

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧV

ΠΕΔΙΟΝ ΒΑΡΥΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

§ 15.1. Συστήματα εις τὸ πεδίον βαρύτητος

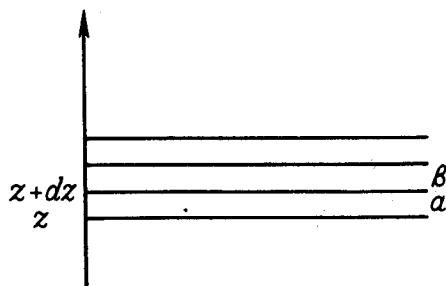
Εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς θερμοδυναμικῆς θεωρίας δὲν ἐλήφθη μέχρι τοῦδε ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ μετρήσεις τῶν θερμοδυναμικῶν ποσοτήτων διεξάγονται εἰς τὸ πεδίον βαρύτητος. Πρέπει ἐπομένως νὰ ἐξετασθῇ κατὰ πόσον αἱ συνθήκαι ἰσορροπίας τροποποιῦνται ἐκ τῆς παρουσίας τοῦ πεδίου βαρύτητος.

Αἱ ἀκόλουθοι ιδιότητες τοῦ πεδίου βαρύτητος εἶναι οὐσιώδεις: α) Τὸ πεδίον βαρύτητος εἶναι ὡς πρὸς τὴν ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν χρονικῶς καὶ τοπικῶς σταθερόν. β) Δὲν τροποποιεῖται τοῦτο ἐκ τῆς παρουσίας συστημάτων. Πεδία μὴ τροποποιούμενα ἐκ τῆς παρουσίας ὕλης, ἐπὶ τῆς ὁποίας ταῦτα δροῦν, ὀνομάζονται *ἐξωτερικὰ πεδία*. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν τὸ πεδίον βαρύτητος ἀποτελεῖ κατ' ἐξοχὴν παράδειγμα ἐξωτερικοῦ πεδίου. Λόγω ἀκριβῶς τοῦ γεγονότος τούτου, αἱ ἐπὶ τοῦ πεδίου βαρύτητος καὶ ἠλεκτρικοῦ πεδίου θεωρίαι, ἂν καὶ ἀναπτύσσονται μέχρι βαθμοῦ τινος παραλλήλως, ἐν τούτοις δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν εἰς τὰ θερμοδυναμικὰ συστήματα. γ) Τὸ πεδίον βαρύτητος δρᾷ μόνον ἐπὶ τῆς μάξης τῶν συστημάτων, ἀνεξαρτήτως τῆς χημικῆς τῶν συνθέσεως ἢ τῆς θερμοδυναμικῆς τῶν καταστάσεως.

Ὁ ὀρισμὸς τῆς φάσεως ὡς περιοχῆς ὁμοιογενοῦς ὡς πρὸς τὰς φυσικὰς (ἐντατικὰς) ιδιότητας δὲν δύναται νὰ ἰσχύσῃ εἰς τὸ πεδίον βαρύτητος, τουλάχιστον ἐφ' ὅσον ἢ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου διάστασις τῆς φάσεως εἶναι μεγάλη.

Εἶναι δυνατὸν νὰ τροποποιηθῇ ὁ ὀρισμὸς τῆς φάσεως, εἰς τρόπον ὥστε οὗτος νὰ περιλαμβάνῃ καὶ τὰς ἐπιδράσεις τοῦ πεδίου βαρύτητος. Οὕτω μία περιοχὴ θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμοιογενὴς καὶ ἐπομένως ὡς ἀποτελοῦσα μίαν φάσιν, ἐφ' ὅσον ἢ ἀνομοιογένειά της ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν παρουσίαν τοῦ πεδίου βαρύτητος καὶ ἐπομένως ἢ ἀνομοιογένεια εἶναι μία συνεχῆς συνάρτησις τῶν συντεταγμένων τοῦ χώρου.

Ἐν τούτοις εἰς τὴν περαιτέρω ἐπεξεργασίαν θὰ θεωρήσωμεν τὴν φάσιν ὡς πλήρως ὁμοιογενῆ περιοχὴν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν δύο τμήματα ὕλης τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας καὶ συνθέσεως, διαφόρως ὅμως τοποθετημένα ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου, θὰ θεωροῦνται ὡς διάφοροι φάσεις. Κατὰ



Σχῆμα 15.1.1. Ὅμοιογενεῖς φάσεις α, β, κλπ. διαφέρουσαι κατὰ πάχος dz κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.

