ΕΝΟΤΗΤΑ 4 : ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

1. ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

- Διάνυσμα θέσης, ταχύτητα & επιτάχυνση
- Μοναδιαία διανύσματα

2. ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΑΓΜΕΝΕΣ

- Εφαρμογή

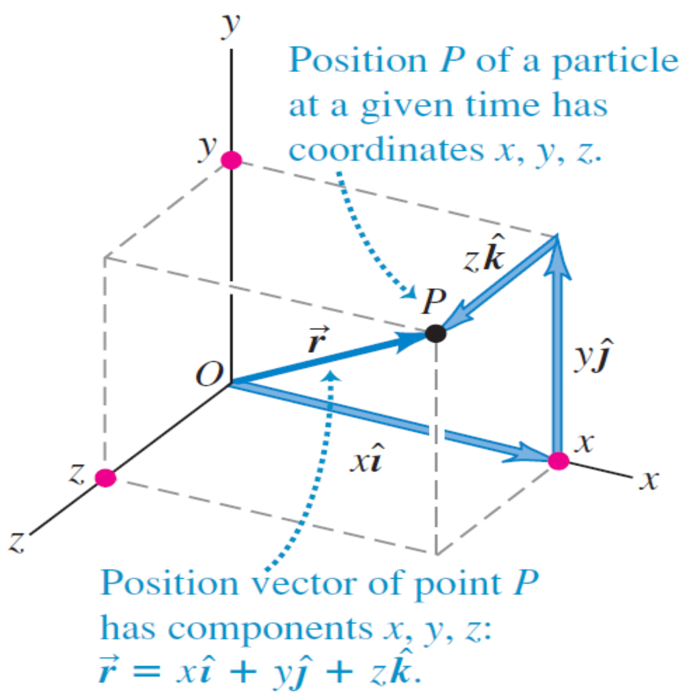
3. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΕΛΙΚΑΣ

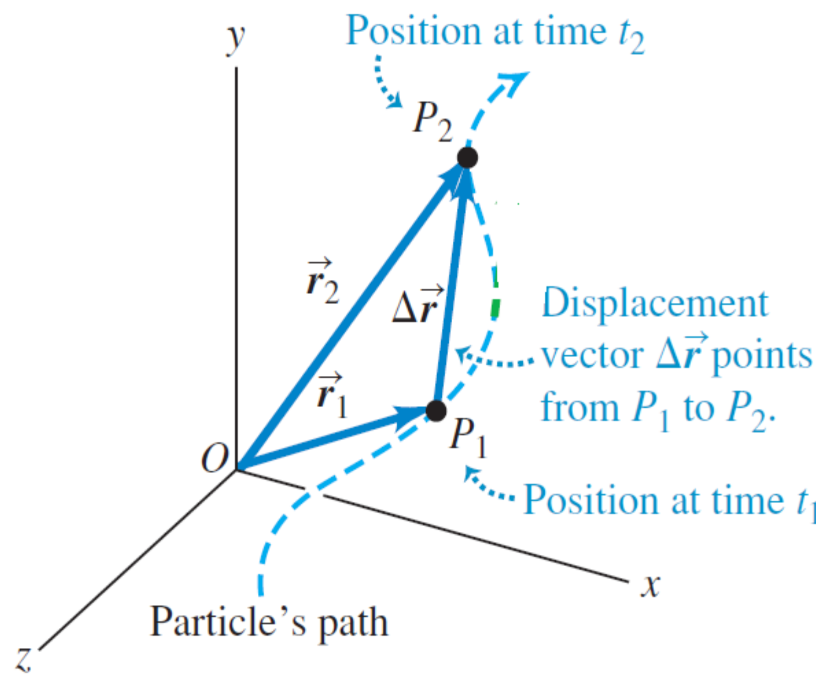
4. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

5. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα θέσης

Διάνυσμα θέσης: ένα *δέσμιο διάνυσμα*, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια *καμπύλη στον χώρο*, την *τροχιά του κινητού*

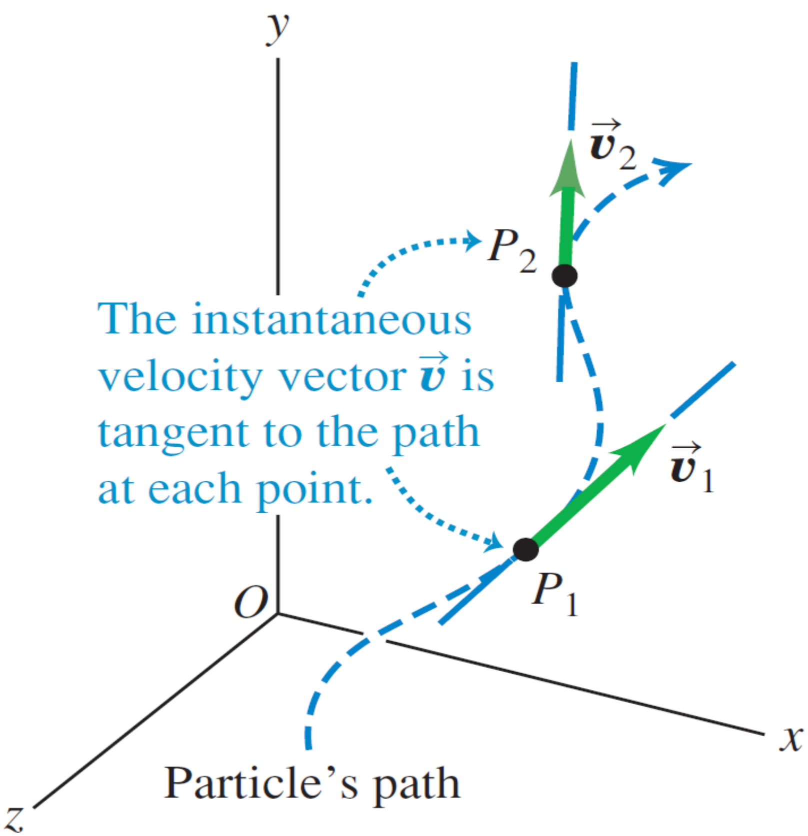




$$\boxed{\vec{r}(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}), \mathrm{z}(\mathrm{t})\ ) = \mathrm{x}(\mathrm{t})\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathrm{z}(\mathrm{t})\ \widehat{\boldsymbol{k}}}$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα ταχύτητας

Διάνυσμα ταχύτητας: Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\upsilon}(\mathrm{t})$ (instantaneous velocity) εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της.



$$\upsilon_x = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\upsilon_y = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

