ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΒΟΗΘΗΜΑ

Μὲ τὰ θερμοδυναμικὰ συστήματα εἶναι συνυφασμέναι πολλαὶ ἰδιότητες, δηλαδὴ μεταβληταί. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ποικίλλων ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ συστήματος, εἶναι σχετικῶς μικρός, πάντως ὄχι μικρότερος τῶν δύο. Μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν οἱαδήποτε ἄλλη ἰδιότης καθίσταται ἐξηρτημένη μεταβλητή. Εἶναι ἑπομένως προφανὲς ὅτι αἱ θερμοδυναμικαὶ συναρτήσεις, εἶναι συναρτήσεις μὲ περισσοτέρας τῆς μιᾶς ἀνεξαρτήτους πραγματικὰς μεταβλητάς. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ μαθηματικὴ τεχνικὴ τῆς θερμοδυναμικῆς συγκεντροῦται κυρίως περὶ τὴν μερικὴν παραγώγισιν. Πέραν ταύτης, εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, πρόσθετοι μαθηματικαὶ μέθοδοι εἶναι ἀπαραίτητοι. Εἰς τὸ παρὸν Παράρτημα, πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ἀναγνωστῶν, παραθέτομεν συνοπτικῶς μερικὰς ἐκ τῶν μᾶλλον ἐν χρήσει εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν μαθηματικῶν μεθόδων.

§ Π.1. Θεωρήματα μερικῆς παραγωγίσεως

Θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $z = f(x, y)$. Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \qquad (\Pi.1.1)$$

Ἐὰν αἱ x καὶ y εἶναι συναρτήσεις τῆς αὐτῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς u, δηλαδὴ ἐὰν ἔχωμεν:

$$z = f(x, y), \; x = f_1(u), \; y = f_2(u)$$

τότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{dz}{du} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \frac{dx}{du} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \frac{dy}{du} \tag{Π. 1.2}$$

Διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν:

$$z = f(x, y), \quad x = f_1(y), \quad y \text{ ἀνεξάρτητος}$$

ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει:

$$\frac{dz}{dy} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \frac{dx}{dy} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \tag{Π. 1.3}$$

Θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(x, y, z) = 0$. Ὑποθέτομεν ὅτι αὕτη δύναται νὰ λυθῇ ὡς πρὸς οἱανδήποτε τῶν μεταβλητῶν. Οὕτως ἐκ τῶν $x = f_1(y, z)$ καὶ $y = f_2(x, z)$ ἔχομεν:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz, \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz \tag{Π. 1.4}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην τὸ διαφορικὸν dy ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz \tag{Π. 1.5}$$

Δεδομένου ὅτι αἱ dx καὶ dz εἶναι ἀμφότεραι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ἡ ὡς ἄνω ἐξίσωσις θὰ ἰσχύῃ τόσον διὰ $dx = 0$, $dz \neq 0$, ὅσον καὶ διὰ $dx \neq 0$, $dz = 0$. Ἐκ τῶν δύο τούτων περιπτώσεων προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι δύο σχέσεις:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1 \tag{Π. 1.6}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x} \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \tag{Π. 1.7}$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τέσσαρας μεταβλητὰς τὰς x, y, z, u ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι ἀνεξάρτητοι. Οὕτω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$x = f_1(u, z), \quad x = f_2(u, y) \quad y = f_3(u, z)$$

Τὰ διαφορικὰ τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι ἀντιστοίχως:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_z du + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_u dz$$

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y du + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u dy \qquad (\Pi.\ 1.8)$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z du + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_u dz$$

Ἀντικατάστασις τοῦ dy εἰς τὴν δευτέραν, ἐκ τῆς τρίτης τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων, δίδει:

$$dx = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z\right] du + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_u dz \qquad (\Pi.\ 1.9)$$

Σύγκρισις τῶν συντελεστῶν μεταξὺ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως καὶ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων (8) δίδει:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_y + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z \qquad (\Pi.\ 1.10)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_u \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = 1 \qquad (\Pi.\ 1.11)$$

Ἐφιστᾶται ἡ προσοχὴ εἰς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (11). Εἰς τὴν τελευταίαν ἡ μεταβλητὴ u τηρεῖται σταθερὰ καὶ εἰς τὰς τρεῖς παραγώγους.

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσαι εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν εἶναι αἱ ἐξισώσεις (7) καὶ (10).