συνέπειαν ἢ παρουσίᾳ τοῦ πεδίου βαρύτητας ἀποκλείει τὴν δυνατότητα ὁμοιογενοῦς φάσεως πεπερασμένου πάχους κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. Ὡς ἐκ τούτου καὶ τὸ ἀπλούστερον δυνατόν σύστημα πρέπει νὰ θεωρηθῆται ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ μίαν συνεχῆ ἀκολουθίαν φάσεων ἐκάστη τῶν ὁποίων διαφέρει ἀπειροστῶς τῶν γειτονικῶν τῆς (σχ. 1).

Ὑπὸ τὰς ἀναφερθείσας προϋποθέσεις τὸ πεδίον βαρύτητας χαρακτηρίζεται ὑπὸ τοῦ δυναμικοῦ:

$$\Phi(z) = gz \quad (15.1.1)$$

ὅπου g ἡ ἐπιτάχυνσις ἢ ὀφειλόμενη εἰς τὴν βαρύτητα καὶ z τὸ ὕψος τοῦ συστήματος ἀπὸ τυχούσης στάθμης ἀναφορᾶς.

Τὸ ὄλικόν διαφορικὸν τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας ὁμοιογενοῦς φάσεως ἐκ c συστατικῶν, παρουσίᾳ πεδίου χαρακτηριζομένου ὑπὸ δυναμικοῦ Φ , δίδεται ὑπὸ τῆς ἀναλόγου πρὸς τὴν (13.2.1) ἐξίσωσεως:

$$dU' = dU + \Phi dm \quad (15.1.2)$$

ὅπου:

$$dU = TdS - PdV + \sum_1^c \mu_i dn_i \quad (15.1.3)$$

δηλαδὴ τὸ διαφορικὸν τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας ἀπουσία πεδίου, ὡς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (7.1.21). (Εἰς τὸ παρὸν Κεφάλαιον τὸ γράμμα m θὰ συμβολίζῃ τὴν μᾶζαν καὶ ὄχι τὴν συγκέντρωσιν).

Ὁ ὄρος Φdm εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) παριστᾷ τὸ ἔργον τὸ καταναλισκόμενον ἔναντι τοῦ πεδίου κατὰ ἀπειροστὴν αὔξησιν τῆς μᾶζης τοῦ συστήματος.

Ἡ ὄλικὴ μᾶζα τοῦ συστήματος, ὡς συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ γραμμομολῶν τῶν συστατικῶν του, δύναται νὰ γραφῆ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$m = \sum_1^c M_i n_i \quad (15.1.4)$$

ὄπου M_i ἡ γραμμομοριακὴ μάζα τοῦ συστατικοῦ i . Διαφορίσις τῆς ἐξίσω-
σεως (4) δίδει :

$$dm = \sum_1^c M_i dn_i \quad (15.1.5)$$

Δι' εἰσαγωγῆς τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (5) εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν :

$$dU' = TdS - PdV + \sum_1^c (\mu_i + M_i \Phi) dn_i \quad (15.1.6)$$

Τὸ χημικὸν δυναμικὸν μ'_i συστατικοῦ i , παρουσία τοῦ πεδίου βαρύτητος,
ὀρίζεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\mu'_i = \mu_i + M_i \Phi \quad (15.1.7)$$

καὶ οὕτως ἡ ἐξίσωσις (6) δύναται νὰ γραφῆ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$dU' = TdS - PdV + \sum_1^c \mu'_i dn_i \quad (15.1.8)$$

Θεωρήσωμεν σύστημα, ὁμοιογενὲς ἢ ἑτερογενὲς ἀπουσία πεδίου, διαιρεθὲν
εἰς ἄπειρον ἀριθμὸν ὁμοιογενῶν συστημάτων σταθεροῦ ὄγκου καὶ ἀπειρο-
στοῦ πάχους κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου (σχ. 1). Ἡ ποσότης dz ὑποτί-
θεται ὡς ἀπειροστὴ ἀπὸ μακροσκοπικῆς, δηλαδὴ θερμοδυναμικῆς, πλευρᾶς,
ἐπαρκῶς ὅμως μεγάλη συγκρινομένη πρὸς τυπικὰ μικροσκοπικὰ μεγέθη, ὡς
αἱ μέσαι ἀποστάσεις μεταξὺ μορίων.

