ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

- Γωνιακή Μετατόπιση & Ταχύτητα
- Περιστροφική Κινητική Ενέργεια & Ροπή Αδράνειας
- Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας Στερεών Σωμάτων
- Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)

ΚΥΛΙΣΗ, ΡΟΠΗ και ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

- Μεταφορά και Περιστροφή
- Δυνάμεις της Κύλισης
- Στροφορμή Συστήματος Σωματιδίων
- Δεύτερος Νόμος του Newton σε Γωνιακή Μορφή

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

- Αρμονική Ταλάντωση Στερεού Σώματος

Οι διαφάνειες παρουσιάζονται με την άδεια του δημιουργού τους, Αν. Καθ. Ευστάθιου Στυλιάρη, από τις παραδόσεις στο μάθημα Φυσική Ι, ΕΚΠΑ, Τμήμα Φυσικής, 2016-17

ΦΥΣΙΚΗ Ι

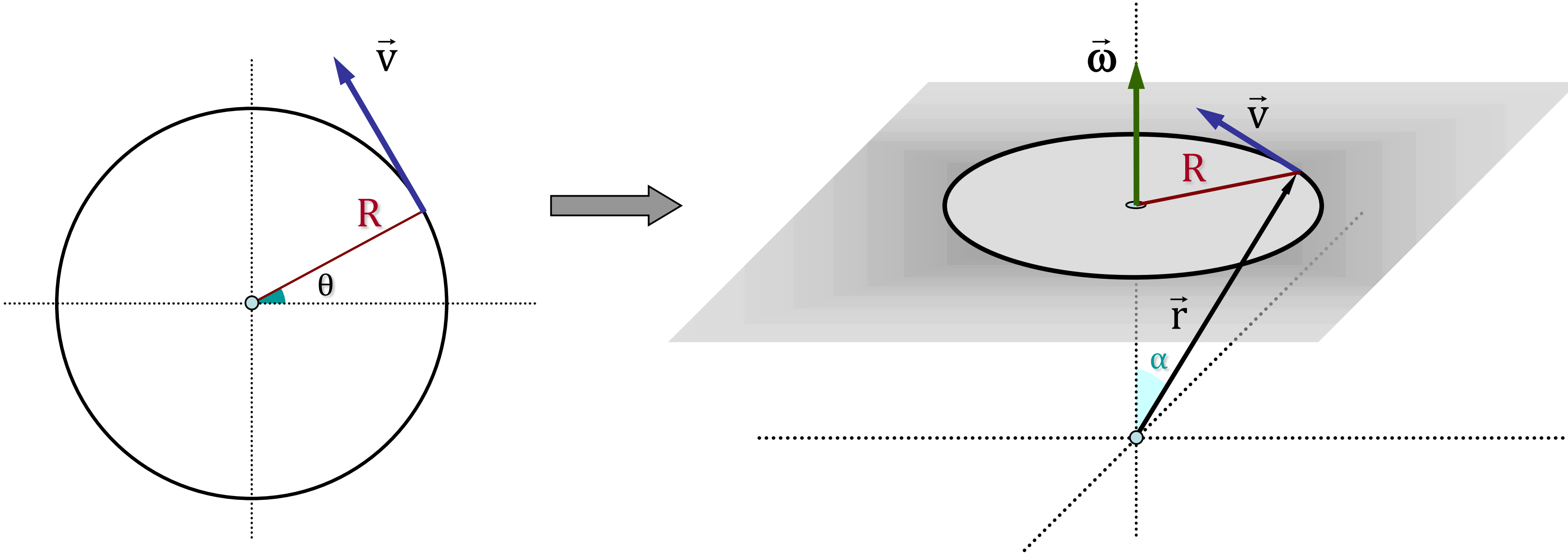
Κοσμάς Γαζέας

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ALONSO FINN	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
Περιστροφή Στερεού Σώματος	10.1, 10.2, 10.3	10.1 έως 10.10	10.1 έως 10.10	9.1 έως 9.6
Κύλιση, Ροπή και Στροφορμή	10.4, 10.5	11.1 έως 11.6	11.1 έως 11.11	10.1 έως 10.6
Αρμονική Ταλάντωση Στερεού Σώματος	12.1 έως 12.6	14.1 έως 14.6	15.1 έως 15.7	13.1 έως 13.6

ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ



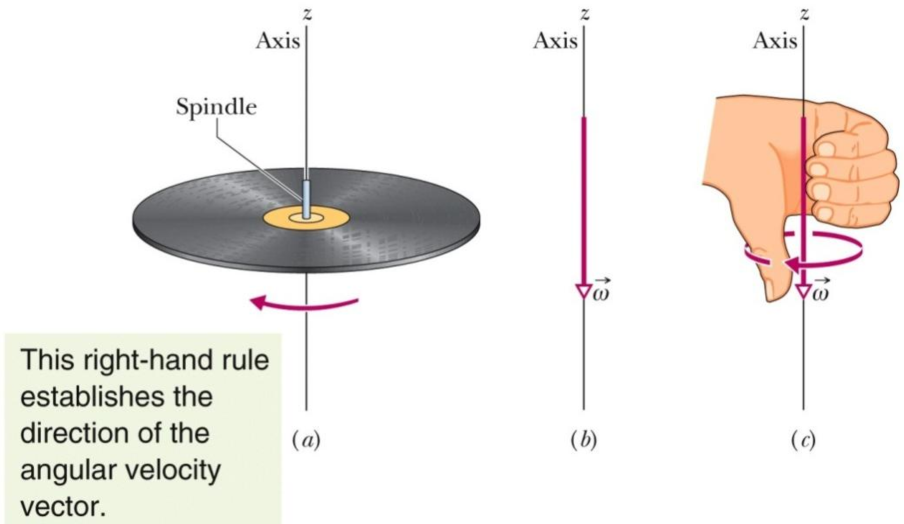
Η κυκλική κίνηση στο χώρο μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα θέσης **r** . Όπως είναι προφανές από το παραπάνω σχήμα ισχύει γενικά:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha = \omega(r\sin\alpha) = \omega R = R\frac{d\theta}{dt}$$

ΓΩΝΙΑΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

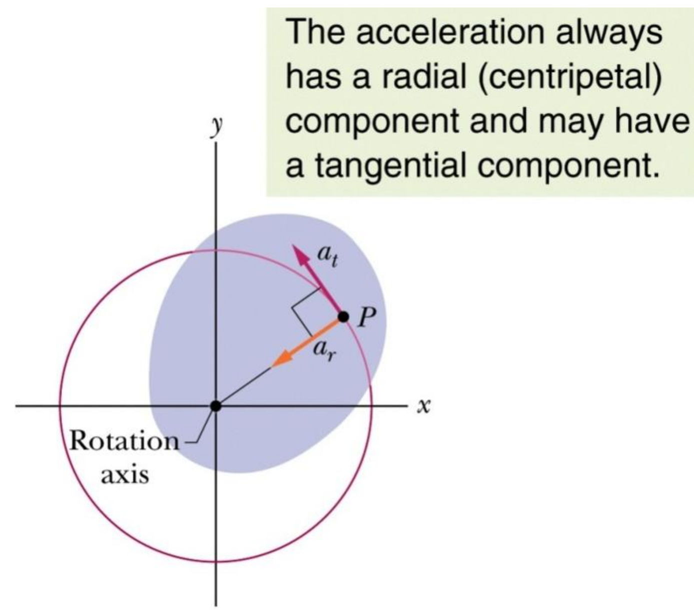
Συσχετίζοντας Γραμμικές και Γωνιακές Μεταβλητές



$$s = \theta r \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r \Rightarrow v = \omega r$$

Η γραμμική επιτάχυνση ενός σημείου σε περιστρεφόμενο στερεό έχει δύο συνιστώσες:

- Ακτινική συνιστώσα a_r
- Εφαπτομενική συνιστώσα a_t



$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \Rightarrow a_t = a_\Gamma r \qquad a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Για ένα σύνολο σωματιδίων που περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω :

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \ldots = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$\Downarrow$$

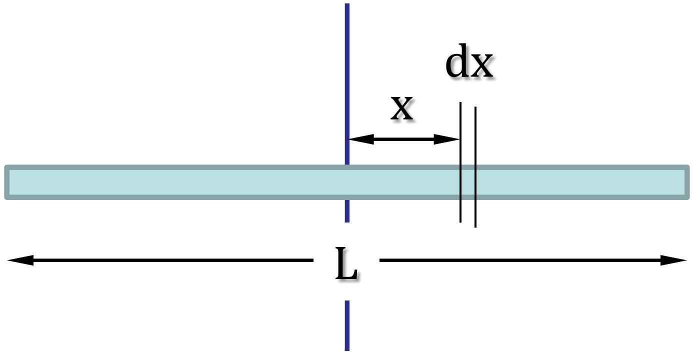
$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{όπου} \quad I = \sum_i m_i r_i^2}$$

I: Ροπή Αδράνειας Σώματος (συνεχής κατανομή μάζας)

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο βάρους



$$I = \int_M x^2 dm = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \rho S dx = \rho S \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx$$

$$\Downarrow$$

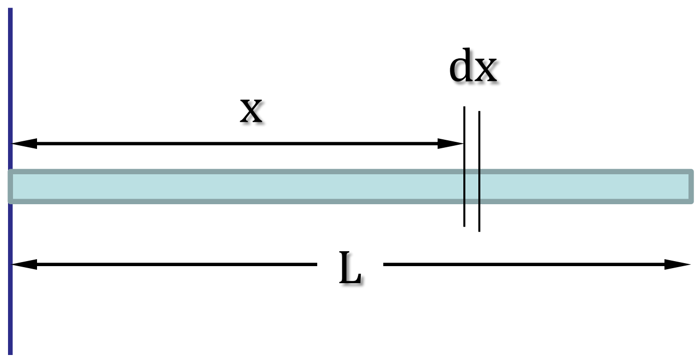
$$I = \rho S \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{+L/2} = \left(\rho S \frac{L^3}{24}\right) - \left(-\rho S \frac{L^3}{24}\right) = \rho S \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12}(\rho S L)L^2 = \frac{1}{12} M L^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = \frac{1}{12} M L^2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από τη μία άκρη της



$$I = \int_M x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho S dx = \rho S \int_0^L x^2 dx$$

$$\Downarrow$$

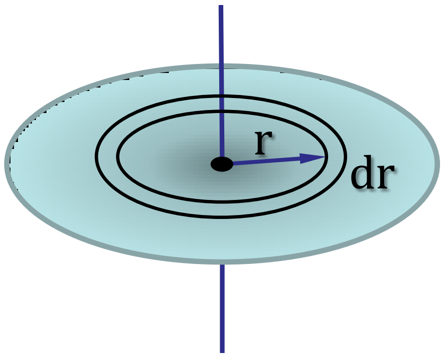
$$I = \rho S \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{+L} = \left(\rho S \frac{L^3}{3}\right) - \left(\rho S \frac{0^3}{24}\right) = \rho S \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}(\rho S L) L^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3} M L^2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του



$$I = \int_M r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho h 2\pi r dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr$$