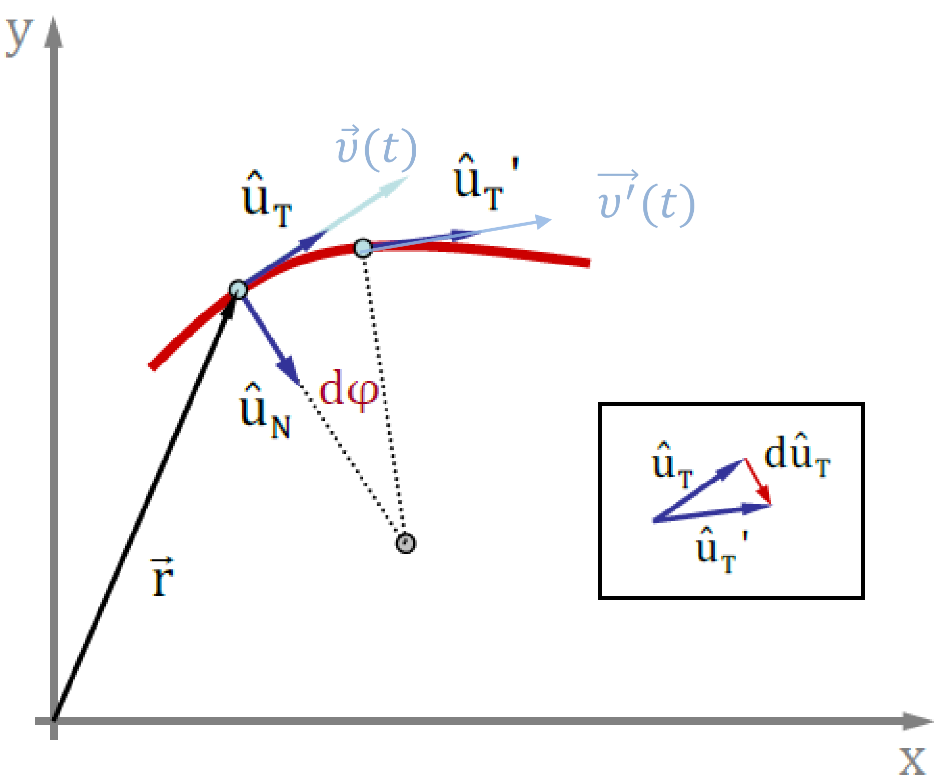
$$\upsilon_z = \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας **ταχύτητας** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της **αντίστοιχης συντεταγμένης**.

$$\vec{\upsilon}(\mathrm{t}) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dz(t)}{dt}\,\widehat{\boldsymbol{k}} = \upsilon_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \upsilon_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \upsilon_z\widehat{\boldsymbol{k}}$$

1. Μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_T$

Διάνυσμα ταχύτητας: Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{v}$(t) (instantaneous velocity) εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της.



$$\widehat{u_{\mathrm{T}}}(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\vec{v}(t)$$

$$\widehat{u_{\mathrm{T}}'}(t) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{v'}(t)\right|}\overrightarrow{v'}(t)$$

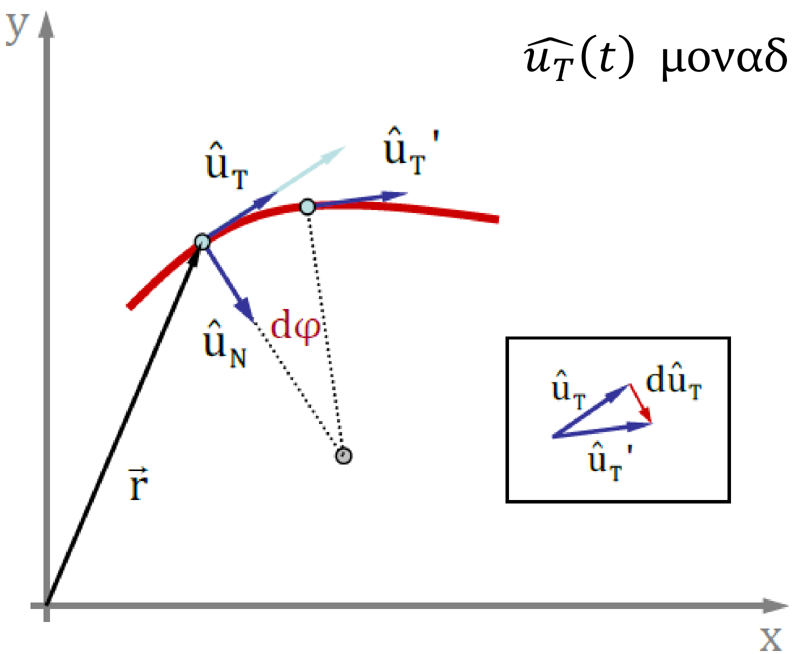
Μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο πάντα της τροχίας (στην κατεύθυνση της κίνησης).

Αλλάζει συνεχώς διεύθυνση για αυτό έχει εξάρτηση με το χρόνο t.

$$d\widehat{u_{\mathrm{T}}} = \widehat{u_{\mathrm{T}}'} - \widehat{u_{\mathrm{T}}}$$

1. Προσδιορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_N$

Εφαρμογή 1: Να δειχθεί ότι το $\boldsymbol{\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{\widehat{u_T}(t)}$



$$\widehat{u_T}(t) \text{ μοναδιαίο} \Rightarrow \widehat{u_T}(t)\cdot\widehat{u_T}(t) = |\widehat{u_T}(t)||\widehat{u_T}(t)|\cos 0^o = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\widehat{u_T}(t)\cdot\widehat{u_T}(t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\,\widehat{u_T}(t)\cdot\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\widehat{u_T}(t)\cdot\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} = 0}$$

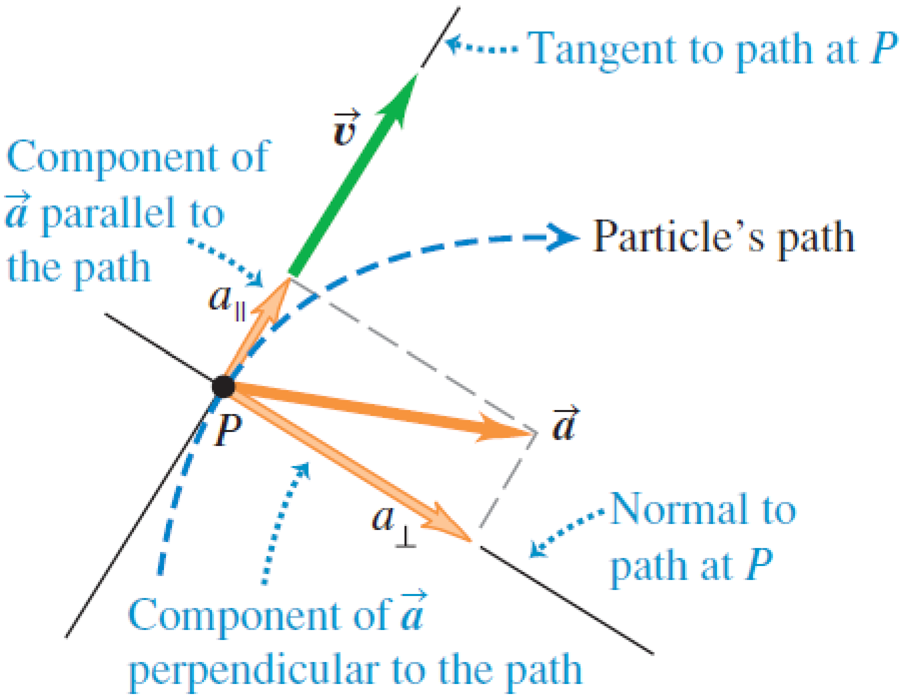
Αν το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
$\vec{A}$ & $\vec{B}$ είναι $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ τότε $\vec{A}\perp\vec{B}$

Αφού $\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} \perp \widehat{u_T}(t)$ τότε γράφουμε $\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} = \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|\widehat{u_N}(t)$

Όπου $\widehat{u_N}(t)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην τροχιά (και στο $\boldsymbol{\widehat{u_T}(t)}$).
Έχει κατεύθυνση προς την κοίλη πλευρά της τροχιάς.