Ἡ ἐξίσωσις (8) ἐφαρμόζεται δι' ἐκάστην τῶν ὁμοιογενῶν φάσεων α ,
 β , . . . καὶ ἐπομένως δύναται νὰ γραφῆ :

$$dU'^\gamma = T^\gamma dS^\gamma - P^\gamma dV^\gamma + \sum_1^c \mu'^\gamma_i dn_i^\gamma \quad (15.1.9)$$

Κριτήριον τῆς ἑτερογενοῦς ἰσορροπίας, παρουσία τοῦ πεδίου βαρύτητος, δύνα-
ται ν' ἀποτελέση ἡ ἀρχὴ ἐλαχίστου ἐσωτερικῆς ἐνεργείας (ἐξίσωσις 7.6.17).
Οὕτω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$(dU')_{S, V, n_i} = 0 \quad (15.1.10)$$

Ἐπιπέτομεν ὅτι αἱ ποσότητες U, S, V καὶ n_i δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἀθροί-
σματα ἐκτεινόμενα ἐφ' ὄλων τῶν φάσεων α, β, \dots . Χρησιμοποιοῦντες εἰς
τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὴν μέθοδον τὴν ἐφαρμοσθεῖσαν εἰς τὴν παράγραφον
(7.6) λαμβάνομεν ὡς συνθήκας ἑτερογενοῦς ἰσορροπίας, παρουσία τοῦ πεδίου
βαρύτητος, τὰς :

$$T^\gamma = T, \quad \gamma = \alpha, \beta, \dots \quad (15.1.11)$$

$$\mu'_\gamma = \mu'_\gamma + M_i \Phi = \mu'_i, \quad \gamma = \alpha, \beta, \dots \quad (i = 1, \dots, c) \quad (15.1.12)$$

Συνθήκη ἀφορώσα εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῶν πιέσεων δὲν ἐμφανίζεται, διότι αἱ φάσεις εἶναι σταθεροῦ ὄγκου.

Θεωροῦντες τὸ πάχος τῆς φάσεως τεῖνον πρὸς μηδέν, τὰς δὲ θερμοδυναμικὰς μεταβλητὰς ὡς συναρτήσεις τοῦ ὕψους z , λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (12):

$$\frac{d\mu'_i}{dz} = \frac{d(\mu_i + M_i \Phi)}{dz} = 0 \quad (15.1.13)$$

Πρὸς μελέτην τῆς μεταβολῆς τῆς συνθέσεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου (ὡς πρὸς τὴν παράμετρον z) ἐκφράζομεν τὰ διαφορικά $d\mu_i$ ($i = 1, \dots, c$) ὡς συναρτήσεις τῶν dT , dP καὶ dx_k ($k = 2, \dots, c$). Οὕτως ἔχομεν:

$$d\mu_i = -s_i dT + v_i dP + \sum_{k=2}^c \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} \right)_{T, P, x_j \neq x_k} dx_k \quad (15.1.14)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{d\mu_i}{dz} = -s_i \frac{dT}{dz} + v_i \frac{dP}{dz} + \sum_{k=2}^c G_{ik} \frac{dx_k}{dz} \quad (i = 1, \dots, c) \quad (15.1.15)$$

$$\text{ὅπου:} \quad G_{ik} = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} \right)_{P, T, x_j \neq x_k} \quad (15.1.16)$$

Ἐισαγωγή τῆς ἐξισώσεως (15) εἰς τὴν (13) δίδει:

$$-s_i \frac{dT}{dz} + v_i \frac{dP}{dz} + \sum_{k=2}^c G_{ik} \frac{dx_k}{dz} + M_i \frac{d\Phi}{dz} = 0 \quad (15.1.17)$$

Ἐἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας ἔχομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (11):

$$\frac{dT}{dz} = 0 \quad (15.1.18)$$

καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (17) ἀνάγεται εἰς τὴν:

$$v_i \frac{dP}{dz} + M_i \frac{d\Phi}{dz} + \sum_{k=2}^c G_{ik} \frac{dx_k}{dz} = 0 \quad (i = 1, \dots, c) \quad (15.1.19)$$

Αἱ c τὸν ἀριθμὸν ἐξισώσεως (19) προσδιορίζουν τὴν ἐξάρτησιν c ποσοτήτων, τῶν P, x_2, \dots, x_c ἐκ τῆς παραμέτρου z .