Ἐπὶ παραδείγματι ἐὰν ἀντὶ τῶν x, y, z εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7) τεθοῦν αἱ θερμοδυναμικαὶ μεταβληταὶ P, T καὶ V λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = \frac{\alpha}{k_T} \qquad (\Pi.\ 1.11\alpha)$$

ὅπου α καὶ k_T οἱ συντελεσταὶ θερμικῆς διαστολῆς καὶ ἰσοθέρμου συμπιεστότητος. Ἐπίσης ἐὰν εἰς τὴν (10) ἀντικατασταθοῦν τὰ μαθηματικὰ σύμβολα x, y, z, u διὰ τῶν θερμοδυναμικῶν ποσοτήτων U, V, P καὶ T, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad (\Pi.1.11\beta)$$

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν $y_1, \ldots, y_n$ μεταβληταί, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι συνάρτησις τῶν αὐτῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x_1 καὶ x_2. Ἑπομένως εἶναι δυναταὶ αἱ ἐξισώσεις:

$$y_i = f_i\,(x_1, x_2) \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (\Pi.1.12)$$

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{y_j}$, δηλαδὴ ὅταν μία τῶν μεταβλητῶν $y_1, \ldots, y_n$ τηρῆται σταθερά. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (12) γράφομεν τὰ διαφορικὰ τῶν y_i καὶ y_j :

$$dy_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{x_2} dx_1 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_1} dx_2 \qquad (\Pi.1.13)$$

$$dy_j = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\right)_{x_2} dx_1 + \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2}\right)_{x_1} dx_2 \qquad (\Pi.1.14)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (14) $dy_j = 0$, λύοντες ὡς πρὸς dx_2 καὶ εἰσάγοντες τὴν προκύπτουσαν σχέσιν εἰς τὴν (13), λαμβάνομεν :

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{y_j} = \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{x_2}\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_1}\cdot\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\right)_{x_2}}{\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2}\right)_{x_1}} \qquad (\Pi.1.15)$$

Ὡς δευτέρα περίπτωσις ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k}$. Γράφομεν τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $y_k = f_k\,(x_1, x_2)$:

$$dy_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_k}{\partial x_2} dx_2 \qquad (\Pi.1.16)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις (16) καὶ (14) ὡς πρὸς dx_2 καὶ ἐξισώνοντες τὰς προκυπτούσας, εὑρίσκομεν μίαν σχέσιν διὰ τὸ dx_1. Ἐπαναλαμβάνοντες τὸ αὐτό, διὰ τὸ διαφορικὸν dx_1, εὑρίσκομεν ἑτέραν σχέσιν ὡς πρὸς dx_2. Τὰς οὕτω προκυψάσας δύο σχέσεις εἰσάγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (13), εἰς τὴν ὁποίαν τέλος θέτοντες $dy_k = 0$ λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k} = \frac{\dfrac{\partial y_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_2} - \dfrac{\partial y_i}{\partial x_2}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial y_j}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_2} - \dfrac{\partial y_j}{\partial x_2}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_1}} \qquad (\Pi.\,1.17)$$

Ἰακωβιαναί. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἡ παράγωγος $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k}$ δίδεται ὡς ὁ λόγος δύο ὁριζουσῶν ἐχουσῶν ὡς στοιχεῖα μερικὰς παραγώγους. Εἰς τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, ὡς καὶ εἰς τὰ ἀνάλογα προηγουμένων περιπτώσεων, καταλήγομεν κατὰ τρόπον ταχύτερον καὶ εὐχερέστερον χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον τῶν ἰακωβιανῶν.

Διὰ n ἐξηρτημένας μεταβλητὰς $y_1, \ldots, y_n$, καὶ n ἀνεξαρτήτους $x_1, \ldots, x_n$, ἡ ὁρίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ὀνομάζεται *ἰακωβιανὴ* τῶν $y_1, \ldots, y_n$ ὡς πρὸς $x_1, \ldots, x_n$ καὶ παρίσταται:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = J\left(\frac{y_1, \ldots, y_n}{x_1, \ldots, x_n}\right)$$

Εἰδικώτερον εἰς τὴν περίπτωσιν δύο μόνον ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, τῶν x_1 καὶ x_2, τὴν ὁποίαν καὶ μόνον θὰ ἐξετάσωμεν ἐνταῦθα, ἡ ἰακωβιανὴ τῶν y_i, y_j (δύο τυχαίων ἐξηρτημένων μεταβλητῶν), ὡς πρὸς τὰς ἀνεξαρτήτους x_1 καὶ x_2 γράφεται:

$$J\left(\frac{y_i\,,\,y_j}{x_1,\,x_2}\right) = \frac{\partial(y_i\,,\,y_j)}{\partial(x_1,\,x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_j}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_j}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial y_j}{\partial x_2} - \frac{\partial y_i}{\partial x_2}\frac{\partial y_j}{\partial x_1} \qquad (\Pi.\,1.18)$$

