

Άσκηση:

Να αποδείξετε την σχέση αλλαγής των 4 μεταβλητών:  $\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z = \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_W + \left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_Y \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)_Z$

Λύση:

Οι δύο πρώτοι όροι μας καθοδηγούν να εκφράσουμε την  $X$  μια φορά ως συνάρτηση των  $Y$  και  $Z$  και μια φορά ως συνάρτηση των  $Y$  και  $W$ .

$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z dY + \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y dZ$  και  $dX = \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_W dY + \left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_Y dW$ . Απαιτείται άλλη μια σχέση για την

εξάρτηση της  $W$  από τα  $Y$  και  $Z$ :  $dW = \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)_Z dY + \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_Y dZ$

Αντικαθιστούμε την τελευταία στην προηγούμενη και έχουμε:

$$dX = \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_W dY + \left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_Y \left[ \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)_Z dY + \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_Y dZ \right] = \left[ \left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_W + \left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_Y \left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right)_Z \right] dY + \left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_Y \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_Y dZ$$

Από σύγκριση της τελευταίας με την πρώτη σχέση προκύπτει η αποδεικτέα σχέση, διότι οι συντελεστές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $dY$  πρέπει να είναι ίδιοι.

Από τους συντελεστές του  $dZ$  προκύπτει επίσης ο κανόνας της αλυσίδας:  $\left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)_Y = \left(\frac{\partial X}{\partial W}\right)_Y \left(\frac{\partial W}{\partial Z}\right)_Y$

12/3/2020