# ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΘΟΔΩΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΓΓΟΝΑΣ

## Σετ Διαφανειών 5: Επαγωγική Στατιστική - Τυχαία δειγματοληψία - Εκτίμηση Παραμέτρων - Ιδιότητες Εκτιμητών - Κεντρικό Οριακό Θεώρημα - Κατανομές Δειγματοληψίας - Διαστήματα εμπιστοσύνης

# Επαγωγική Στατιστική (ή Στατιστική Συμπερασματολογία)

- Περιλαμβάνει τις μεθόδους που μας βοηθούν να εκτιμήσουμε τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού με βάση τις πληροφορίες που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις ενός δείγματος.
- Ένα τυχαίο δείγμα από έναν άπειρο πληθυσμό είναι ένα δείγμα που επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:
  - Κάθε στοιχείο που επιλέγεται προέρχεται από τον πληθυσμό.
  - Κάθε στοιχείο επιλέγεται τυχαία και ανεξάρτητα από τα άλλα στοιχεία του πληθυσμού.

# Τυχαία Δειγματοληψία

- Τα αποτελέσματα του δείγματος παρέχουν μόνο εκτιμήσεις των τιμών των χαρακτηριστικών του πληθυσμού. Με τις κατάλληλες μεθόδους τα αποτελέσματα του δείγματος μπορούν να παρέχουν «καλές» εκτιμήσεις των χαρακτηριστικών του πληθυσμού.
- Ορίζουμε ως **τυχαίο δείγμα** από έναν πληθυσμό *n* ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ που ακολουθούν την ίδια κατανομή με του πληθυσμού.
- Μετά την πραγματοποίηση μιας δειγματοληψίας έχουμε διαθέσιμες *n* συγκεκριμένες τιμές των *n* ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και τις συμβολίζουμε με $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Οι συγκεκριμένες αυτές τιμές ονομάζονται δεδομένα (data).

# Στατιστικές συναρτήσεις

- **Παράμετρο** ονομάζουμε μία συνάρτηση όλων των δεδομένων του πληθυσμού. Παραδείγματα παραμέτρων είναι ο μέσος μ, η διακύμανση $\sigma^2$ και η τυπική απόκλιση $\sigma$.
- **Στατιστική συνάρτηση** ή **εκτιμήτρια συνάρτηση** ονομάζουμε μία συνάρτηση $\Phi\left(X_{1\,,}X_2, \ldots.\,, X_n\right)$ των μεταβλητών ενός δείγματος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση μιας παραμέτρου του πληθυσμού.
- Παραδείγματα στατιστικών συναρτήσεων είναι ο δειγματικός μέσος, η δειγματική διακύμανση και η δειγματική τυπική απόκλιση.

# Εκτίμηση παραμέτρων

- Ένας τρόπος εκτίμησης μιας άγνωστης παραμέτρου ενός πληθυσμού είναι μέσω της τιμής μιας εκτιμήτριας για συγκεκριμένη πραγματοποίηση ενός τυχαίου δείγματος.
- Αυτό ονομάζεται **σημειακή εκτίμηση παραμέτρου** και το αποτέλεσμα είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός.
- Ο τρόπος αυτός είναι προσεγγιστικός, καθώς είναι απίθανο η εκτίμηση που θα προκύψει να συμπέσει με την πραγματική τιμή της παραμέτρου στον πληθυσμό.
- Ο δεύτερος τρόπος είναι να προσδιοριστεί, με βάση το τυχαίο δείγμα, ένα **διάστημα εμπιστοσύνης** εντός του οποίου αναμένεται ότι θα βρίσκεται η πραγματική τιμή της παραμέτρου στον πληθυσμό με ορισμένη πιθανότητα. Ο τρόπος αυτός είναι πιο αξιόπιστος.