Ἀναγράφομεν κατωτέρω μερικὰς ἐκ τῶν ἀπαραιτήτων δι' ἐφαρμογὰς εἰς τὴν περιοχὴν τῆς θερμοδυναμικῆς ἰδιοτήτων τῶν ἰακωβιανῶν, χωρὶς ἀπόδειξιν (εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ ἡ ἀνάπτυξις τῶν ἰακωβιανῶν εἰς τὰς ἀντιστοίχους ὁριζούσας). Οὕτω:

$$\frac{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} = -\,\frac{\partial(y_j\,,\,y_i\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} \qquad (\Pi.\,1.19)$$

$$\frac{\partial(y_i\,,\,y_i\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} = \frac{\partial(y_i\,,\,k)}{\partial(x_1,\,x_2)} = 0 \qquad (k = \text{σταθ.}) \qquad (\Pi.\,1.20)$$

Ἐὰν $x_1 = f_1(z_1,\,z_2)$ καὶ $x_2 = f_2(z_1,\,z_2)$ ἔχομεν:

$$\frac{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} = \frac{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}{\partial(z_1,\,z_2)}\;\frac{\partial(z_1,\,z_2)}{\partial(x_1,\,x_2)} \qquad (\Pi.\,1.21)$$

(πολλαπλασιαστικὴ ἰδιότης).

Ἐπίσης:

$$\frac{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1,\,x_2)}{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}} \qquad (\Pi.\,1.22)$$

(ἀνάλογον τῶν ἁπλῶν παραγώγων).

Εἰδικώτερον:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{x_2} = \frac{\partial(y_i\,,\,x_2)}{\partial(x_1,\,x_2)} = -\,\frac{\partial(x_2,\,y_i\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} \qquad (\Pi.\,1.23)$$

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \frac{\partial(x_1,\,y_j\,)}{\partial(x_1,\,x_2)} = -\,\frac{\partial(y_j\,,\,x_1)}{\partial(x_1,\,x_2)} \qquad (\Pi.\,1.24)$$

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν, διὰ τῶν ἰακωβιανῶν, τὴν παράγωγον $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{y_j}$ ἐξ ἄλλων παραγώγων ὡς πρὸς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τὰς $x_1,\,x_2$.
Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (23) καὶ (21 - 22) ἔχομεν:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{y_j} = \frac{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}{\partial(x_1,\,y_j\,)} = \frac{\partial(y_i\,,\,y_j\,)}{\partial(x_1,\,x_2)}\;\frac{\partial(x_1,\,x_2)}{\partial(x_1,\,y_j\,)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{x_2}\left(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_2}\right)_{x_1} - \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_1}\left(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_1}\right)_{x_2}}{\left(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_2}\right)_{x_1}} \qquad (\Pi.\,1.24\alpha)$$

Τὸ ἀποτέλεσμα συμφωνεῖ πρὸς τὸ ἤδη ἐπιτευχθὲν (ἐξίσωσις 15).

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k}$ γράφομεν :

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k} = \frac{\partial(y_i\,,\,y_k)}{\partial(y_j\,,\,y_k)} = \frac{\partial(y_i\,,\,y_k)}{\partial(x_1,\,x_2)}\;\frac{\partial(x_1,\,x_2)}{\partial(y_j\,,\,y_k)}$$

$$= \frac{\partial(y_i\,,\,y_k)}{\partial(x_1,\,x_2)}\;\frac{1}{\dfrac{\partial(y_j\,,\,y_k)}{\partial(x_1,\,x_2)}} = \frac{\dfrac{\partial y_i}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_2} - \dfrac{\partial y_i}{\partial x_2}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial y_j}{\partial x_1}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_2} - \dfrac{\partial y_j}{\partial x_2}\dfrac{\partial y_k}{\partial x_1}} \qquad (\Pi.\ 1.24\beta)$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ προηγουμένως ἐπιτευχθέν,(ἐξίσωσις 17), εἶναι ὅμως προφανὴς ἡ ὑπεροχὴ τῆς μεθόδου τῶν ἰακωβιανῶν εἰς ἁπλότητα καὶ ταχύτητα.

Ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι $y_1 = f_1(y_2)$ καὶ $y_2 = f_2(x_1,\,x_2)$.
Ἔχομεν ἑπομένως :

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{x_2} = \frac{dy_1}{dy_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{x_2} \qquad (\Pi.\ 1.25)$$

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \frac{dy_1}{dy_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{x_1} \qquad (\Pi.\ 1.26)$$

Ἀπαλείφοντες τὴν $\frac{dy_1}{dy_2}$, μεταξὺ τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων, λαμβάνομεν :

$$J\left(\frac{y_1,\,y_2}{x_1,\,x_2}\right) = \frac{\partial(y_1,\,y_2)}{\partial(x_1,\,x_2)} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{x_2}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)_{x_1}\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{x_2} = 0$$

$$(\Pi.\ 1.27)$$

Ἡ ἐξίσωσις (27) ἀποτελεῖ τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ y_1 εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς y_2. Ἐφαρμογὴν τῆς συνθήκης (27) ἔχομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4.3.49).

Δίδομεν κατωτέρω δύο παραδείγματα ἐκ τῆς θερμοδυναμικῆς.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_V$, ἐκ παραγώγων ἀναφερομένων εἰς μεταβλητὰς P, T. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (24α) ἔχομεν :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial(H,\,V)}{\partial(P,\,V)} = \frac{\partial(H,V)}{\partial(P,\,T)}\;\frac{\partial(P,\,T)}{\partial(P,\,V)} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right]\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T + C_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

Αἱ παράγωγοι $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$ καὶ $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$ ὑπολογίζονται ἐκ τῆς καταστατικῆς ἐξισώσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀερίου $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0$ καὶ ἐπομένως $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_V = C_P \frac{V}{R}$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον. Ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$. Ὁμοίως ἐκ τῆς (24α) ἔχομεν: $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{\partial(V, S)}{\partial(P, S)} = \frac{\partial(V, S)}{\partial(P, T)}\,\frac{\partial(P, T)}{\partial(P, S)}$

$$= \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\right]\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P.$$

Δεδομένου ὅτι $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ καὶ $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P}{T}$ λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2 \frac{T}{C_P} = -V\left(k_T - \frac{TV\alpha^2}{C_P}\right)$$

Εἰς περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀερίου ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἁπλοποιεῖται εἰς τήν:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{V}{P}$$

Διὰ λεπτομερείας ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰακωβιανῶν παραπέμπομεν εἰς H. Margenau and G. Murphy, «The Mathematics of Physics and Chemistry», van Nostrand, 1956.

§ Π.2. Τέλεια καὶ μὴ τέλεια διαφορικὰ

Εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν εἶναι συνήθης ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς μιᾶς συναρτήσεως $z = f(x, y)$ εἰς δύο σημεῖα x_1, y_1 καὶ x_2, y_2 δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως:

$$dz(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \qquad (\Pi.2.1)$$

Ἐν τούτοις τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_1^2 M(x, y)dx$ δὲν ἔχει ἔννοιαν, ἐὰν δὲν δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ ἡ y τῇ βοηθείᾳ σχέσεως $y = f(x)$, δηλαδὴ ἂν δὲν καθορισθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον x, y ὁ δρόμος κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου θὰ διεξαχθῇ ἡ ὁλοκλήρωσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι δρόμοι, κατὰ μῆκος ἑκάστου τῶν ὁποίων ὅμως ἡ τιμὴ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος εἶναι διάφορος. Ἐν τούτοις ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι δυνατὴ καὶ ἂν ἀκόμη ἡ σχέσις $y = f(x)$ δὲν δίδεται, ἐφ' ὅσον τὸ διαφορικὸν dz εἶναι τέλειον ἢ πλῆρες διαφορικόν, ἐὰν δηλαδὴ $M = \frac{\partial z}{\partial x}, N = \frac{\partial z}{\partial y}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (\Pi.\ 2.2)$$

Γενικώτερον, ἐὰν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι περισσότεραι τῶν δύο, δηλαδὴ ἀντὶ τῆς (1) δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

$$dz(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \ldots + M_n dx_n$$

πρέπει νὰ ἰσχύῃ:

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_j} = \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad (\Pi.\ 2.3)$$

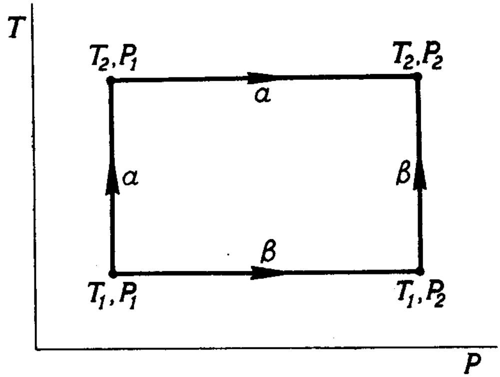
Αἱ ἐξισώσεις (2) ἢ (3) ἀποτελοῦν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην ἵνα τὸ διαφορικὸν dz εἶναι τέλειον, χρησιμοποιοῦνται δὲ εὐρύτατα εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν πρὸς συσχέτισιν παραγώγων, π.χ. εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν σχέσεων Maxwell. Διαφορικὰ μὴ πληροῦντα τὴν συνθήκην (2) ἢ γενικώτερον τὴν (3) (ὡς π. χ. τὰ διαφορικὰ dq καὶ dw) ὀνομάζονται *μὴ τέλεια (ἢ μὴ πλήρη) διαφορικά*. Ἡ συνθήκη (3) εἶναι γνωστὴ ὡς *κριτήριον Euler*.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀερίου καὶ δι' ἓν γραμμομόριον αὕτη γράφεται:

$$dV = \frac{R}{P} dT - \frac{RT}{P^2} dP \qquad (\Pi.\ 2.4)$$

Ὁλοκληρώνοντες κατὰ μῆκος τῶν δρόμων α καὶ β (σχ. 1) ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$(\Delta V)_\alpha = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{P_1} dT - \int_{P_1}^{P_2} \frac{RT_2}{P^2} dP = \frac{RT_2}{P_2} - \frac{RT_1}{P_1}$$



Σχῆμα Π. 2.1. Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς ἐξισώσεως (4) εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ δρόμου κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου ἡ ὁλοκλήρωσις διεξάγεται.

$$(\Delta V)_\beta = -\int_{P_1}^{P_2} RT_1 \frac{dP}{P^2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{P_2} dT = \frac{RT_2}{P_2} - \frac{RT_1}{P_1}$$

Ἐξ ἄλλου ἐφαρμόζοντες τὴν συνθήκην (2) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) ἔχομεν:

$$\left[\frac{\partial\left(\frac{R}{P}\right)}{\partial P}\right]_T = -\left[\frac{\partial\left(\frac{RT}{P^2}\right)}{\partial T}\right]_P = -\frac{R}{P^2}$$

Ἀποδεικνύεται οὕτω ὅτι τὸ διαφορικὸν dV εἶναι τέλειον διαφορικόν.

Διαφορικὰ ἀνωτέρας τάξεως. Ἔστω ἡ z συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x, y. Τὸ διαφορικὸν dz τῆς z εἶναι ἡ συνάρτησις $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Ἡ συνάρτησις αὕτη dz θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τῶν x, y, θὰ ἔχη διαφορικὸν σημειούμενον ὡς d^2z καὶ ὀνομαζόμενον διαφορικὸν δευτέρας τάξεως τῆς z. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διαφορικοῦ ἔχομεν:

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

(Ὅροι περιέχοντες διαφορικὰ d^2x, d^2y μηδενίζονται, καθ' ὅσον τὰ dx καὶ dy εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν μεταβλητῶν x, y. Τὰ διαφορικὰ dx καὶ dy δύνανται νὰ λάβουν οἱασδήποτε τιμὰς ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y).

Διὰ τὸ διαφορικὸν τρίτης τάξεως d^3z ἔχομεν κατ' ἀναλογίαν:

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$

'Ανάλογοι σχέσεις προκύπτουν διὰ τὰ ἀνωτέρας τάξεως διαφορικὰ ὡς καὶ διὰ συναρτήσεις μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

῾Η αὔξησις τῆς τιμῆς, Δz, μιᾶς συναρτήσεως z διὰ δεδομένην αὔξησιν τῶν τιμῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἡ παρεχομένη δι' ἀναπτύξεως κατὰ Taylor δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν διαφορικῶν ὡς:

$$\Delta z = dz + (1/2!)d^2z + \ldots + (1/n!)\, d^n z + \ldots \qquad (\Pi.2.5)$$

Τὰ διαφορικὰ dz, d^2z, ... ὑπολογιζόμενα ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη καὶ εἰσαγόμενα εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) δίδουν τὴν συνήθη μορφὴν τῆς σειρᾶς.

§ Π.3. ῾Ομοιογενεῖς συναρτήσεις

῾Η προσθετικότης τῶν ἐκτατικῶν ἰδιοτήτων τῆς θερμοδυναμικῆς, ἀναφερομένη ἐπὶ φυσικῶν ὁμοιογενῶν συστημάτων, μαθηματικῶς ὑποδηλοῖ ὅτι αἱ ἐκτατικαὶ ἰδιότητες εἶναι ὁμοιογενεῖς συναρτήσεις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ἐκ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐκτατικὰς τοιαύτας.