Ἐπὶ σταθερὰν θερμοκρασίαν, ἡ ἐξίσωσις Gibbs - Duhem (7.5.14) γράφεται :

$$\sum_1^c n_i d\mu_i = VdP \quad (15.1.20)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (20), ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν (13), λαμβάνομεν :

$$\sum_1^c n_i \frac{d\mu_i}{dz} = - \sum_1^c M_i n_i \frac{d\Phi}{dz} = V \frac{dP}{dz} \quad (15.1.21)$$

Ἡ ἐξίσωσις (21), λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (4), γράφεται :

$$\frac{dP}{dz} = - \frac{m}{V} \frac{d\Phi}{dz} = - \rho \frac{d\Phi}{dz} \quad (15.1.22)$$

ὅπου ρ ἡ μέση πυκνότης τοῦ συστήματος.

Ἡ ἐξίσωσις (22) ἐκφράζει τὴν συνθήκην ὑδροστατικῆς ἰσοροπίας. Αἱ ἐξισώσεις (19) καὶ (22) δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι. Θὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (22) περιέχεται εἰς τὰς ἐξισώσεις (19). Πράγματι, πολλαπλασιάζοντες τὰς ἐξισώσεις (19) ἐπὶ n_i καὶ ἀθροίζοντες ἐφ' ὅλων τῶν συστατικῶν ἀπὸ 1 ἕως c λαμβάνομεν :

$$\sum_1^c n_i v_i \frac{dP}{dz} + \sum_1^c M_i n_i \frac{d\Phi}{dz} + \sum_{k=2}^c \sum_1^c n_i G_{ik} \frac{dx_k}{dz} = 0 \quad (15.1.23)$$

Ἀλλὰ, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων (7.9.9) καὶ (7.9.14) :

$$\sum_1^c n_i v_i = V \quad (15.1.24)$$

$$\sum_1^c n_i G_{ik} = 0 \quad (15.1.25)$$

καὶ ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις (23) γράφεται :

$$V \frac{dP}{dz} + m \frac{d\Phi}{dz} = 0 \quad (15.1.26)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (22).

Λόγω τῆς ἐξισώσεως (26), ἀντὶ τῶν c ἐξισώσεων (19), πρὸς καθορισμὸν τῶν c μεταβλητῶν (P, x_2, \dots, x_c), δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἡ (26) καὶ ($c - 1$) ἐκ τῶν ἐξισώσεων (19). Οὕτως ἀπαλείφοντες εἰς τὴν (19), μέσω τῆς ἐξισώσεως (26), τὸν περιέχοντα τὴν πίεσιν ὄρον, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις :

$$(M_i - \rho v_i) \frac{d\Phi}{dz} + \sum_2^c G_{ik} \frac{dx_k}{dz} = 0 \quad (15.1.27)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{d\Phi}{dz} \quad (15.1.28)$$

ισοδυνάμους πρὸς τὰς ἐξισώσεις (19).

Αἱ ἐξισώσεις (27) καὶ (28) ὀνομάζονται ἐξισώσεις *ισορροπίας καθιεζήσεως*.

Εἰς τὴν περίπτωσιν συστήματος ἕξ ἑνὸς συστατικοῦ, ἡ ἰσορροπία καθορίζεται πλήρως ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (28). Δι' ἰδανικὸν ἀέριον ἔχομεν :

$$P = \frac{\rho}{M} RT, \quad dP = \frac{RT}{M} d\rho \quad T = \text{σταθ.} \quad (15.1.29)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (28) καὶ (29) λαμβάνομεν :

$$\frac{RT}{M} d\rho = -\rho d\Phi \quad (15.1.30)$$

καὶ δι' ὀλοκληρώσεως :

$$\rho = \rho^0 \exp \left[-\frac{M}{RT} (\Phi - \Phi^0) \right] \quad (15.1.31)$$

Ἡ ἐξίσωσις (31), λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (1), γράφεται :

$$\rho = \rho^0 \exp \left[-\frac{Mg}{RT} (z - z_0) \right] \quad (15.1.32)$$

Ἐὰν εἰς τὴν (28) χρησιμοποιηθῇ ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων (29), λαμβάνεται, ἀντὶ τῆς (30), ἡ σχέση :

$$P = P^0 \exp \left[-\frac{Mg}{RT} (z - z_0) \right] \quad (15.1.33)$$

γνωστὴ ὡς *βαρομετρικὸς τύπος*.