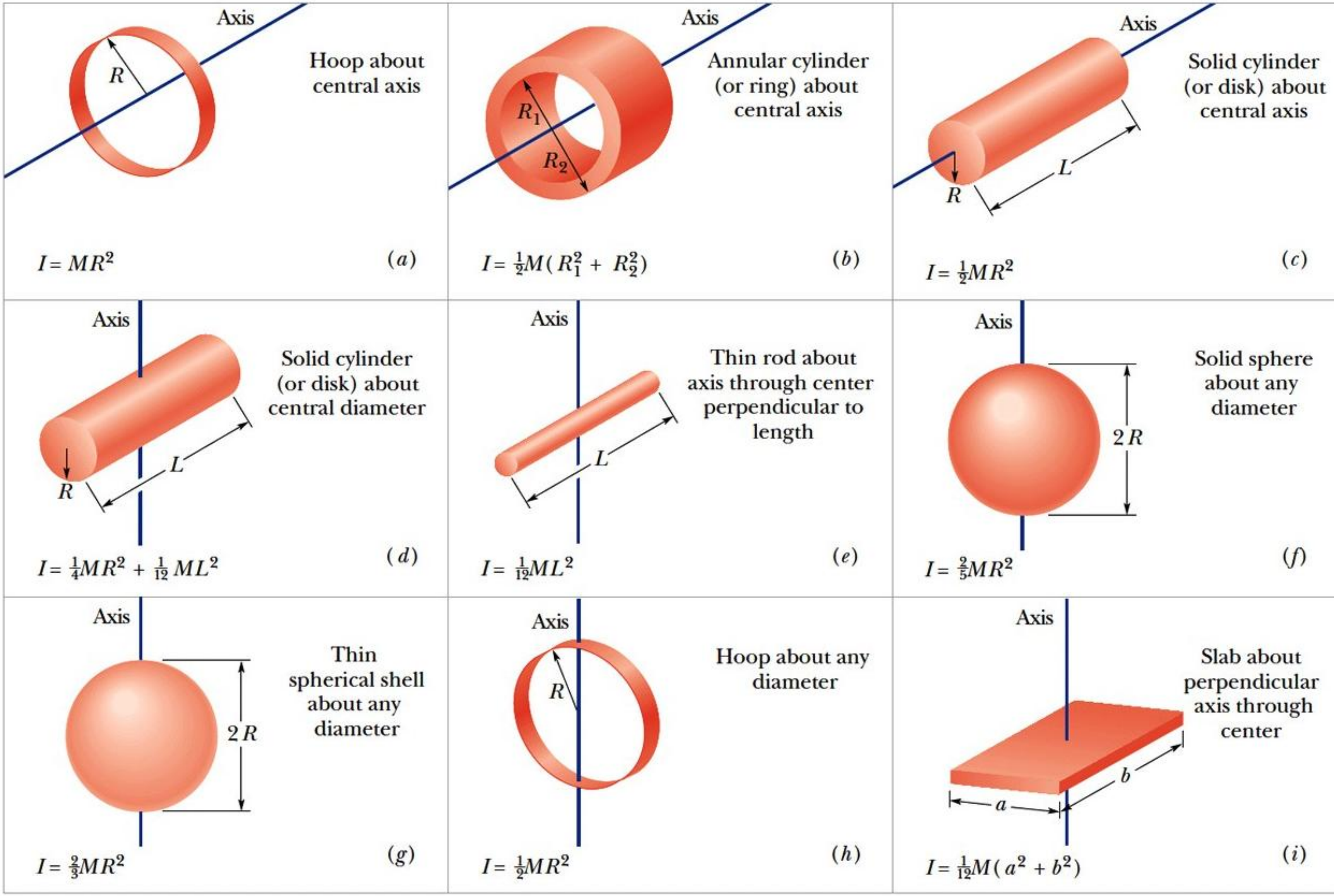
$$\Downarrow$$

$$I = 2\pi\rho h \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2}\left(\pi R^2 h\rho\right)R^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\Downarrow$$

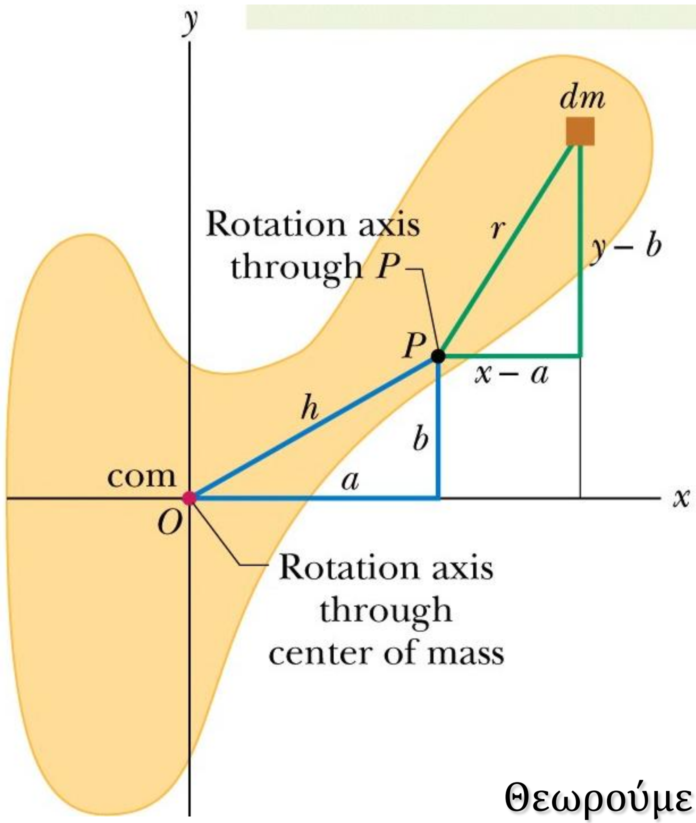
$$\boxed{I = \frac{1}{2}MR^2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)