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Διάνυσμα επιτάχυνσης: Για καμπύλη τροχιά, το διάνυσμα της στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$(t) κατευθύνεται πάντα προς την κοίλη πλευρά της τροχιάς. Η επιτάχυνση είναι εφαπτόμενη στην τροχιά **μόνο** αν το κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή.



$$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$\alpha_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$$

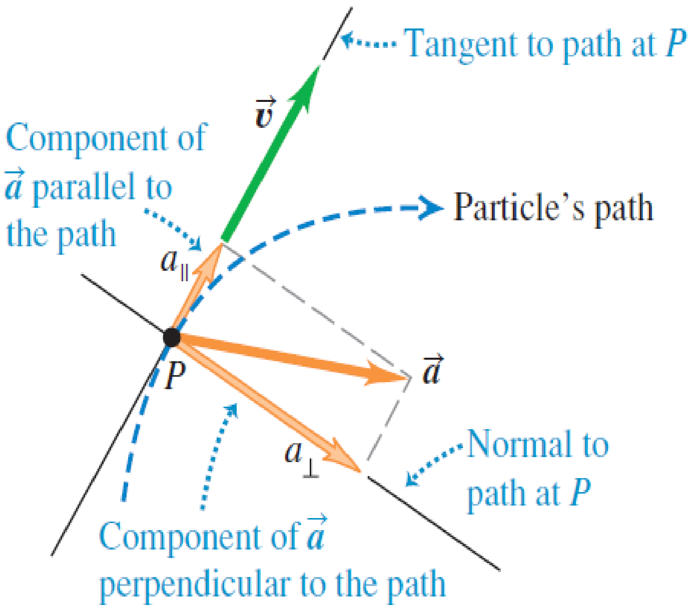
$$\alpha_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t)$$

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας **επιτάχυνσης** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της **αντίστοιχης συνιστώσας της ταχύτητάς του**.

$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 2: Να δειχθεί ότι η επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί σε 2 συνιστώσες :
$\vec{\alpha} = \alpha_{\mathrm{T}}\widehat{u_T}(t) + \alpha_N\widehat{u_N}$. Η πρώτη παράλληλη και η δεύτερη κάθετη στην τροχιά.



Εφαρμογή 1

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)|\,\widehat{u_T}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right)\widehat{u_T}(t) + |\vec{v}(t)|\,\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}(t) = \left(\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right)\widehat{u_T}(t) + |\vec{v}(t)|\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|\widehat{u_N}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \dfrac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \dfrac{dv(t)}{dt} \\[2ex] \alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)|\left|\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| = v(t)\left|\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| \end{cases}$$

Όπου $\quad v(t) \equiv |\vec{v}(t)|$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 3: Να δειχθεί ότι $\dfrac{\boldsymbol{d|\vec{v}(t)|}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\vec{\alpha}\,\widehat{u_T}} = \dfrac{\boldsymbol{\vec{\alpha}\,\vec{v}}}{\boldsymbol{|\vec{v}|}}$

$f = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

Πραγματική συνάρτηση 3 μεταβλητών όπου η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$\dot{x} = \dot{x}(t), \qquad \dot{y} = \dot{y}(t), \qquad \dot{z} = \dot{z}(t)$

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Σύνθετη συνάρτηση **μιας μεταβλητής** $|\vec{v}|(t) \to g(t) = f(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. **Ολική παράγωγος** της g **ως προς** $\boldsymbol{t}$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\boldsymbol{d\dot{x}}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\boldsymbol{d\dot{y}}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\boldsymbol{d\dot{z}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{-1/2}(2\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{-1/2}(2\dot{y})\ddot{y} + \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{-1/2}(2\dot{z})\ddot{z} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{-1/2} 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{2}\frac{(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{1}{|\vec{v}|}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\,\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\,\widehat{u_T}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις 2 συνιστώσες της επιτάχυνσης ως εξής:

$$\alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{\alpha}\,\widehat{u_T} \qquad \alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)|\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|$$

Ουσιαστικά είναι η προβολή της επιτάχυνσης στη διεύθυνση του $\widehat{u_T}$

1. Επεξηγηματικό μαθηματικό συμπλήρωμα

$$|\vec{v}| = f(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι μια συνάρτηση f , η οποία έχει 3 μεταβλητές όπου η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$$|\vec{v}|(t) = f(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)\ )$$

$$f = f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t),\qquad \dot{y} = \dot{y}(t),\qquad \dot{z} = \dot{z}(t)$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\boldsymbol{d\dot{x}}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\boldsymbol{d\dot{y}}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{\boldsymbol{d\dot{z}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx},\qquad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dx},\qquad \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dx},$$

Πώς να υπολογίσω τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ $\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}$

Προς στιγμή θεώρησε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Η f είναι μια σύνθετη συνάρτηση $f = f\big(F(x,y,z)\big) = \sqrt{F}$ Όπου $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(F(x,y,z))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dF}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{F}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$(f(F(x)))' = f\,'(F(x)) \cdot F'(x)$

Θυμήσου τον γενικό κανόνα που είχαμε δώσει για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Γενικεύεται και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών αλλά ο 2ος όρος θα είναι μερική παράγωγος!

Αντικατέστησε τώρα $x \to \dot{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,(\dot{x})$$

Ανάλογα

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,(\dot{y})\qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,(\dot{z})$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις **μιας άλλης μεταβλητής t**. Δηλαδή ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \\ x_1 = x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ \ldots..\ ,\ x_n=x_n(t) \end{array}\right\}$$

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση **μιας μεταβλητής** $g(t) = f(\ x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\ )$

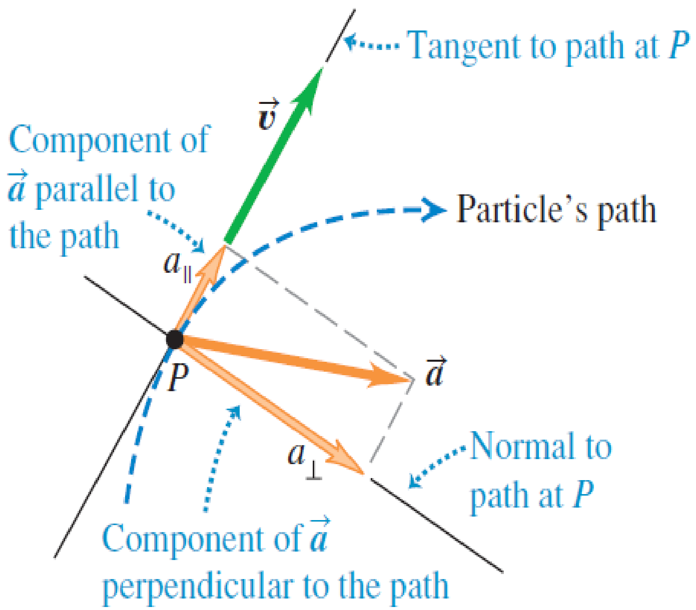
Η **ολική παράγωγος** της συνάρτησης g **ως προς t** είναι η εξής:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ \ldots \ldots \ + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

1. Συνιστώσες επιτάχυνσης : Σύνοψη

Επομένως, το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί ως εξής



$$\vec{\alpha} = \alpha_T(t)\widehat{u_T}(t) + \alpha_N(t)\widehat{u_N}(t)$$

Προβολή του $\vec{\alpha}$ στη διεύθυνση του $\widehat{u_T}$. (Εσ. γινόμενο είναι βαθμωτό).

$$\alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \boldsymbol{\vec{\alpha}\,\widehat{u_T}}$$

$$\alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t})| \left|\frac{\boldsymbol{d\widehat{u_T}(t)}}{\boldsymbol{dt}}\right| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\boldsymbol{R}}$$

Ακτίνα καμπυλότητας

<u>Συμπεράσματα</u>

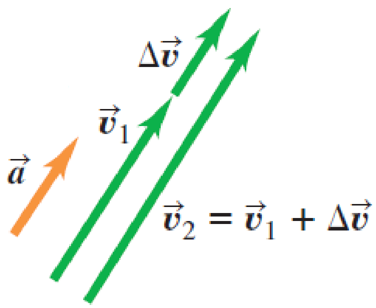
- Η **μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας** (δηλαδή $\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \neq 0$) εισάγει συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση του διανύσματος της $\vec{v}$ ή $\widehat{u_T}$. Δηλαδή $\alpha_T(t) \neq 0$.