Διὰ σύστημα ἐκ δύο συστατικῶν αἱ ἐξισώσεις (27) καὶ (28) γράφονται :

$$(M_2 - \rho v_2) \frac{d\Phi}{dz} + G_{22} \frac{dx_2}{dz} = 0 \quad (15.1.34)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{d\Phi}{dz} \quad (15.1.35)$$

Εἰς περίπτωσιν ἰδανικοῦ συστήματος ἔχομεν :

$$G_{22} = \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} = \frac{RT}{x_2} \quad (15.1.36)$$

$$v_1 = v_1^0, \quad v_2 = v_2^0 \quad (15.1.37)$$

$$\text{καί} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 v_1^0 + n_2 v_2^0} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2}{x_1 v_1^0 + x_2 v_2^0} \quad (15.1.38)$$

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις (34) καὶ (35) ἀπλοποιοῦνται εἰς τὰς :

$$\frac{d \ln x_2}{dz} = - \frac{M_2 - \rho v_2}{RT} \frac{d\Phi}{dz} \quad (15.1.39)$$

$$\frac{dP}{dz} = - \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{x_1 v_1^0 + x_2 v_2^0} \frac{d\Phi}{dz} \quad (15.1.40)$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ μίγμα ὡς ἀραιόν, ὁπότε ἔχομεν :

$$\rho \simeq \rho_1 \quad (15.1.41)$$

ὅπου ρ_1 ἡ πυκνότης τοῦ διαλύτου, ἡ ἐξίσωσις (39) εὐκόλως ὀλοκληροῦται δίδουσα τήν :

$$x_2 = x_2^0 \exp \left[- \frac{(M_2 - \rho_1 v_2^0)(\Phi - \Phi^0)}{RT} \right] \quad (15.1.42)$$

ὅπου ὁ δείκτης $(^0)$ ἀναφέρεται εἰς τὴν στάθμην ἀναφορᾶς, ἥτοι εἰς $z = z^0$.

Ἐὰν τὸ ρευστὸν θεωρηθῇ περαιτέρω ὡς ἀσυμπίεστον, ὀλοκλήρωσις τῆς (40) δίδει :

$$P = P^0 - \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{x_1 v_1^0 + x_2 v_2^0} (\Phi - \Phi^0) = P^0 - \rho_1 (\Phi - \Phi^0) \quad (15.1.43)$$

Ἐὰς ἐξετάσωμεν, τέλος, τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου βαρύτητος ἐπὶ τῆς χημικῆς ἰσορροπίας. Θεωρήσωμεν σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον λαμβάνει χώραν ἡ ἀντίδρασις :

$$\sum_1^r \nu_i X_i = 0 \quad (15.1.44)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (12) ἡ συνθήκη χημικῆς ἰσορροπίας, εἰς πεδίου περιγραφόμενον ἀπὸ δυναμικὸν Φ , δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$\sum_1^r \nu_i \mu'_i = \sum_1^r \nu_i (\mu_i + M_i \Phi) = \sum_1^r \nu_i \mu_i + \Phi \sum_1^r \nu_i M_i = 0 \quad (15.1.45)$$

Ἡ συνθήκη διατηρήσεως τῆς μάζης εἰς χημικὴν ἀντίδρασιν (ἔξισωσις 7.7.4) εἶναι :

$$\sum_1^r \nu_i M_i = 0 \quad (15.1.46)$$

καὶ ἐπομένως ἡ ἔξισωσις (45) γράφεται :

$$\sum_1^r \nu_i \mu_i = 0 \quad (15.1.47)$$

Οὕτω προκύπτει ὅτι ἡ παρουσία τοῦ πεδίου βαρύτητος δὲν ἔχει ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς συνθήκης χημικῆς ἰσορροπίας καὶ ἐπομένως ἐπὶ τῆς σταθερᾶς ἰσορροπίας. Τὸ τελευταῖον συμπέρασμα ἰσχύει, ἐφ' ὅσον ἡ σταθερὰ ἰσορροπίας εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς θερμοκρασίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἔξισώσεως (11), ἔχομεν :

$$\frac{dT}{dz} = 0 \quad (15.1.48)$$

Εἰς τὰς περιπτώσεις ὅμως, εἰς τὰς ὁποίας ἡ σταθερὰ ἰσορροπίας εἶναι συνάρτησις καὶ τῆς πίεσεως (K_x κλπ.), δεδομένου ὅτι ἡ πίεσις εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους z , εἶναι καὶ ἡ σταθερὰ ἰσορροπίας συνάρτησις τοῦ ὕψους z . Ἐν τούτοις, ὑπὸ συνήθεις συνθήκας, ἡ ἐπίδρασις τῆς πίεσεως εἶναι ἀμελητέα.