Εάν η ροπή αδράνειας στερεού σώματος μάζας Μ ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του *(σημείο Ο)* είναι I_{CM}, τότε η ροπή αδράνειας I ως προς παράλληλο άξονα μετατοπισμένο κατά h *(σημείο P)* δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{I = I_{CM} + Mh^2}$$

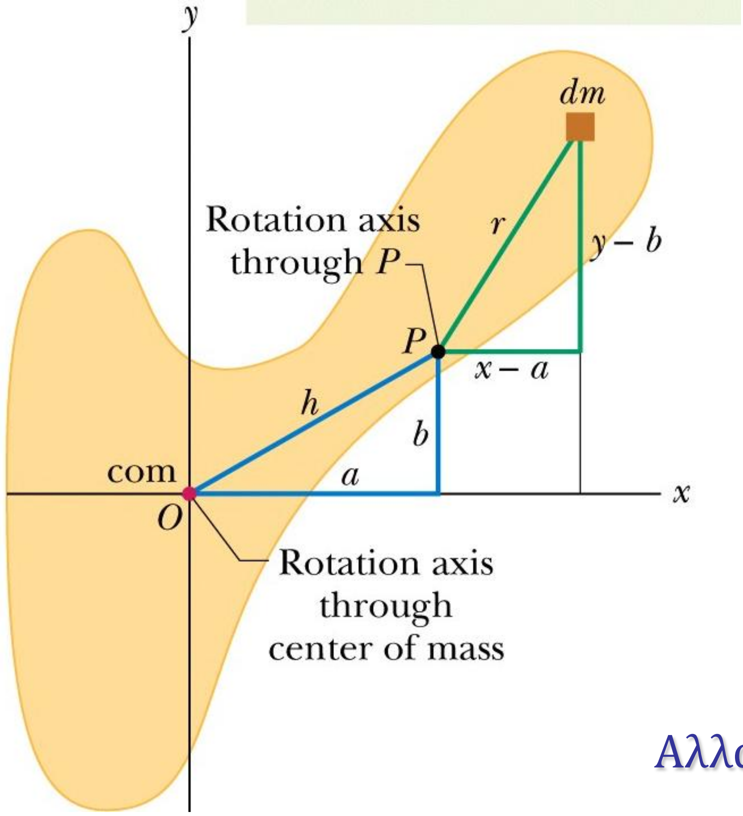
Απόδειξη Θεωρήματος Steiner

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο μάζας του σώματος. Το σημείο P έχει στο σύστημα αυτό συντεταγμένες (a,b) και ισχύει $h^2 = a^2+b^2$. Η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα διερχόμενο από το P υπολογίζεται ως ακολούθως:

M: Μάζα στερεού σώματος
h: απόσταση του άξονα P από τον άξονα του κέντρου μάζας O.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)



$$I = \int r^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm$$

$$\Downarrow$$

$$I = \int (x^2 + y^2) dm + \int (a^2 + b^2) dm$$

$$-2a\int x\,dm - 2b\int y\,dm$$

Αλλά όμως $\int x\,dm = 0 \quad \& \quad \int y\,dm = 0$

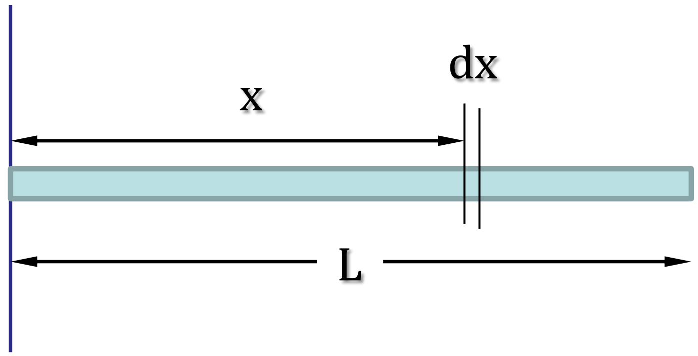
επειδή το κέντρο μάζας του σώματος βρίσκεται στο σημείο (x, y)=(0, 0), οπότε:

$$\boxed{I = I_{CM} + Mh^2}$$

h: απόσταση του άξονα P από τον άξονα του κέντρου μάζας O, με $h^2 = a^2 + b^2$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Θεώρημα Παραλλήλων Αξόνων (Steiner)



Όπως υπολογίσθηκε προηγουμένως, η ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς κάθετο άξονα που διέρχεται από τη μία άκρη της είναι:

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$

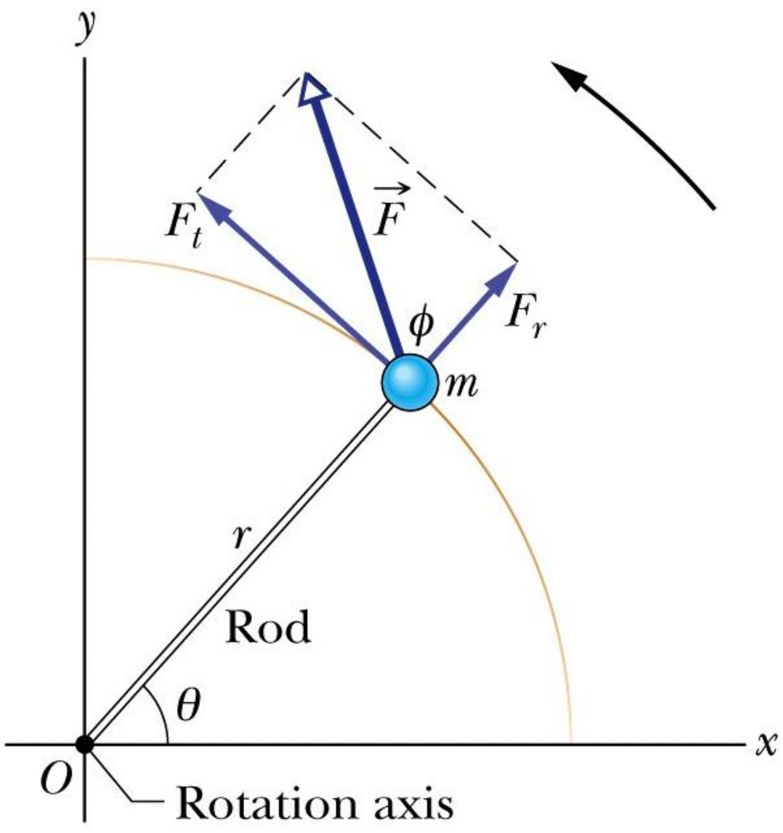
Η εφαρμογή του θεωρήματος των παραλλήλων αξόνων καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα:

$$\boxed{I = I_{CM} + Mh^2}$$

$$\Downarrow$$

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON



Ο Δεύτερος Νόμος του Newton στην περιστροφή στερεού σώματος έχει τη μορφή:

$$\boxed{\tau_{NET} = I a_{\Gamma}}$$

όπου **τ** η ασκούμενη ροπή δυνάμεων στο στερεό σώμα και a_{Γ} η γωνιακή του επιτάχυνση.