Μία συνάρτησις $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ λέγεται ὁμοιογενὴς βαθμοῦ n ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $x_1, \ldots, x_m$ ἐάν:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1, \ldots, x_m) \qquad (\Pi.3.1)$$

Π.χ. αἱ συναρτήσεις $x^2 + y^2 + z^2$, $\dfrac{x+y}{x^4+y^4}$, $\dfrac{y}{x}$ εἶναι ὁμοιογενεῖς 2, —3 καὶ 0 βαθμοῦ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y, z. Κατωτέρω θὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν ἡ z εἶναι ὁμοιαγενὴς συνάρτησις βαθμοῦ n ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $x_1, \ldots, x_m$, τότε ἰσχύει (Θεώρημα Euler):

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_m\frac{\partial z}{\partial x_m} = nz \qquad (\Pi.3.2)$$

῎Εστω: $\qquad x_1 = \alpha_1\lambda, \quad x_2 = \alpha_2\lambda, \ldots, \quad x_m = \alpha_m\lambda \qquad (\Pi.3.3)$

καὶ ἑπομένως:

$$z = f(x_1, \ldots, x_m) = f(\alpha_1\lambda, \ldots, \alpha_m\lambda) = \lambda^n f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

Ἡ συνάρτησις z εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς λ καὶ διὰ διαφορίσεως τῶν δύο ἰσοδυνάμων μορφῶν $f(\alpha_1\lambda, \ldots, \alpha_m\lambda)$ καὶ $\lambda^n f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ὡς πρὸς λ λαμβάνομεν:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\lambda} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_m}\frac{dx_m}{d\lambda}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x_1}\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_m}\alpha_m \qquad (\Pi.3.4)$$

λόγῳ τῆς (3).

Ἐπίσης: $$\frac{dz}{d\lambda} = n\lambda^{n-1} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \qquad (\Pi.3.5)$$

Ἐξισώνοντες τὰς (4) καὶ (5) καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ λ ἔχομεν:

$$\alpha_1\lambda\frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_m\lambda\frac{\partial z}{\partial x_m} = n\lambda^n f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἐξισώσεις (3) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_m\frac{\partial z}{\partial x_m} = nf(x_1, x_2, \ldots, x_m) = nz$$

δηλαδὴ τὴν ἐξίσωσιν (2).

Ἡ ἐξίσωσις (2) διὰ $n = 1$ χρησιμοποιεῖται πρὸς σύνδεσιν τῶν ἐκτατικῶν ἰδιοτήτων συστήματος ἐκ περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς συστατικῶν πρὸς τὰς μερικὰς γραμμομοριακὰς ἰδιότητας αὐτοῦ (§ 7.9).

§ Π.4. Μετασχηματισμὸς Legendre

Εἰς τὴν θερμοδυναμικήν, ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῆς φυσικῆς, ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τοῦ συστήματος, δηλαδὴ ἡ συνάρτησις ἐκείνη μὲ τὸ μέγιστον φυσικὸν καὶ μαθηματικὸν περιεχόμενον, δίδεται εἰς μεταβλητάς, αἱ ὁποῖαι ἀπὸ πρακτικῆς πλευρᾶς ὑστεροῦν. Ἡ ἐσωτερικὴ ἐνέργεια π.χ., εἶναι μία θεμελιώδης συνάρτησις μὲ ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τὴν ἐντροπίαν, τὸν ὄγκον καὶ τοὺς ἀριθμοὺς γραμμομορίων τῶν συστατικῶν ὁμοιογενοῦς ἰσοτρόπου φάσεως. Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι ἡ ἐντροπία, ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή, δὲν προσφέρεται ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, δεδομένου ὅτι οὔτε δύναται ἀμέσως νὰ μετρηθῇ, οὔτε νὰ ἐλεγχθῇ, ὡς τοῦτο εἶναι εὐχερὲς διὰ τὴν θερμοκρασίαν καὶ τὴν πίεσιν. Αἱ τελευταῖαι ὅμως αὗται εἶναι παράγωγοι τῆς συναρτήσεως τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας ὡς πρὸς τὰς ἀναφερθείσας ἐκτατικὰς μεταβλητὰς (S, V, n_i). Βεβαίως αἱ παράγωγοι δύνανται νὰ ὑποκαταστήσουν τὰς ἐκτατικὰς μεταβλητὰς εἰς τὴν θεμελιώδη συνάρτησιν. Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα ἐὰν ἡ οὕτω προκύπτουσα συνάρτησις διατηρῇ ἀναλλοίωτον τὸ φυσικὸν καὶ μαθηματικὸν περιεχόμενον τῆς ἀρχικῆς. Τὸ πρόβλημα τοῦτο καθίσταται σαφέστερον ἐξεταζόμενον εἰς ἁπλᾶς μαθηματικὰς συναρτήσεις.