- Στην περίπτωση που το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό ($|\vec{v}(t)|$=c), τότε η αλλαγή και **μόνο στη διεύθυνση της ταχύτητας** (αλλαγή διεύθυνσης $\widehat{u_T}$ & $\widehat{u_N}$) εισάγει συνιστώσα της επιτάχυνσης κάθετη στην ταχύτητα. Δηλαδή $\alpha_{\mathrm{N}}(t) \neq 0$.

1. Συνιστώσες επιτάχυνσης : Σύνοψη

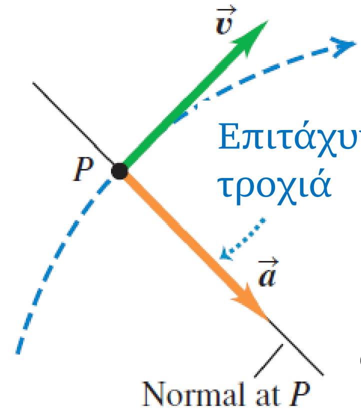
(α) Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ παράλληλη στην ταχύτητα $\vec{v}$

Μέτρο ταχύτητας αλλάζει αλλά όχι η διεύθυνση



$$\alpha_N(t) = |\vec{v}(t)| \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{\underset{\searrow\,\mathbf{O}}{dt}}\right| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\underset{\searrow\,\infty}{R}} = 0$$

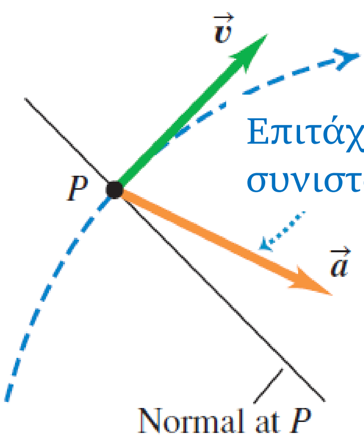
(β) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ = c κατά μήκος καμπύλης τροχιάς. Αλλάζει μόνο η κατεύθυνσή της



Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ κάθετη στην τροχιά

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{\underset{\searrow\,\mathbf{O}}{dt}} = 0$$

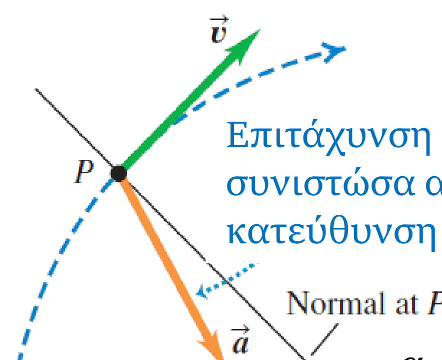
(γ) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ αυξάνει κατά μήκος καμπύλης τροχιάς



Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει και μικρή συνιστώσα στην κατεύθυνση $\widehat{u_T}$

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} > 0$$

(δ) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ μειώνεται κατά μήκος καμπύλης τροχιάς



Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει και μικρή συνιστώσα αντίθετη στην κατεύθυνση $\widehat{u_T}$

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} < 0$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, a_N και α_T.

$$\widehat{\boldsymbol{u_T}} = \widehat{u_T}(t) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} \quad \text{όπου } \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \text{ και } \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{\boldsymbol{d\widehat{u_T}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{d}{dt}\left\{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\right\}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + \left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\right\}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + \left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\begin{bmatrix}\frac{d\dot{x}}{dt}\\ \frac{d\dot{y}}{dt}\end{bmatrix}$$

$$= +\frac{-1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-3/2}\left(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}\right)\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + \left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}\begin{bmatrix}\dot{x}^2\ddot{x}+\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\\ \dot{x}\ddot{x}\dot{y}+\dot{y}^2\ddot{y}\end{bmatrix}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = f(\dot{x},\dot{y}) = g(t)$$

Εφάρμοσε τους ίδιους κανόνες όπως στην διαφάνεια #9 για να υπολογίσεις το

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{-1/2}\right\}$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, a_N και a_T.

$$\widehat{u_T} = \widehat{u_T}(t) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} \quad \text{όπου } \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{και } \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\begin{bmatrix}\dot{x}^2\ddot{x}+\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\\ \dot{x}\ddot{x}\dot{y}+\dot{y}^2\ddot{y}\end{bmatrix}$$

$$= (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}\begin{bmatrix}\cancel{\ddot{x}\dot{x}^2}+\cancel{\ddot{x}}\dot{y}^2-\cancel{\dot{x}^2\ddot{x}}-\cancel{\dot{x}}\dot{y}\ddot{y}\\ \ddot{y}\dot{x}^2+\cancel{\ddot{y}\dot{y}^2}-\dot{x}\ddot{x}\dot{y}-\cancel{\dot{y}^2\ddot{y}}\end{bmatrix} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}\begin{bmatrix}-\dot{y}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\\ \dot{x}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, a_N και α_T.

$$\widehat{u_T} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|\widehat{u_N}(t)$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix} = \boldsymbol{K}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| = \sqrt{(\boldsymbol{K})^2\frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(-\dot{y})^2 + (\boldsymbol{K})^2\frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\dot{x})^2} = |\boldsymbol{K}|\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = |\boldsymbol{K}| = \begin{cases} K, & K>0 \\ -K, & K<0 \end{cases}$$

$$\widehat{u_N} = \frac{\frac{d\widehat{u_T}}{dt}}{\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|} = \frac{\boldsymbol{K}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{|\boldsymbol{K}|}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

Προσοχή: το πρόσημο εξαρτάται από το πρόσημο του Κ και ουσιαστικά από το πρόσημο του "$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$". Επιλέγεται το "+" αν Κ>0

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, α_N και α_T.