# Συχνά χρησιμοποιούμενες εκτιμήτριες συναρτήσεις

Δειγματικός μέσος: $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Δειγματική διακύμανση: $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Από ένα συγκεκριμένο δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λαμβάνουμε τις ***σημειακές εκτιμήσεις:***

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Κάθε εκτιμήτρια συνάρτηση ακολουθεί μια κατανομή που ονομάζεται **κατανομή δειγματοληψίας**. Πρόκειται για μια κατανομή των τιμών της συνάρτησης για ένα συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος.

# Ιδιότητες Εκτιμητών

***Αμεροληψία***

Μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ μιας παραμέτρου θ ονομάζεται **αμερόληπτη** αν η αναμενόμενη τιμή της κατανομής δειγματοληψίας του $\hat{\theta}$ είναι ίση με την πραγματική τιμή $\vartheta_0$ της παραμέτρου στον πληθυσμό, δηλαδή αν ισχύει: $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta_0$

Αυτό σημαίνει ότι σε επαναλαμβανόμενες δειγματοληψίες η εκτιμήτρια κατά μέσο όρο εκτιμά σωστά την άγνωστη παράμετρο (ούτε την υπερεκτιμά ούτε την υποεκτιμά).

***Αποτελεσματικότητα***

Μεταξύ των αμερόληπτων εκτιμητριών πιο αποτελεσματική είναι αυτή που έχει τη μικρότερη διακύμανση.

***Συνέπεια***

Μια εκτιμήτρια ονομάζεται **συνεπής** όταν συγκλίνει προς την πραγματική τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος.

# Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

- Πολύ σημαντικό θεώρημα των πιθανοτήτων σχετικά με τη συμπεριφορά  αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών.
- Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ από ένα πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση $\sigma^2$.
- Τότε, αν το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο (συνήθως ένα δείγμα μεγαλύτερο από 30 θεωρείται ως επαρκές), ο δειγματικός μέσος $\overline{\mathrm{X}}$ ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu$ και διακύμανση $\frac{\sigma^2}{n}$. Επομένως:
- $\overline{\mathrm{X}} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$,
- $\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) = \mu, \quad V(\overline{\mathrm{X}}) = \frac{\sigma^2}{n}$ και $\sigma_{\overline{\mathrm{X}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(το $\sigma_{\overline{\mathrm{X}}}$ καλείται τυπικό σφάλμα του μέσου με σύμβολο SE)

# Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (συν.)

Αφού $\overline{\mathrm{X}} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$, προκύπτει ότι $\mathrm{Z} = \frac{\overline{\mathrm{X}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

**Συμπεράσματα**

- Εάν ο πληθυσμός της υπό μελέτη τυχαίας μεταβλητής δεν ακολουθεί την Κανονική Κατανομή, τότε ο δειγματικός μέσος $\overline{\mathrm{X}}$ ακολουθεί την Κανονική Κατανομή, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο ($n$ > 30).
- Όσο αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος τόσο καλύτερη η προσέγγιση του μέσου του πληθυσμού (γιατί;).
- Διότι το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{\mathrm{X}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ μειώνεται όσο το *n* αυξάνεται.

# Παράδειγμα

Το Υπουργείο Εργασίας επιθυμεί να έχει μια εκτίμηση του μέσου μηνιαίου μισθού που λαμβάνουν οι δημόσιοι υπάλληλοι κατά το έτος που προηγείται της συνταξιοδότησης για τα έτη 2015 - 2020.

Το υπουργείο γνωρίζει από προηγούμενη έρευνα για την περίοδο 2010 – 2015 ότι ο μέσος μηνιαίος ενός υπαλλήλου κατά το έτος που προηγείται της συνταξιοδότησης ήταν 1850 με τυπική απόκλιση 150 ευρώ.

Για την εκτίμηση επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα 100 υπαλλήλων κατά το έτος που προηγείται της συνταξιοδότησής τους.

Να βρεθεί η πιθανότητα ο μέσος μηνιαίος μισθός των επιλεγμένων υπαλλήλων να είναι μεταξύ 1800 και 1900 ευρώ.