Ἔστω συνάρτησις y μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τῆς x, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις :

$$y = f(x) \qquad (\Pi.\ 4.1)$$

Ἡ παράγωγος αὐτῆς p^* εἶναι:

$$p^* = \frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (\Pi.\ 4.2)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $p^* = f'(x)$ δύναται νὰ λυθῇ ὡς πρὸς x, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν ἐάν:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0 \qquad (\Pi.\ 4.3)$$

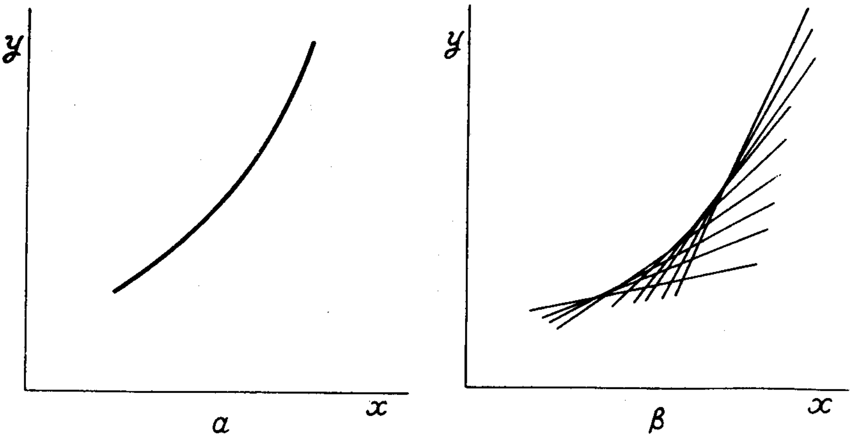
(συνθήκη ἡ ὁποία πάντοτε ἰσχύει εἰς τὰς θερμοδυναμικὰς συναρτήσεις). Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ:

$$y = f_1(p^*) \qquad (\Pi.4.4)$$

Ἐκ πρώτης ὄψεως τὸ πρόβλημα φαίνεται λελυμένον, ἐφ' ὅσον ἐπετεύχθη ἡ ἀντικατάστασις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x εἰς τὴν (1) διὰ τῆς παραγώγου p^* (ἐξίσωσις 4). Ἀλλὰ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (4) δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐνῶ ἡ (4) προέκυψε κατὰ τὸν προαναφερθέντα τρόπον ἐκ τῆς (1), τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει, καθ' ὅσον δὲν δύναται νὰ προκύψῃ μονοσημάντως ἡ (1) ἐκ τῆς (4). Πράγματι ἡ (4) εἶναι μία διαφορικὴ ἐξίσωσις $\left[y = f_1\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$ καὶ ἑπομένως λύσις αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ $f(y, x) = c$. Ἡ τελευταία γεωμετρικῶς παριστᾶ οἰκογένειαν καμπυλῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀσφαλῶς καὶ ἡ καμπύλη ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἡ λύσις τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν ἑνὸς καταλλήλου μετασχηματισμοῦ διὰ τοῦ ὁποίου θὰ ἦτο δυνατὴ ἡ μετάβασις ἐκ τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$, εἰς τὴν συνάρτησιν $\psi = \varphi(p^*)$, μέσῳ δὲ τοῦ ὁποίου θὰ ἦτο δυνατὴ καὶ ἡ ἀντίστροφος πορεία, δηλαδὴ ἡ μετάβασις ἐκ τῆς $\psi = \varphi(p^*)$ εἰς τὴν $y = f(x)$.

Ὁ ζητούμενος μετασχηματισμὸς κατανοεῖται εὐχερῶς ἐκ τῆς γεωμετρικῆς του ἑρμηνείας. Μία ὁμαλὴ καμπύλη δύναται ἐξ ἴσου καλῶς νὰ παρασταθῇ εἴτε ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πληροῦν μίαν δεδομένην ἐξίσωσιν, π.χ. τὴν (1), εἴτε ὡς ἡ περιβάλλουσα μιᾶς οἰκογενείας ἐφαπτομένων ἡ κλίσις τῶν ὁποίων ὑπακούει εἰς δεδομένην σχέσιν. Εἰς τὸ σχῆμα (1), (α καὶ β), παρίσταται ἡ αὐτὴ καμπύλη κατὰ τοὺς ὡς ἄνω δύο τρόπους.



Σχῆμα Π. 4.1. Καμπύλη (α) ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων· (β) ὡς περιβάλλουσα οἰκογενείας ἐφαπτομένων.