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}$$

$$\alpha_N(t) = |\vec{v}(t)| \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| = \left|\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right| = |K|$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$f(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Εφάρμοσε τους ίδιους κανόνες όπως στη διαφάνεια #9 για να υπολογίσεις το $\frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$$\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}(2\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}(2\dot{y})\ddot{y} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\alpha_T(t) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\alpha_N(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\left|\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}}|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| =$$

$$= \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \pm\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του K και άρα του “$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$”. Επιλέγεται το “+” αν K>0

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, α_N και α_T.

$$\widehat{u_T} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

$$\widehat{u_N} = \pm\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του Κ και άρα του "$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}$". Επιλέγεται το "+" αν Κ>0

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{K} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$\alpha_T(t) = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

$$\alpha_N(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\left|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\right| = \pm\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του Κ και άρα του "$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}$". Επιλέγεται το "+" αν Κ>0

3. Παράδειγμα υπολογισμών: Κυκλική τροχιά

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω κυκλική τροχιά με ακτίνα α > 0:

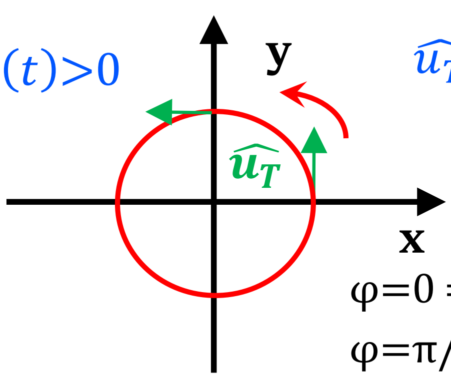
$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \alpha\cos\varphi(t) \\ a\sin\varphi(t) \\ z_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -a\sin\varphi(t)\,\dfrac{d\varphi(t)}{dt} \\ a\cos\varphi(t)\,\dfrac{d\varphi(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = a\dot{\varphi}(t)\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-\alpha\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t))^2 + (a\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t))^2 + 0} = \sqrt{(\alpha\dot{\varphi}(t))^2} = \alpha|\dot{\varphi}(t)|$$

$$\widehat{u_T} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{a\dot{\varphi}(t)}{\alpha|\dot{\varphi}(t)|}\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} +\ldots, & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ -\ldots, & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases}$$

Κίνηση αντίθετα με αυτή δεικτών ρολογιού. Η φάση αυξάνει με το χρόνο.

$\dot{\varphi}(t) > 0$



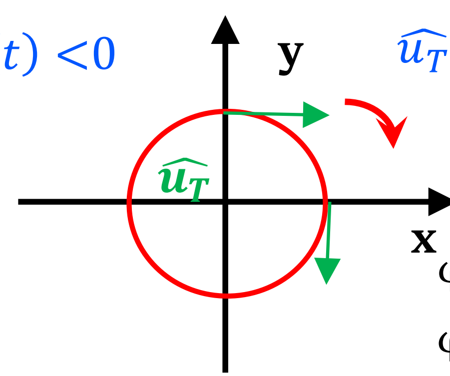
$$\widehat{u_T} = +\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

φ=0 ⇒ $\widehat{u_T} = [0, 1, 0]$

φ=π/2 ⇒ $\widehat{u_T} = [-1, 0, 0]$

Κίνηση σύμφωνα με αυτή δεικτών ρολογιού. Η φάση μειώνεται με το χρόνο.

$\dot{\varphi}(t) < 0$



$$\widehat{u_T} = -\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

φ=0 ⇒ $\widehat{u_T} = [0, -1, 0]$

φ=π/2 ⇒ $\widehat{u_T} = [1, 0, 0]$

3. Παράδειγμα υπολογισμών: Κυκλική τροχιά

Παράδειγμα: Έστω κυκλική τροχιά με ακτίνα α > 0:

$$|\vec{v}(t)| = \alpha|\dot{\varphi}(t)| \begin{cases} +\alpha\dot{\varphi}(t), & \dot{\varphi}(t)>0 \\ -\alpha\dot{\varphi}(t), & \dot{\varphi}(t)<0 \end{cases}$$

$$\widehat{u_T} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \dot{\varphi}(t)>0 \\ -\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \dot{\varphi}(t)<0 \end{cases}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{1}{\alpha}|\vec{v}(t)| \begin{bmatrix} -\cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha}|\vec{v}(t)|\widehat{u_N}$$

$$\widehat{u_N} = -\begin{bmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

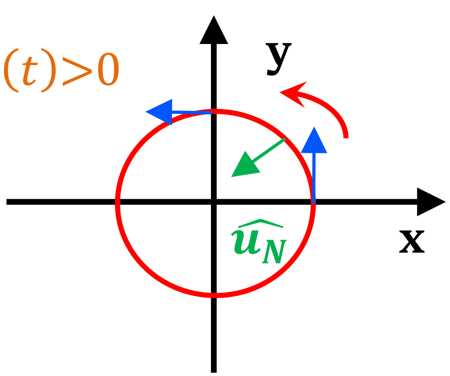
$$\boxed{\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| \widehat{u_N}(t)}$$

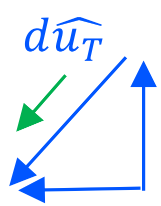
Τοπική καμπυλότητα της τροχιάς.
Αντίστροφο της ακτίνας α του κύκλου

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{1}{\alpha}|\vec{v}(t)|\widehat{u_N} \qquad \frac{d\widehat{u_T}}{dt} \parallel d\widehat{u_T} \qquad \frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{1}{\alpha}|\vec{v}(t)|\widehat{u_N}$$

$\dot{\varphi}(t)>0$

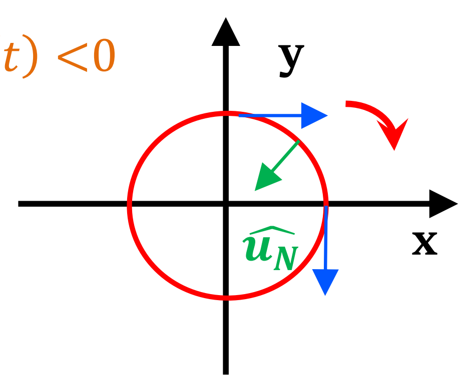


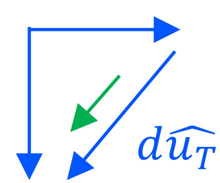


$\varphi=0 \Rightarrow \widehat{u_N} = [-1, 0, 0]$

$\varphi=\pi/2 \Rightarrow \widehat{u_N} = [0, -1, 0]$

$\dot{\varphi}(t)<0$





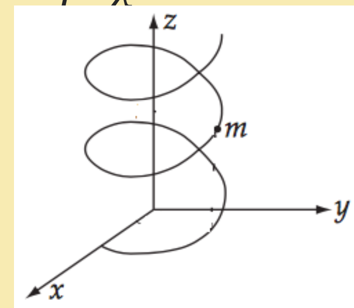
$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} \parallel d\widehat{u_T}$$

4. Κίνηση κατά μήκος έλικας

Εφαρμογή: *Κινητό κινούμενο κατά μήκος έλικας έχει την παρακάτω τροχιά*

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \alpha \cos \omega t \\ a \sin \omega t \\ bt \end{bmatrix} \quad \text{με } \omega > 0$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|$$



Να υπολογισθούν τα μεγέθη $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t), \widehat{u_T}(t), \widehat{u_N}(t)$ καθώς και η καμπυλότητα $\kappa(t)$ της τροχιάς.

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ a\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix}, \qquad |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-\alpha\omega \sin \omega t)^2 + (a\omega \cos \omega t)^2 + b^2} = \sqrt{(\alpha\omega)^2 + b^2}$$

$$\widehat{u_T} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\omega)^2+b^2}}\begin{bmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ a\omega \cos \omega t \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{\alpha\omega^2}{\sqrt{(\alpha\omega)^2+b^2}}\begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{\alpha\omega^2}{\sqrt{(\alpha\omega)^2+b^2}}, \quad \widehat{u_N} = \frac{\frac{d\widehat{u_T}}{dt}}{\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|} = \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \kappa = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{\alpha\omega^2}{(\alpha\omega)^2+b^2} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\alpha\omega^2\begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\omega^2\, \widehat{u_N}$$

Η επιτάχυνση δεν έχει συνιστώσα παράλληλη στην τροχιά (επιτρόχια). Αναμενόμενο επειδή η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο και αλλάζει μόνο διεύθυνση.