# Λύση

Αφού το μέγεθος του δείγματός μας είναι μεγαλύτερο από 30 μπορούμε να εφαρμόσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, οπότε βρίσκουμε:

$$\bar{X} \sim N(1850, \frac{150^2}{100}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - 1850}{150/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$$

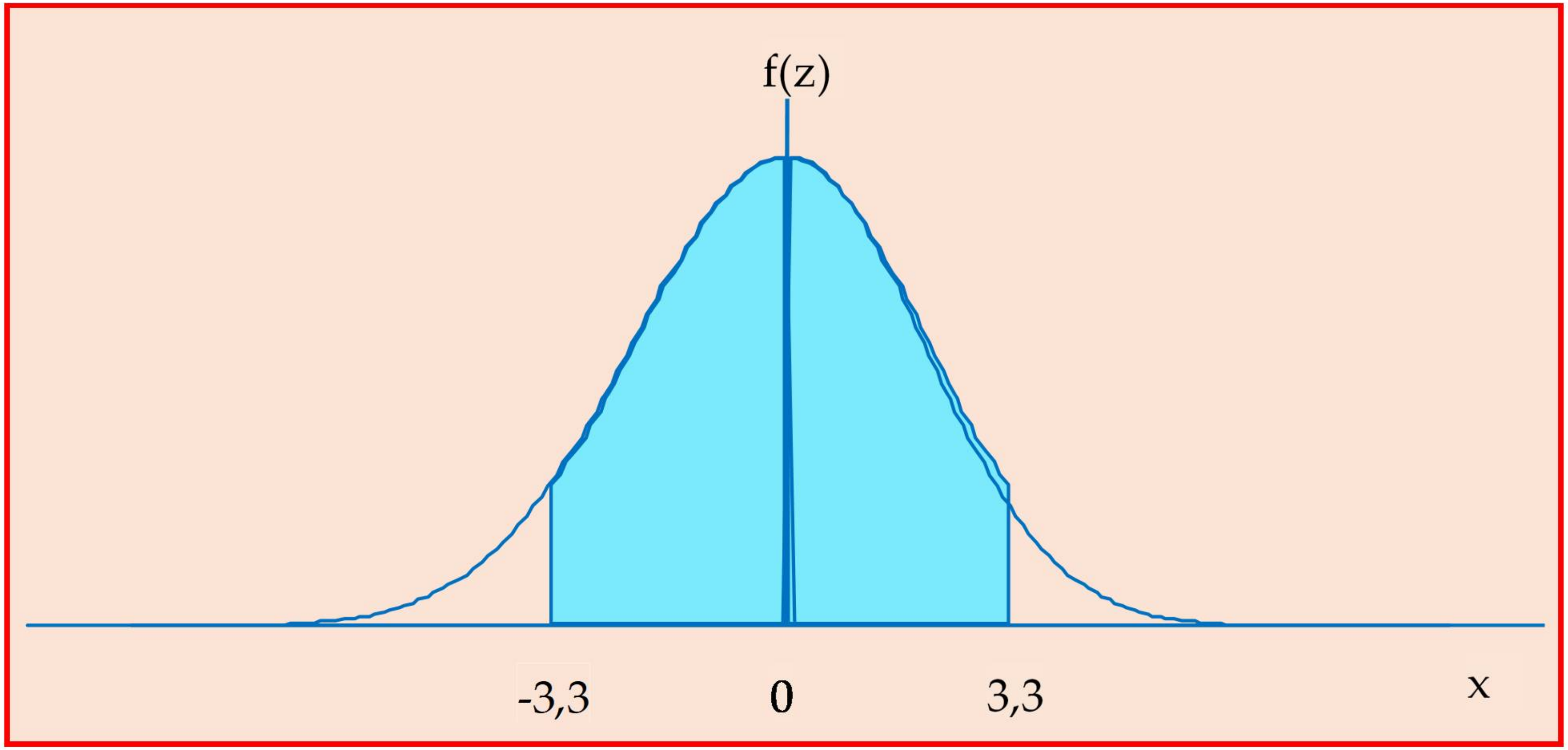
Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$P(1800 < \bar{X} < 1900) = P\left( \frac{1800 - 1850}{150/\sqrt{100}} < Z < \frac{1900 - 1850}{150/\sqrt{100}} \right) =$$