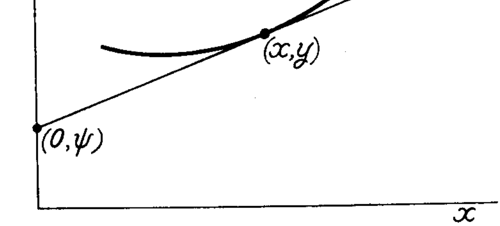
Τὸ πρόβλημα ἑπομένως ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἐξισώσεως ἡ ὁποία θὰ ἐπέτρεπε τὴν κατασκευὴν τῆς οἰκογενείας τῶν ἐφαπτομένων.

Ἂς θεωρήσωμεν εἰς τὸ σχῆμα (2) τὴν καμπύλην τοῦ (1α) εἰς σημεῖον τῆς ὁποίας ἐχαράχθη ἡ ἐφαπτομένη, ἡ ὁποία ἔστω ὅτι τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς ψ.

Ἐκ τοῦ σχήματος (2) προκύπτει ὅτι ἡ κλίσις p^* εἴς τι σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ψ συνδέονται διὰ τῆς ἐξισώσεως:

$$p^* = \frac{y - \psi}{x} \qquad (\Pi.\ 4.5)$$

εἴτε: $\psi = y - p^* x$ (Π. 4.6)



Σχῆμα Π. 4.2. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς ἐξισώσεως οἰκογενείας ἐφαπτομένων τοῦ σχήματος (1β).

Ἡ ἐξίσωσις (6) δίδει τὴν αἰτουμένην ἐξάρτησιν μεταξὺ τῆς τεταγμένης ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ψ καὶ τῆς κλίσεως p*, διὰ τῆς ὁποίας ἡ οἰκογένεια ἐφαπτομένων δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἄρα καὶ ἡ αἰτουμένη καμπύλη, ὡς ἡ περιβάλλουσα τούτων. Ἡ ἐξίσωσις (6) εἶναι ὁ κατάλληλος πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος μετασχηματισμός, γνωστὸς ὡς *μετασχηματισμὸς Legendre.*

Ἀπαλοιφὴ τῶν x καὶ y εἰς τὴν (6), μέσῳ τῶν (1) καὶ (2) δίδει:

$$\psi = \varphi(p^*) \qquad (\Pi.4.7)$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἐξίσωσιν (7) δύναται νὰ εὑρεθῇ ἡ (1). Οὕτω τὸ διαφορικὸν τῆς ἐξισώσεως (6) γράφεται:

$$d\psi = dy - p^*dx - xdp^* \qquad (\Pi.4.8)$$

Δεδομένου ὅτι ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχομεν $dy = p^*dx$, ἡ (8) γράφεται:

$$d\psi = -xdp^* \qquad (\Pi.4.9)$$

εἴτε:

$$\frac{d\psi}{dp^*} = -x = \varphi'(p^*) \qquad (\Pi.4.10)$$

Εἰς τὸν μετασχηματισμὸν (6) ἀπαλείφοντες τὰς ψ καὶ p*, μέσῳ τῶν (7) καὶ (10), λαμβάνομεν τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (1).

Συνοψίζοντες τὴν περιγραφεῖσαν μέθοδον γράφομεν:

$$\begin{array}{ll} y = f(x) & \psi = \varphi(p^*) \\ p^* = \dfrac{dy}{dx} & -x = \dfrac{d\psi}{dp^*} \\ \psi = -p^*x + y & y = xp^* + \psi \end{array} \qquad (\Pi.4.11)$$

Ἀπαλοιφὴ τῶν x καὶ y δίδει: Ἀπαλοιφὴ τῶν p* καὶ ψ δίδει:

$$\psi = \varphi(p^*) \qquad\qquad y = f(x)$$

Ἐὰν ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν $y = f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (α), διὰ μετασχηματισμὸν k ἐκ τῶν n μεταβλητῶν ($k \leqslant n$) θὰ χρησιμοποιηθῇ, ἀντὶ τοῦ (6), ὁ μετασχηματισμός:

$$\psi_k = y - \sum_1^k p_i^* x_i \qquad (\Pi.4.12)$$

Δεδομένου ὅτι $p_i^* = \dfrac{\partial y}{\partial x_i} = f'(x)$ (β), ἀντικατάστασις εἰς τὴν (12) τῆς y ἐκ τῆς (α) καὶ ἀκολούθως τῶν x ἐκ τῶν (β), δίδει τήν:

$$\psi = \varphi(p_1^*, \ldots, p_k^*, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad (\gamma)$$

Ἀντιστρόφως ἐκ τῆς (γ) μέσῳ τοῦ μετασχηματισμοῦ (12), δεδομένου ὅτι: $-x_i = \dfrac{\partial\psi}{\partial p_i^*} = \varphi'(p^*)$, λαμβάνεται ἡ (α).