4. Κίνηση κατά μήκος έλικας

$$\widehat{u_{\mathrm{N}}} = \begin{bmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(\alpha\omega)^2 + b^2}$$

$$\kappa = \frac{\alpha\omega^2}{(\alpha\omega)^2 + b^2}$$

* Εάν b=0 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\kappa = \frac{\alpha\omega^2}{(\alpha\omega)^2} = \frac{1}{\alpha}}$,

Κίνηση σε κύκλο ακτίνας α

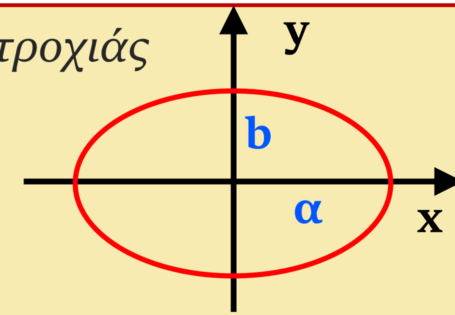
$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t')|dt' = \sqrt{(\alpha\omega)^2 + b^2}\, t$$

Διανυόμενη απόσταση

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

Εφαρμογή: *Μελέτη κινητού κινούμενου κατά μήκος ελλειπτικής τροχιάς*

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}, \qquad \omega > 0,$$



$$\vec{v}(t) = \omega \begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix}, \qquad \text{Μέτρο ταχύτητας} \quad |\vec{v}(t)| = \omega\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}$$

Εφαπτόμενο μοναδιαίο $\quad \widehat{u_T} = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}} \begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix}$

ή αλλιώς γραφουμε $\quad \widehat{u_T} = \mathrm{A(t)} \begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A(t)} = (\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{-1/2}$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \dot{\mathrm{A}}(t) \begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix} - \omega\,\mathrm{A(t)} \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathrm{A}}(t) = -\frac{1}{2}(\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{-\frac{3}{2}}(2\omega\alpha^2\sin\omega t\cos\omega t - 2\omega b^2\cos\omega t\sin\omega t)$$

$$= -\frac{1}{2}[(\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{-\frac{1}{2}}]^3\,[2\omega(\alpha^2 - b^2)\sin\omega t\cos\omega t]$$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^3 \left[2\omega(\alpha^2 - b^2)\sin\omega t \cos\omega t\right]$$

$$= -\omega(\alpha^2 - b^2)A(t)^3 \sin\omega t \cos\omega t$$

$$\boxed{\mathrm{A(t)} = (\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}}$$

Επομένως $\dfrac{d\widehat{u_T}}{dt} = \dot{A}(t)\begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix} - \omega\, \mathrm{A(t)} \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}$

$$= A(t)^3 \left\{ \left[-\omega(\alpha^2 - b^2)\right]\sin\omega t\cos\omega t \begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix} - \omega\frac{1}{A(t)^2}\begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= A(t)^3 \left\{ \left[-\omega(\alpha^2 - b^2)\right]\sin\omega t\cos\omega t \begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix} - \omega\left[\alpha^2 \sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t\right]\begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= A(t)^3\,(-\omega)\begin{bmatrix} \cancel{-\alpha^3\sin^2\omega t\cos\omega t} + ab^2\sin^2\omega t\cos\omega t + \cancel{\alpha^3\sin^2\omega t\cos\omega t} + ab^2\cos^3\omega t \\ ba^2\sin\omega t\cos^2\omega t - \cancel{b^3\sin\omega t\cos^2\omega t} + ba^2\sin^3\omega t + \cancel{b^3\sin\omega t\cos^2\omega t} \end{bmatrix}$$

$$= A(t)^3\,(-\omega)\begin{bmatrix} ab^2\cos\omega t\,(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) \\ ba^2\sin\omega t\,(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) \end{bmatrix} = A(t)^3\,(-\omega)\begin{bmatrix} ab^2\cos\omega t \\ ba^2\sin\omega t \end{bmatrix}$$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

$$\boxed{\mathrm{A(t)} = (\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = A(t)^3\,(-\omega)\begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \end{bmatrix} = \frac{-\omega ab}{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}\begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}\,\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)}}\begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\boxed{\widehat{u_N} = \frac{\frac{d\widehat{u_T}}{dt}}{\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|}}$$

$$\widehat{u_N} = -\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 sin^2 \omega t + b^2 cos^2 \omega t)}}\begin{bmatrix} b\, cos\, \omega t \\ a\, sin\, \omega t \end{bmatrix}$$

$$\widehat{u_T} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}}\begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix}$$

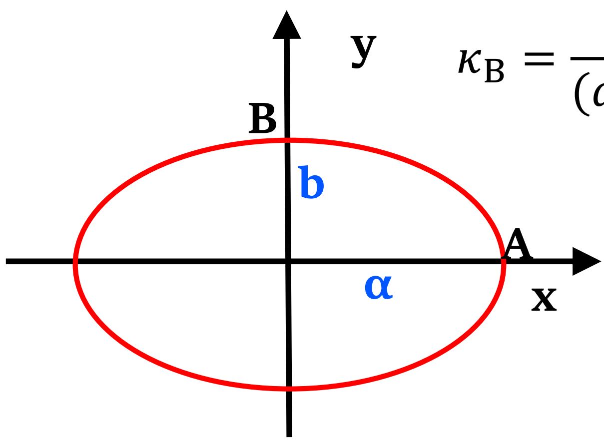
Εύκολα δείχνουμε $\widehat{u_N} \cdot \widehat{u_T} = 0 \Rightarrow \widehat{u_N} \perp \widehat{u_T}$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

Άρα η καμπυλότητα είναι

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{1}{\omega\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}} \frac{\omega a b}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$= \frac{ab}{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}$$



$$\kappa_{\mathrm{B}} = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2} \qquad \kappa_{\mathrm{A}} = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$$

Αν α>b (π.χ. α=2b) τότε $\kappa_{\mathrm{A}} = \frac{2}{b}$ & $\kappa_{\mathrm{B}} = \frac{1}{4b}$. Άρα $\kappa_{\mathrm{A}} = 8\kappa_{\mathrm{B}}$. Στα υπόλοιπα σημεία της τροχιάς ισχύει $\kappa_{\mathrm{B}} < \kappa < \kappa_{\mathrm{A}}$. Άρα $\kappa \in [\frac{b}{a^2}, \frac{a}{b^2}]$

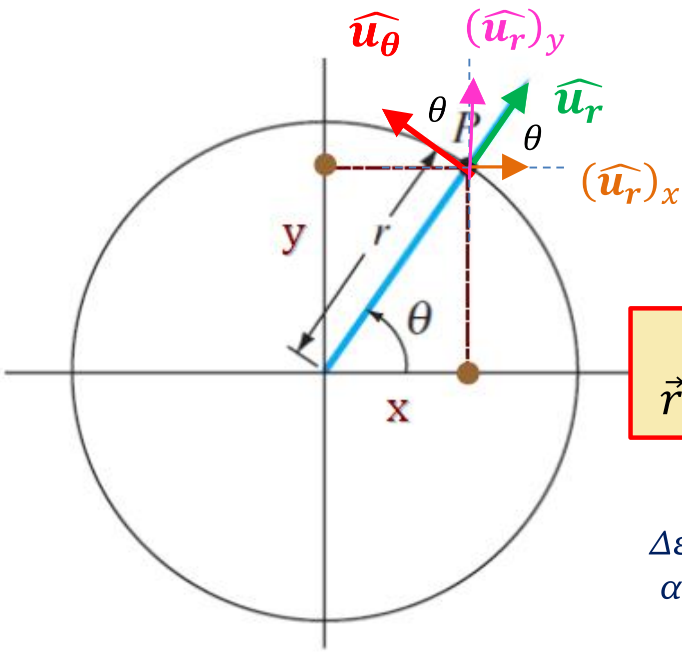
Στο σημείο A η μεγαλύτερη καμπυλότητα της τροχιάς είναι εμφανής. Εξαρτάται ***και*** *από το b, όχι μόνο από το α/b. Όσο μειώνεται το b τόσο αυξάνεται η καμπυλότητα στο A.*