$$= P(-3,33 < Z < 3,3) = P(Z < 3,33) - P(Z < -3,33) =$$

$$= \Phi(3,33) - (1 - \Phi(3,33)) = 2\Phi(3,33) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9995 - 1 = \mathbf{0{,}999}$$




Επομένως ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπό εξέταση δημοσίων υπαλλήλων κυμαίνεται μεταξύ 1800 και 1900 ευρώ με πιθανότητα 99,9%.

# Ερώτηση

Ένα τυχαίο δείγμα αποτελείται από τυχαίες μεταβλητές:

(α) Σωστό

(β) Λάθος

**Η σωστή απάντηση είναι η (α).**

Ορίζουμε ως **τυχαίο δείγμα** από έναν πληθυσμό *n* ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ που ακολουθούν την ίδια κατανομή με του πληθυσμού.

# Ερώτηση

Το τυπικό σφάλμα ενός εκτιμητή δίνεται από την τετραγωνική ρίζα της εκτίμησης της διακύμανσής του:

(α) Σωστό

(β) Λάθος

**Η σωστή απάντηση είναι η (β).**

$$\sigma_{\overline{\mathrm{X}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Το $\sigma_{\overline{\mathrm{X}}}$ καλείται τυπικό σφάλμα του μέσου με σύμβολο SE.

# ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

# Κατανομές Δειγματοληψίας

# Κατανομή δειγματοληψίας του δειγματικού μέσου

όταν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με **γνωστή** διακύμανση

**Προϋποθέσεις**

*(α)* Η διακύμανση του πληθυσμού $\sigma^2$ είναι γνωστή

*(β)* Η τ. μ. Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή $(X \sim N\ (\mu, \sigma^2))$

*(γ)* Η τ. μ. Χ δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή αλλά το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\ or\ \bar{X} \sim N\ (\mu, \sigma^2/n\ )$$

# **Κατανομή δειγματοληψίας του δειγματικού μέσου**
όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με **άγνωστη** διακύμανση

**Προϋποθέσεις**

*(α)* Η διακύμανση του πληθυσμού $\sigma^2$ δεν είναι γνωστή

*(β)* Η τ. μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή

*(γ)* Η τ. μ. X δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή αλλά το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο

Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Όπου $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ είναι η δειγματική διακύμανση

# **Κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς δύο μέσων** από κανονικούς πληθυσμούς με **γνωστές** διακυμάνσεις και ανεξάρτητα δείγματα

Τότε η κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς των μέσων δύο ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = \mu_X - \mu_Y$ και διακύμανση $\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}$:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)$$

Κατά συνέπεια ισχύει και:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}} \sim N(0,1)$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

# Παράδειγμα

Η βαθμολογία των φοιτητών του τμήματος ΔΕΟ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 6$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 2$.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα 16 φοιτητών.

Να βρεθεί η πιθανότητα ο μέσος βαθμός των φοιτητών του δείγματος να βρίσκεται στο διάστημα 5 έως 7.

