

Άσκηση:

Κατά την αδιαβατική αντιστρεπτή εκτόνωση ενός ιδανικού αερίου ισχύει η σχέση Poisson $T V^{\gamma-1} = \text{σταθερό}$. Να υπολογίσετε την μεταβολή της εντροπίας δείγματος n mol από V_1, T_1 σε V_2 .

Λύση:

Ας χρησιμοποιήσουμε όγκο και θερμοκρασία ως ανεξάρτητες μεταβλητές και ας εκφράσουμε την εντροπία ως συνάρτηση αυτών των μεταβλητών: $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$.

Για τον πρώτο όρο χρησιμοποιούμε την σχέση της θερμοχωρητικότητας $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}$, ενώ για τον δεύτερο όρο χρειαζόμαστε μια σχέση Maxwell. Η

τελευταία θα προκύψει από θεμελιώδη στην οποία εμφανίζονται τα γινόμενα SdT και PdV . Αυτά τα συναντούμε στην εξίσωση της ενέργειας Helmholtz: $dF = -SdT - PdV$, οπότε η αντίστοιχη σχέση

Maxwell είναι $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$. Με $PV = nRT$ προκύπτει $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{nRT}{V}\right)_V = \frac{nR}{V}$

Εφόσον ισχύει η σχέση Poisson, στην συγκεκριμένη διεργασία η θερμοκρασία εξαρτάται από τον όγκο:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T V^{\gamma-1} \Rightarrow T = T_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\gamma-1} \text{ και } dT = \frac{dT}{dV} dV = \frac{d}{dV} \left[T_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\gamma-1} \right] dV = T_1 V_1^{\gamma-1} (1-\gamma) V^{-\gamma} dV$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη σχέση:

$$dS = \frac{C_V}{T_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\gamma-1}} T_1 V_1^{\gamma-1} (1-\gamma) V^{-\gamma} dV + \frac{nR}{V} dV = \left[C_V (1-\gamma) V^{-1} + \frac{nR}{V} \right] dV \Rightarrow$$

$$\text{Με } \gamma = \frac{C_P}{C_V} \Rightarrow dS = \left[C_V \left(1 - \frac{C_P}{C_V}\right) + nR \right] \frac{dV}{V} = (C_V - C_P + nR) \frac{dV}{V}. \text{ Όμως σε ιδανικό αέριο ισχύει}$$

$C_P - C_V = nR$, οπότε $dS = 0 \frac{dV}{V} = 0$. Άρα η εντροπία κατά την αδιαβατική αντιστρεπτή εκτόνωση (ή

συμπίεση) ενός ιδανικού αερίου δεν μεταβάλλεται. Αυτό ισχύει για κάθε σύστημα το οποίο υποβάλλεται σε αδιαβατική αντιστρεπτή διεργασία. Αυτό προκύπτει κατευθείαν από τον ορισμό της

εντροπίας $dS = \frac{dq_{rev}}{T}$, διότι η θερμότητα είναι 0 και η διεργασία είναι αντιστρεπτή.