{m^2}t^2 + \cdots\right\} = \upsilon_0 - gt + \kappa(\dots)$$

Εάν η αντίσταση κ→ 0 $\quad \upsilon(t) = \upsilon_0 - gt$

Προσέγγιση συναρτήσεων με σειρά Taylor

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.





v) Διερεύνηση

$$\upsilon = (\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}g$$

$$x(t) = (\frac{m}{\kappa})\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) - \frac{m}{\kappa}gt$$

Η τιμή των συναρτήσεων εξαρτάται από την μεταβλητή κ. **Θέλουμε να μελετήσουμε την τιμή τους για τιμές κ→ 0**.

$$1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t} = -\left(-\frac{\kappa}{m}t\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\kappa}{m}t\right)^2 - \frac{1}{6}(-\frac{\kappa}{m}t)^3 + \cdots$$

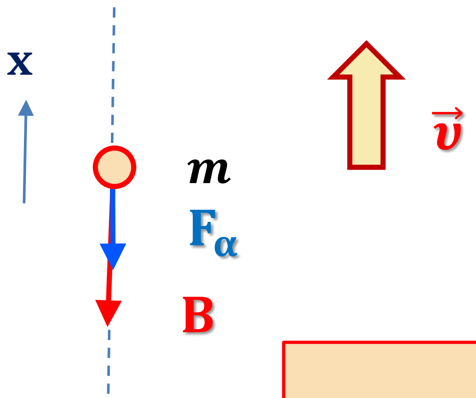
$$x(t) = -\frac{m}{\kappa}gt + \left(\frac{m}{\kappa}\right)\left(\upsilon_0 + \frac{m}{\kappa}g\right)\left\{\frac{\kappa}{m}t - \frac{1}{2}\frac{\kappa^2}{m^2}t^2 + \cdots\right\} = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \kappa(\dots)$$

Εάν η αντίσταση κ→ 0

$$x(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Προσέγγιση συναρτήσεων με σειρά Taylor

Μελέτη: Κατακόρυφη βολή μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0 και αντίσταση $F_\alpha = -\kappa\upsilon$.



v) Διερεύνηση

$$h = \frac{m\upsilon_0}{\kappa} - g\frac{m^2}{\kappa^2}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_0\kappa}{mg}\right) \qquad t_\alpha = \frac{m}{\kappa}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_0\kappa}{mg}\right)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\upsilon_0\kappa}{mg}\right) = \frac{\upsilon_0\kappa}{mg} - \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_0\kappa}{mg}\right)^2 + \cdots$$

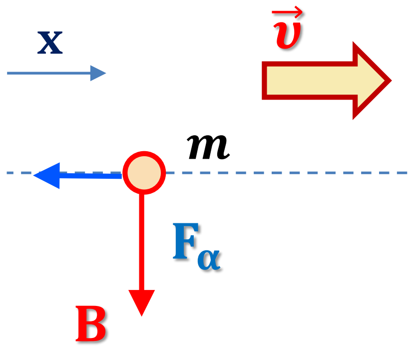
$$h = \frac{m\upsilon_0}{\kappa} - g\frac{m^2}{\kappa^2}\left\{\frac{\upsilon_0\kappa}{mg} - \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_0\kappa}{mg}\right)^2 + \cdots\right\} = \frac{1}{2}\frac{{\upsilon_0}^2}{g} + \kappa(\ldots)$$

$$t_\alpha = \frac{m}{\kappa}\left\{\frac{\upsilon_0\kappa}{mg} - \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_0\kappa}{mg}\right)^2 + \cdots\right\} = \frac{\upsilon_0}{g} + \kappa(\ldots)$$

Εάν η αντίσταση κ→ 0 $\qquad h = \frac{1}{2}\frac{{\upsilon_0}^2}{g} \qquad t_\alpha = \frac{\upsilon_0}{g}$

4. Κίνηση σε μέσον με αντίσταση

Μελέτη: Κίνηση σε μέσον με αντίσταση $F_\alpha = -D\upsilon^2, \; D > 0$



i) Υπολογισμός υ(t)

$$\sum F_x = m\,\alpha \Leftrightarrow -D\,\upsilon^2 = m\alpha \Leftrightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{D}{m}\upsilon^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\upsilon^2}d\upsilon = \frac{D}{m}dt$$

$$\Leftrightarrow \int -\frac{1}{\upsilon^2}d\upsilon = \int \frac{D}{m}dt \Leftrightarrow \frac{1}{\upsilon} = \frac{D}{m}t + c, \qquad c \in R$$

Για t=0 θέτουμε υ(0)=υ_0. Άρα $c = \frac{1}{\upsilon_0}$

Επομένως

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{\upsilon_0}{1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t}}$$

ii) Υπολογισμός x(t)

$$\frac{d}{dt}\left(\ln(1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t)\right) = \frac{D\upsilon_0}{m}\frac{1}{1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon_0}{1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t} \Leftrightarrow dx = \frac{\upsilon_0}{1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t}dt \Leftrightarrow \int dx = \upsilon_0 \int \frac{1}{1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t}dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{m}{D}\ln\left(1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t\right) + c, \qquad c \in R$$

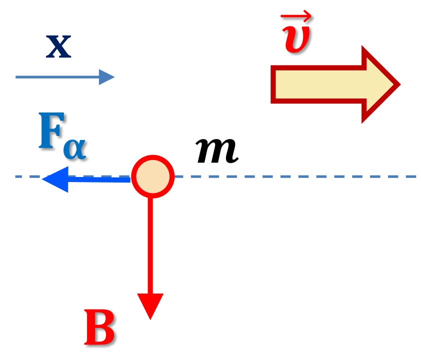
Για t=0 θέτουμε x(0)=x_0. Άρα $c = x_0$

Επομένως

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{m}{D}\ln\left(1 + \frac{D}{m}\upsilon_0 t\right)}$$

5. Κίνηση σε μέσον με αντίσταση

Μελέτη: Κίνηση σε μέσον με αντίσταση $F_\alpha = -b\sqrt{\upsilon},\ \upsilon > 0$



i) Υπολογισμός υ(t)

Η παράμετρος ενσωματώνει τη μάζα

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -b\sqrt{\upsilon} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\upsilon}}d\upsilon = bdt \Leftrightarrow \int -\frac{1}{\sqrt{\upsilon}}d\upsilon = \int b\,dt$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{\upsilon} = bt + c, \qquad c \in R$$

Για t=0 θέτουμε υ(0)=υ_0.
Άρα $c = -2\sqrt{\upsilon_0}$

Επομένως $$\boxed{\upsilon(t) = (\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t)^2}$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται σε χρόνο $$\boxed{\tau = \frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{b}}$$

$$\frac{d}{dt}\left((\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t)^3\right) = -\frac{3b}{2}(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t)^2$$

ii) Υπολογισμός θέσης x(t)

$$\frac{dx}{dt} = (\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t)^2 \Leftrightarrow \int dx = \int \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t\right)^2 dt \Leftrightarrow x(t) = -\frac{2}{3b}(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t)^3 + c, c \in R$$

Για t=0 θέτουμε x(0)=x_0.
Άρα $c = x_0 + \frac{2}{3b}(\sqrt{\upsilon_0})^3$

Επομένως $$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{2}{3b}(\sqrt{\upsilon_0})^3 - \frac{2}{3b}(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{b}{2}t)^3}$$

Η απόσταση d που θα διανύσει μέχρι να ακινητοποιηθεί

$$\boxed{d = x(\tau) - x_0 = \frac{2}{3b}(\sqrt{\upsilon_0})^3}$$