# Λύση

Όταν μια τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή ο δειγματικός μέσος ακολουθεί την κατανομή:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Στην περίπτωσή μας μ = 6 και σ = 2 ευρώ. Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$P(5 < \bar{X} < 7) = P\left(\frac{5-6}{2/\sqrt{16}} < Z < \frac{7-6}{2/\sqrt{16}}\right) =$$

$$= P\left(-2 < Z < 2\right) = P(Z < 2) - P(Z < -2) =$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = \mathbf{0{,}9544}$$

# Διαστήματα εμπιστοσύνης

# Η σημασία της «εμπιστοσύνης»

- Όταν εκτιμούμε σημειακά τον μέσο $\mu$ μιας τ.μ. X, λαμβάνουμε ένα δείγμα n μετρήσεων $x_1$, $x_2$,…$x_n$ και υπολογίζουμε τη μέση τιμή του δείγματος $\bar{X}$.
- Όμως ΠΟΣΟ ΑΚΡΙΒΗΣ είναι η εκτίμηση που παίρνουμε για το $\mu$, με τον τρόπο αυτό;
- Η σημειακή εκτίμηση εμπεριέχει σημαντικό βαθμό αβεβαιότητας, ιδιαίτερα όταν το δείγμα είναι μικρού μεγέθους ή/και η διακύμανση του εκτιμητή είναι μεγάλη.

# Παράδειγμα

- Μετρώντας το βάρος 200 γυναικών, βρήκαμε μέση τιμή 65 κιλά.
- Αν όμως όλες οι συμμετέχουσες προέρχονται από μια συγκεκριμένη πόλη (π.χ. Αθήνα) τότε,
- Πόσο σίγουροι είμαστε ότι αν μετρούσαμε το βάρος ΟΛΩΝ των γυναικών στη χώρα θα βγάζαμε ακριβώς μέση τιμή 65 κιλά;
- **Δεν μπορούμε να είμαστε 100% σίγουροι**

# Εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης

Αντί να λέμε ***«εκτιμώ ότι το μέσο βάρος των γυναικών της χώρας αυτής είναι 65 κιλά»*** μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα διάστημα, π.χ. από 62 κιλά μέχρι 68 κιλά

( 62, 68 )

Και να λέμε πως **«έχουμε μεγάλη εμπιστοσύνη πως το μέσο βάρος των γυναικών της χώρας βρίσκεται μεταξύ 62 και 68 κιλών»**

# Εκτίμηση παραμέτρων μέσω Δ.Ε.

- Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να εκτιμήσουμε μια άγνωστη παράμετρο $\vartheta$ από κάποιο πληθυσμό. Ονομάζουμε L και U δύο κατάλληλες συναρτήσεις των οποίων οι τιμές $\ell$ και $u$ ικανοποιούν την σχέση P($\ell < \vartheta < u$) = 1 – $\alpha$.
- Το διάστημα ($\ell$,$u$) ονομάζεται 100(1 – $\alpha$)% **διάστημα εμπιστοσύνης** της παραμέτρου θ σε **επίπεδο εμπιστοσύνης** (1 – $\alpha$), το οποίο μας δίνει την πιθανότητα το διάστημα ($\ell$,$u$) να περιέχει το $\vartheta$.
- Το (1 – $\alpha$) ονομάζεται **επίπεδο εμπιστοσύνης,** το $\alpha$ ονομάζεται **επίπεδο σημαντικότητας** και τα $\ell$ και $u$ ονομάζονται **κατώτερο** και **ανώτερο όριο εμπιστοσύνης** αντίστοιχα.

# Διαστήματα εμπιστοσύνης: ερμηνεία

- Αν π.χ. θέσουμε επίπεδο σημαντικότητας α = 0,05 τότε το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι 0,95 και θα δημιουργήσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης, δηλαδή το διάστημα αυτό θα περιέχει την παράμετρο που μας ενδιαφέρει με πιθανότητα 95%.
- Εναλλακτική διατύπωση: το 95% των δειγμάτων περιέχουν την πραγματική τιμή της παραμέτρου και αυτό δείχνει τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε ότι ένα συγκεκριμένο Δ.Ε. περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.
- Ο γενικός τύπος για όλα τα Δ.Ε. είναι:

**Σημ. εκτίμηση ± (θεωρητική τιμή κατανομής)*(τυπ. σφάλμα)**

$$\hat{\theta} \pm \mathrm{c} \cdot \mathrm{SE}(\hat{\theta})$$

# Συχνά χρησιμοποιούμενες θεωρητικές (ή κριτικές) τιμές

Αν η τυπική απόκλιση είναι γνωστή τότε χρησιμοποιούμε την τυποποιημένη κανονική κατανομή:

| | |
|---|---|
| 99% | 2,58 |
| 98% | 2,32 |
| 95% | 1,96 |
| 90% | 1,64 |

# Παράγοντες που επηρεάζουν το μέγεθος του Δ.Ε. για μια παράμετρο

1. **Το μέγεθος δείγματος n**. Όσο πιο μεγάλο είναι το n, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε., άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη.
2. **Η τυπική απόκλιση σ**. Όσο πιο μικρή είναι η τυπική απόκλιση, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε., άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη.
3. **Το επίπεδο σημαντικότητας α.** Όσο πιο μεγάλο είναι το α, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε., άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη.

# <u>Διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο</u> όταν η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με <u>γνωστή</u> διακύμανση

Θυμίζουμε ότι:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Τότε το διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο $\mu$ με βαθμό εμπιστοσύνης 100(1 - α)% είναι το:

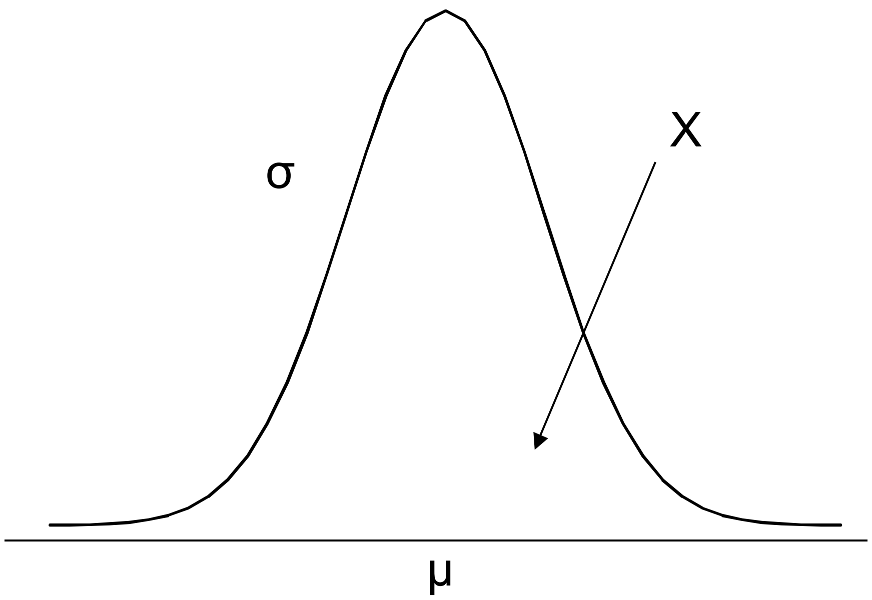
$$(\bar{x} - z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Ειδικά αν $(1-\alpha)\% = 95\%$ το Δ.Ε. είναι:

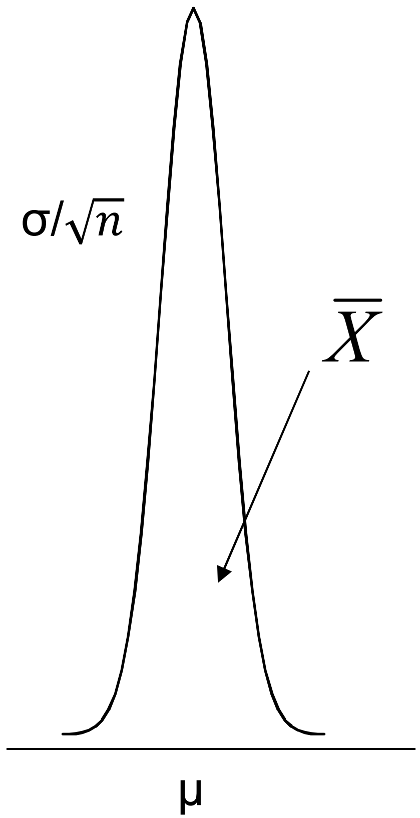
$$(\bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