- Στο σημείο A έχουμε τη μέγιστη καμπυλότητα.
- Στο σημείο B έχουμε την ελάχιστη καμπυλότητα.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}, \qquad \omega > 0}$$

6. Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

Η περιγραφή της θέσεως κινητού γίνεται με την βοήθεια των r,θ



Πολικές → Καρτεσιανές

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Καρτεσιανές → Πολικές

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Διάνυσμα θέσης κινητού

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y) = \vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\hat{\imath} + r\sin\theta\hat{\jmath} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Ορίζουμε Μοναδιαία διανύσματα $\widehat{u_r} \perp \widehat{u_\theta}$:

Δείχνει προς την κατεύθυνση αύξησης r. Ακτινικά «προς τα έξω».

$$\widehat{u_r} = (\widehat{u_r})_x\hat{\imath} + (\widehat{u_r})_y\hat{\jmath}$$

$$\widehat{u_r} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$$

Δείχνει προς την κατεύθυνση αύξησης θ

$$\widehat{u_\theta} = (\widehat{u_\theta})_x\hat{\imath} + (\widehat{u_\theta})_y\hat{\jmath}$$

$$\widehat{u_\theta} = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$$

$$\sin\theta = \frac{(\widehat{u_r})_y}{|\widehat{u_r}|} \Rightarrow (\widehat{u_r})_y = \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(\widehat{u_r})_x}{|\widehat{u_r}|} \Rightarrow (\widehat{u_r})_x = \cos\theta$$

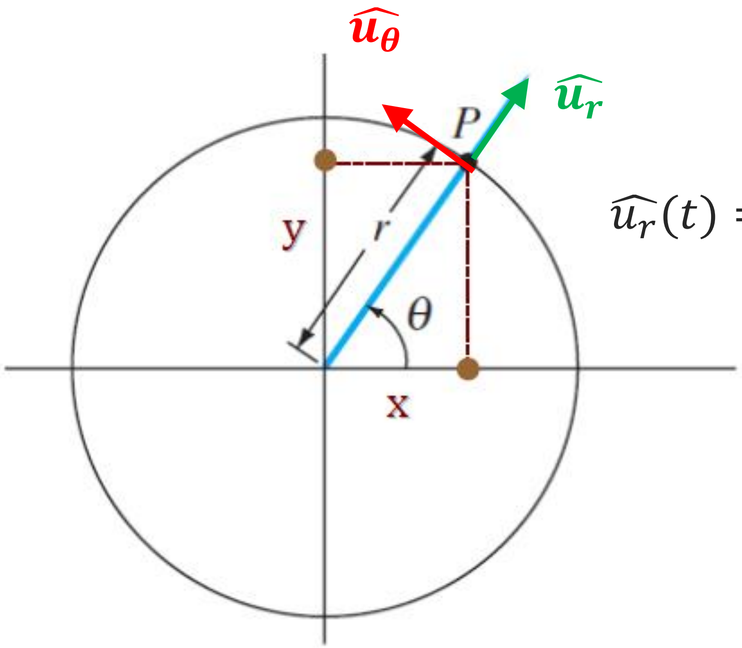
$$\sin\theta = \frac{-(\widehat{u_\theta})_x}{|\widehat{u_\theta}|} \Rightarrow (\widehat{u_\theta})_x = -\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(\widehat{u_\theta})_y}{|\widehat{u_\theta}|} \Rightarrow (\widehat{u_\theta})_y = \cos\theta$$

$$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\theta\,\hat{\jmath} = r(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) = r\widehat{u_r}$$

6. Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta) = r cos\theta \boldsymbol{\hat{\imath}} + r sin\theta \boldsymbol{\hat{\jmath}} = r(cos\theta \boldsymbol{\hat{\imath}} + sin\theta \boldsymbol{\hat{\jmath}}) = r\widehat{u_r}$$



Καθώς το κινητό μετακινείται η θέση των μοναδιαίων αλλάζει, δηλαδή $\widehat{u_r} = \widehat{u_r}(t)$, $\widehat{u_\theta} = \widehat{u_\theta}(t)$)

$$\widehat{u_r}(t) = cos\theta(t)\boldsymbol{\hat{\imath}} + sin\theta(t)\boldsymbol{\hat{\jmath}}\,, \quad \widehat{u_\theta}(t) = -sin\theta(t)\boldsymbol{\hat{\imath}} + cos\theta(t)\boldsymbol{\hat{\jmath}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\widehat{u_r}(t)}{dt} &= -sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\hat{\imath}} + cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\hat{\jmath}} = \dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} \\ \frac{d\widehat{u_\theta}(t)}{dt} &= -cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\hat{\imath}} - sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\hat{\imath}} = -\dot{\theta}\,\widehat{u_r} \end{aligned}}$$

Η τροχιά του κινητού: $\boxed{\vec{r}(t) = r(t)\,\widehat{u_r}(t)}$

$$\widehat{u_r}(t) = cos\theta(t)\boldsymbol{\hat{\imath}} + sin\theta(t)\boldsymbol{\hat{\jmath}}$$

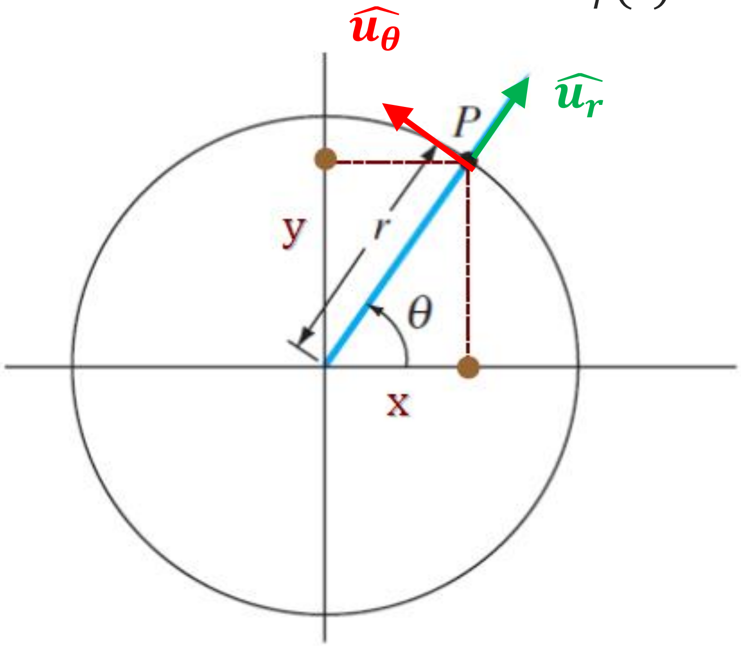
Ταχύτητα κινητού: $\vec{v}(t) = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dfrac{d\widehat{u_r}(t)}{dt} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta}}$