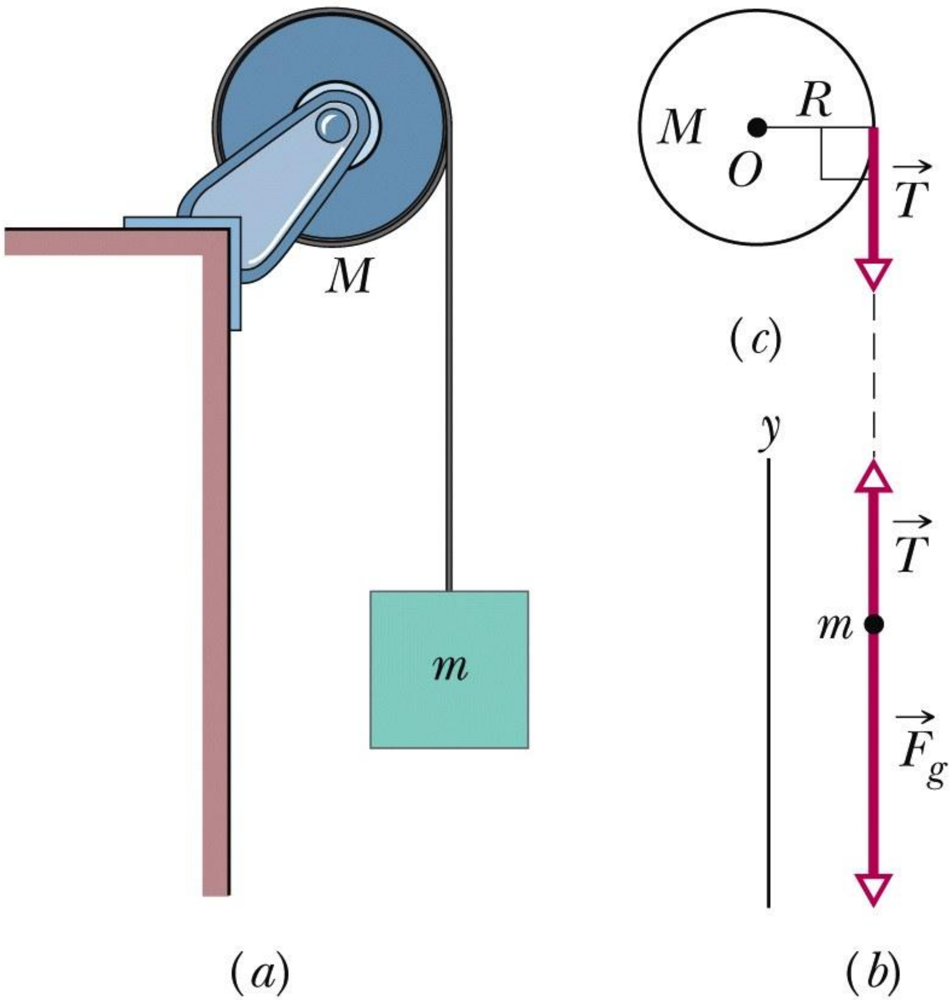
Απόδειξη

$$\tau = F_t r = (m a_t) r = m(a_{\Gamma} r) r$$

$$\Downarrow$$

$$\tau = m a_{\Gamma} r^2 = (m r^2) a_{\Gamma} = I a_{\Gamma}$$

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON



Υπολογισμός επιτάχυνσης στο σύστημα βάρους-τροχαλίας

$$\boxed{\tau_{NET} = I a_\Gamma}$$

$$-RT = \frac{1}{2} M R^2 a_\Gamma \Rightarrow T = -\frac{1}{2} M R a_\Gamma$$

$$T = -\frac{1}{2} M a$$

Αλλά $T - mg = ma$ οπότε

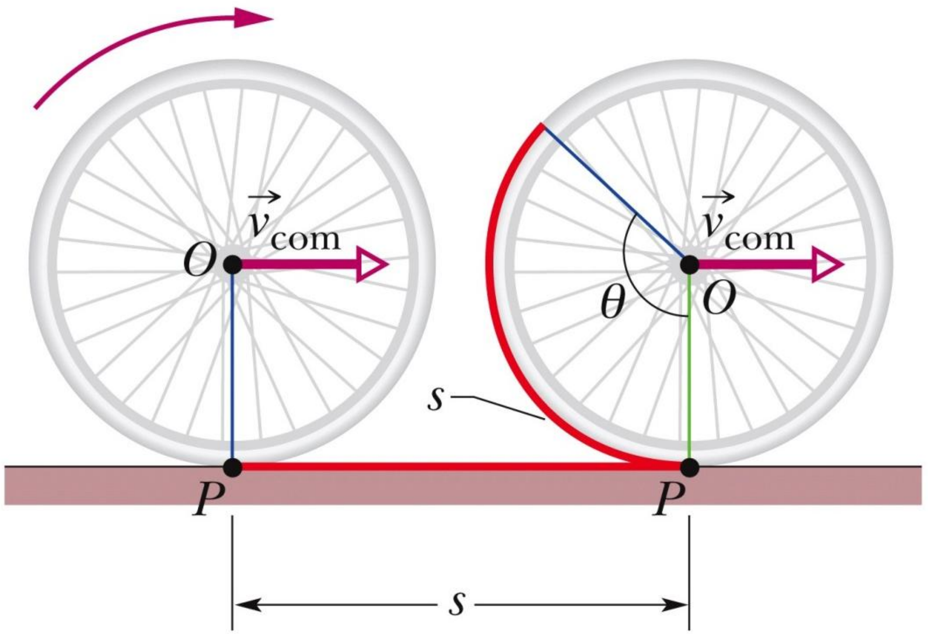
$$\boxed{a = -g \frac{2m}{M + 2m}}$$

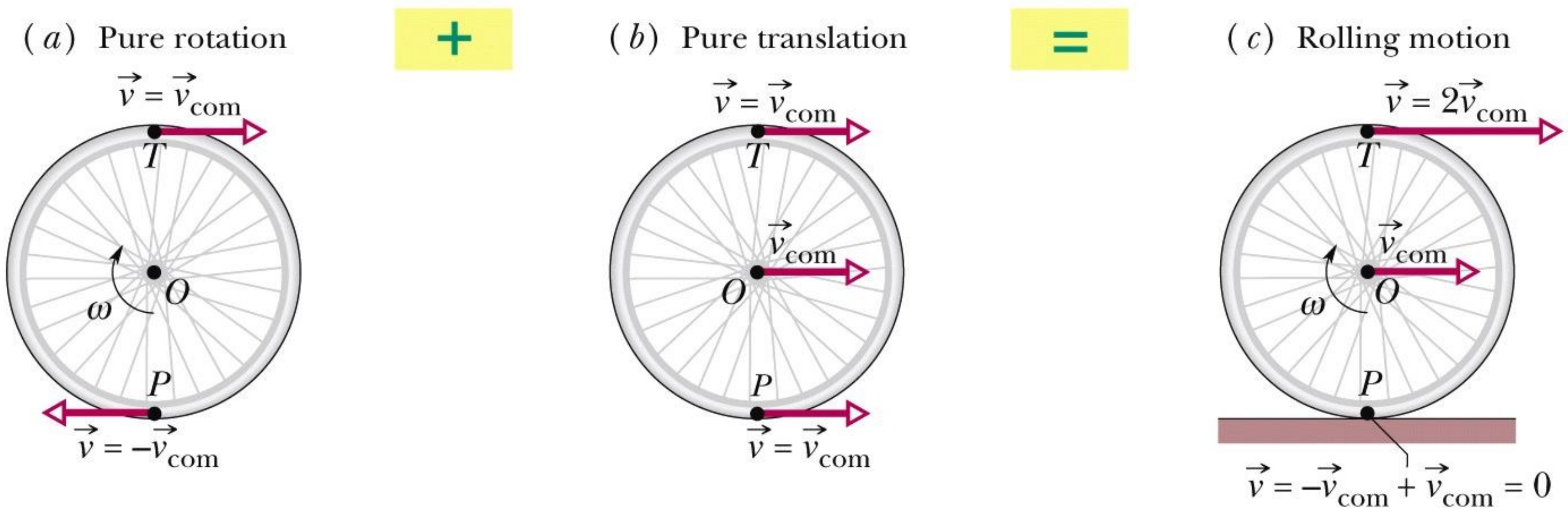
ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Some Corresponding Relations for Translational and Rotational Motion

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{\text{net}} = ma$	Newton's second law	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Work	$W = \int F\,dx$	Work	$W = \int \tau\,d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