§ 15.2. Συστήματα εἰς φυγοκεντρικόν πεδίον

Θεωρήσωμεν σύστημα ρευστὸν ἐκ c συστατικῶν, περιεχόμενον εἰς κυλινδρικὸν δοχεῖον τὸ ὁποῖον περιστρέφεται μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω . Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν δύναμιν βαρύτητος ἡ ἔντασις τῆς ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς μάζης δρώσης φυγοκεντρικῆς δυνάμεως δὲν εἶναι τοπικῶς σταθερὰ, ἀλλὰ ἀνάλογος τῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀποστάσεως r . Κατὰ τὰ λοιπὰ τὸ φυγοκεντρικόν πεδίον χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὰς ἐν ἀρχῇ τῆς παραγράφου (1) ἀναφερθείσας ιδιότητας.

Οὕτω τὸ φυγοκεντρικόν πεδίον χαρακτηρίζεται ὑπὸ δυναμικοῦ :

$$\Phi(r) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (15.2.1)$$

Αἱ εἰς τὴν παράγραφον (1) δοθεῖσαι ἔξισώσεις ἰσχύουν καὶ παρουσία φυγοκεντρικοῦ πεδίου. Ἰδιαιτέρως αἱ ἔξισώσεις (15.1.27) καὶ (15.1.28) ἐκφράζουν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰς συνθήκας ἰσορροπίας καθιζήσεως εἰς φυγο-

κεντρικόν πεδίον. Αἱ ἔξιώσεις αὐταὶ καθορίζουν τὴν εἰς τὸν χῶρον κατανομὴν τῶν συστατικῶν, ὡς συνάρτησιν τῆς ἀποστάσεως r ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

Ὡς παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας ἔστω ἀραιὸν διάλυμα ἐκ δύο συστατικῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ διαλύτης χαρακτηρίζεται ὑπὸ τοῦ δείκτου 1. Αἱ ἔξιώσεις (15.1.34) καὶ (15.1.35), λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (1) γράφονται :

$$(M_2 - \rho v_2) \omega^2 r = \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} \right)_{T, P} \frac{dx_2}{dr} \quad (15.2.2)$$

$$\frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r \quad (15.2.3)$$

Δεδομένου ὅτι $\frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} > 0$ (συνθήκη εὐσταθείας ὡς πρὸς διάχυσιν), τὸ πρόσημον τῆς κλίσεως τῆς συνθέσεως $\frac{dx_2}{dr}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ πρόσημον τῆς παραστάσεως $(M_2 - \rho v_2)$. Εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων $(M_2 - \rho v_2) > 0$ καὶ ἐπομένως εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἡ συγκέντρωσις τοῦ ἐν διαλύσει συστατικοῦ αὐξάνεται αὐξανομένης τῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀποστάσεως. Πρὸς τούτοις ἡ κλίσις $\frac{dx_2}{dr}$ αὐξάνεται μὲ τὴν ἀπόστασιν r καὶ τὸ τετράγωνον τῆς γωνιακῆς ταχύτητος.

Χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν (10.7.17) γράφομεν τὴν (2) ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\frac{d \ln x_2}{dr} = (M_2 - \rho v_2) \left[1 + \frac{\partial \ln \gamma_2^*}{\partial \ln x_2} \right]^{-1} \frac{\omega^2 r}{RT} \quad (15.2.4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) δύναται νὰ ὀλοκληρωθῇ διὰ τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀραιοῦ διαλύματος ($\gamma_2^* = 1$), δίδουσα :

$$RT \ln \left(\frac{x_2'}{x_2''} \right) = \frac{1}{2} (M_2 - \rho v_2) \omega^2 [(r')^2 - (r'')^2] \quad (15.2.5)$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μοριακοῦ βάρους τοῦ ἐν διαλύσει συστατικοῦ, ἐὰν μετρηθῇ εἰς δύο ἀποστάσεις r' καὶ r'' τὸ κλάσμα μάζης z_2 , λόγῳ τοῦ ὅτι :

$$\frac{x_2'}{x_2''} = \frac{z_2'}{z_2''} \quad \delta\pi\omicron\upsilon \quad z_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$