Ακτινική ταχύτητα

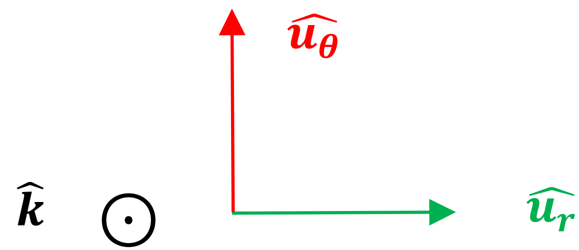
Γωνιακή ταχύτητα

6. Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

$$\widehat{u_r}(t) = cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,, \quad \widehat{u_\theta}(t) = -sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$



Χρησιμοποιούμε τη σχέση: $\widehat{u_\theta} = \hat{k} \times \widehat{u_r}$



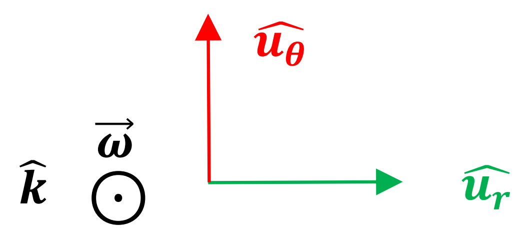
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dot{\theta}\,\hat{k} \times \widehat{u_r} = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + \dot{\theta}\,\hat{k} \times (r\widehat{u_r})$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + \dot{\theta}\,\hat{k} \times \vec{r} = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta}$$

Γωνιακή ταχύτητα βαθμωτό

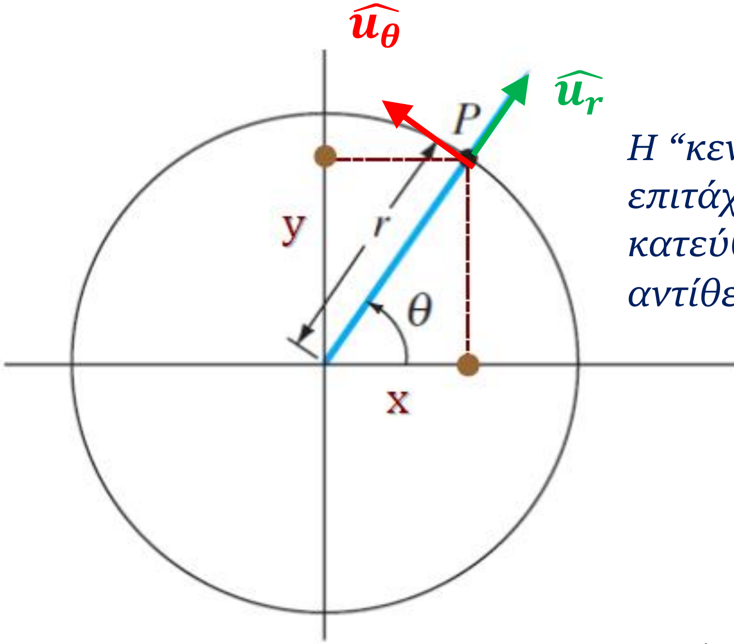
Διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$$



6. Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

$$\widehat{u_r}(t) = cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,,\ \widehat{u_\theta}(t) = -sin\theta(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + cos\theta(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$



Η "κεντρομόλος" επιτάχυνση έχει κατεύθυνση αντίθετη με του $\widehat{u_r}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\widehat{u_r}(t)}{dt} &= \dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} \\ \frac{d\widehat{u_\theta}(t)}{dt} &= -\dot{\theta}\,\widehat{u_r} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta}}$$

Επιτάχυνση κινητού:

$$\vec{\alpha}(t) = \ddot{r}\,\widehat{u_r} + \dot{r}\frac{d\widehat{u_r}(t)}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} + r\ddot{\theta}\widehat{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\widehat{u_\theta}(t)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\,\widehat{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} + r\ddot{\theta}\widehat{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\widehat{u_r}$$

$$\vec{\alpha}(t) = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\widehat{u_r} + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\widehat{u_\theta}$$

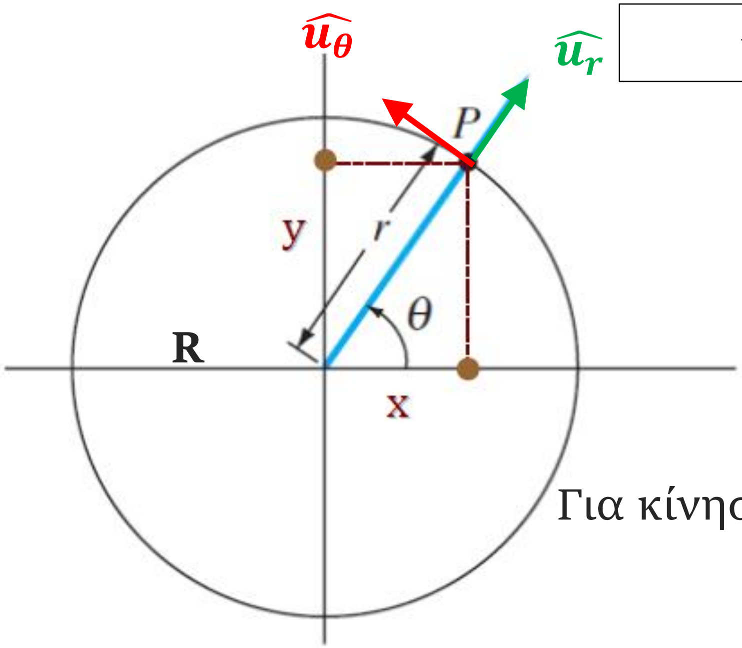
Ακτινική επιτάχυνση

"κεντρομόλος" επιτάχυνση

Γωνιακή επιτάχυνση

6. Επίπεδη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

Εφαρμογή: *Κινητό κινούμενο κατά μήκος κυκλικής τροχιάς με ακτίνα r=R*



$$\vec{r} = r\widehat{u_r}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\widehat{u_r}(t) + r\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta}$$

Ακτινική ταχύτητα Γωνιακή ταχύτητα

$$\vec{\alpha}(t) = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\widehat{u_r} + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\widehat{u_\theta}$$

Ακτινική επιτάχυνση "κεντρομόλος" επιτάχυνση Γωνιακή επιτάχυνση

Για κίνηση σε κύκλο ακτίνας R: $r(t) = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \;\&\; \ddot{r} = 0$

$$\vec{r} = R\widehat{u_r}(t) \qquad \vec{v}(t) = R\dot{\theta}\,\widehat{u_\theta} \qquad |\vec{v}(t)| = R|\dot{\theta}| \Rightarrow |\dot{\theta}| = \frac{|\vec{v}(t)|}{\mathrm{R}}$$

$$\vec{\alpha}(t) = -R\left(\dot{\theta}\right)^2\widehat{u_r}(t) + R\ddot{\theta}\,\widehat{u_\theta}(t) = -R\left(\frac{|\vec{v}(t)|}{R}\right)^2\widehat{u_r}(t) + R\ddot{\theta}\,\widehat{u_\theta}(t)$$

$$|\dot{\theta}|^2 = \left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$= -\frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}\widehat{u_r}(t) + R\ddot{\theta}\,\widehat{u_\theta}(t)$$

"κεντρομόλος" επιτάχυνση Επιτρόχια επιτάχυνση

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}}$$