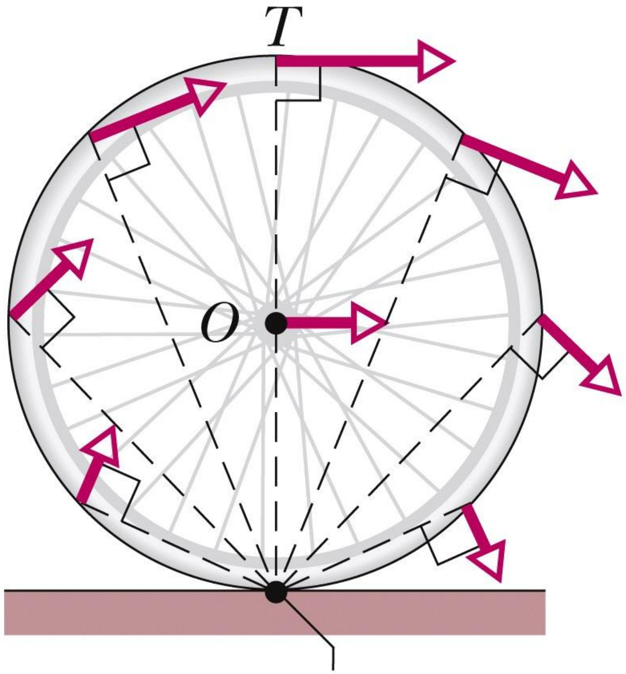




ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Φωτογραφία τροχού ποδηλάτου που κυλάει

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΥΛΙΣΗΣ



Rotation axis at P

Κινητική ενέργεια κυλιόμενου τροχού:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{CM} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2$$

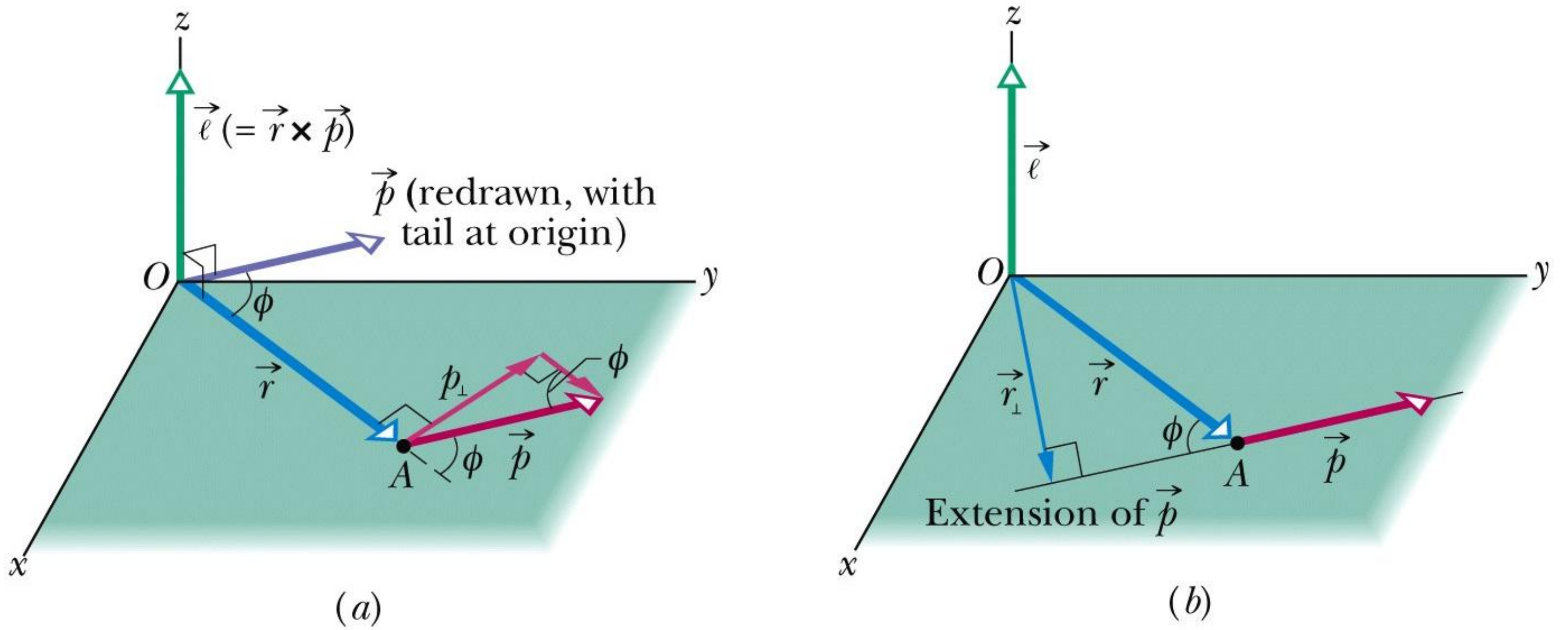
$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

Περιστροφική και μεταφορική κινητική ενέργεια

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

$$L = r\,mv\sin\varphi \qquad L = r_{\perp}p = r_{\perp}mv \qquad L = r\,p_{\perp}$$



ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

Απόδειξη

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) + m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\vec{v} \times \vec{v}\right) + m\left(\vec{r} \times \vec{a}\right) = 0 + \left(\vec{r} \times m\vec{a}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Downarrow$$

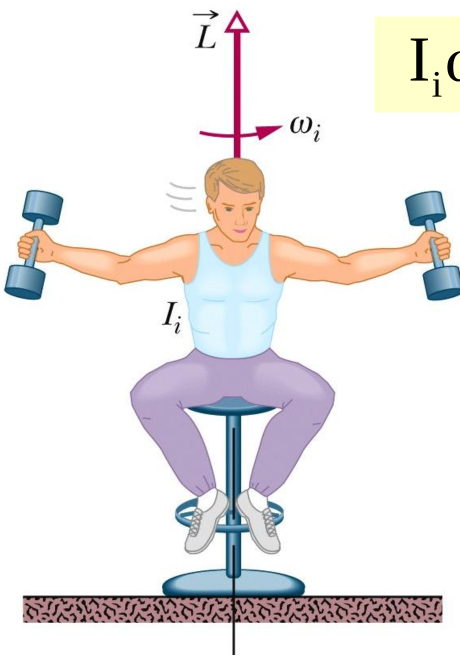
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

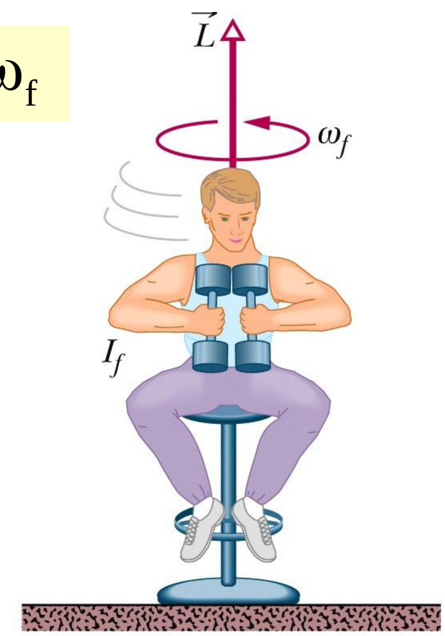
Αρχή Διατήρησης Στροφορμής

Αν η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται σε σύστημα είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0 \Rightarrow L = \text{const}}$$



$$I_i \omega_\iota = I_f \omega_f$$



ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Αντιστοίχηση Δυναμικών Μεγεθών Μεταφορικής και Περιστροφικής Κίνησης

Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\ (=\vec{r}\times\vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell}\ (=\vec{r}\times\vec{p})$
Linear momentum[b]	$\vec{P}\ (=\Sigma\vec{p}_i)$	Angular momentum[b]	$\vec{L}\ (=\Sigma\vec{\ell}_i)$
Linear momentum[b]	$\vec{P}=M\vec{v}_{\text{com}}$	Angular momentum[c]	$L=I\omega$
Newton's second law[b]	$\vec{F}_{\text{net}}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law[b]	$\vec{\tau}_{\text{net}}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law[d]	$\vec{P}=$ a constant	Conservation law[d]	$\vec{L}=$ a constant

ΔΥΝΑΜΗ **F** ⟷ ΡΟΠΗ **τ**

ΟΡΜΗ **p** ⟷ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ **L**

Αρμονική Ταλάντωση Υλικού Σημείου

Η απομάκρυνση x(t) υλικού σημείου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Η ασκούμενη δύναμη ελατηρίου σε σημειακή μάζα m δίνεται από τη σχέση:

$$F = -kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

όπου:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Αρμονική Ταλάντωση Υλικού Σημείου

Η συνάρτηση x(t)= A sin(ωt) αποτελεί μια απλή λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{d^2}{dt^2}\left[A\sin(\omega t)\right] + \omega^2\left[A\sin(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[A\,\omega\cos(\omega t)\right] + \omega^2\left[A\sin(\omega t)\right] =$$

$$= -A\omega^2\sin(\omega t) + \omega^2 A\sin(\omega t) = 0$$

Αρμονική Ταλάντωση Στερεού Σώματος

Κατ’ αντιστοιχία, στη στροφική κίνηση ενός στερεού σώματος, όταν ικανοποιείται η σχέση μεταξύ της ροπής τ και της γωνιακής απομάκρυνσης θ(t):

$$\tau = -k\theta \Leftrightarrow I a_{\Gamma} = -k\theta \Leftrightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0}$$

τότε το στερεό σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

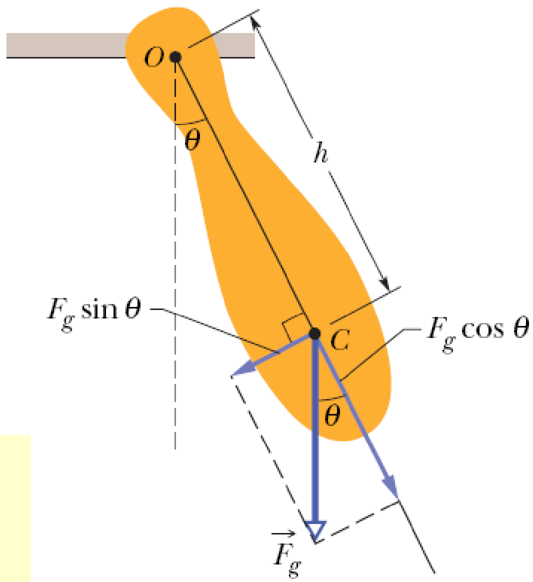
$$\omega^2 = \frac{k}{I} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad \text{και} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

Η σταθερά k ταυτίζεται στην περίπτωση αυτή με το άθροισμα όλων των ασκούμενων στο στερεό σώμα ροπών τ_0 με μοχλοβραχίονα την απόστασή των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων από το κέντρο περιστροφής.

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Παράδειγμα

Αν το στερεό σώμα του σχήματος εκτραπεί κατά μικρή γωνία θ, τότε η ασκούμενη ροπή του βάρους F_g ως προς τον άξονα περιστροφής O είναι:



$$\tau_0 = -mgh\sin\theta \;\Rightarrow\; \tau_0 \approx -mgh\theta$$

και η εξίσωση κίνησής του δίνεται από τη σχέση:

$$Ia_\Gamma = -mgh\theta \Leftrightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

Άρα το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με γωνιακή ταχύτητα ω και περίοδο T:

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad \text{και} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Η ροπή αδράνειας I αναφέρεται στον άξονα περιστροφής O ενώ το τ_0=mgh είναι η μοναδική ασκούμενη ροπή του βάρους με μοχλοβραχίονα το h, δηλαδή την απόσταση του κέντρου μάζας (C) από τον άξονα περιστροφής (O).