# Τυπικό Σφάλμα (SE = standard error)




Κατανομή της τ.μ. X




**Το τυπικό σφάλμα της τ.μ. X είναι η τυπική απόκλιση του δειγματικού μέσου ($\sigma/\sqrt{n}$)**

Κατανομή του δειγματικού μέσου της X, για συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος n

# Παράδειγμα

Αν ο μέσος ενός δείγματος με 100 παρατηρήσεις βρέθηκε $\bar{x}$ = 9,4 και η τυπική απόκλιση βρέθηκε 2,5, τότε το τυπικό σφάλμα του μέσου είναι:

$$\boxed{SE(\bar{X}) = \frac{2,5}{\sqrt{100}} = \frac{2,5}{10} = 0,25}$$

Οπότε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο γίνεται:

$$9,4 \pm 1,96 \cdot 0,25 = 9,4 \pm 0,49$$

δηλ. έχουμε 95% εμπιστοσύνη ότι ο πραγματικός μέσος της τ.μ. Χ στον πληθυσμό είναι μεταξύ:

9,89 και 8,91

# **<u>Διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο </u>όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με <u>άγνωστη </u>διακύμανση**

Θυμίζουμε ότι:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Τότε το διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο $\mu$ με βαθμό εμπιστοσύνης 100(1 - α)% είναι το:

$$(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{a}{2}} < \mu < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{a}{2}})$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

# Πίνακας θεωρητικών τιμών της κατανομής Student t

Αν η τυπική απόκλιση είναι άγνωστη τότε χρησιμοποιούμε την κατανομή t του Student. Αυτή η τιμή εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α και τους βαθμούς ελευθερίας.

Βαθμοί ελευθερίας $\nu = n - 1$

| ν | α = 0,10 | α = 0,05 | α = 0,025 | α = 0,01 | α = 0,005 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |

# Παράδειγμα

Αν ο μέσος ενός δείγματος με 25 παρατηρήσεις βρέθηκε $\bar{x}$ = 50 και η δειγματική τυπική απόκλιση βρέθηκε s = 8, τότε το τυπικό σφάλμα του μέσου είναι:

$$\boxed{SE(\bar{X}) = \frac{8}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} = 1,6}$$

Οπότε το 95% Δ.Ε. για το μέσο γίνεται:

$$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\frac{a}{2}} = 50 \pm 1,6 \cdot 2,064 = 50 \pm 3,3$$

δηλ. έχουμε 95% εμπιστοσύνη ότι ο πραγματικός μέσος της τ.μ. Χ στον πληθυσμό είναι μεταξύ:

46,70 και 53,30

| ν | α = 0,10 | α = 0,05 | α = 0,025 | α = 0,01 | α = 0,005 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | **2,064** | 2,492 | 2,797 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 |

# <u>Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά δύο μέσων</u> από κανονικούς πληθυσμούς με <u>γνωστές</u> διακυμάνσεις και ανεξάρτητα δείγματα

Θυμίζουμε ότι:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)}} \sim N(0,1)$$

Τότε το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $(\mu_X - \mu_Y)$ των δύο μέσων με βαθμό εμπιστοσύνης 100(1 - α)% είναι:

$$(\bar{x} - \bar{y}) - z_{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)},\ \ (\bar{x} - \bar{y}) + z_{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_X^2/n_X) + (\sigma_Y^2/n_Y)})$$

Τα ανωτέρω ισχύουν και για μη κανονικούς πληθυσμούς όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (Κ.Ο.Θ.)

# Ερώτηση

Το εύρος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης αυξάνεται πάντοτε όσο αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος:

(α) Σωστό

(β) Λάθος

**Η σωστή απάντηση είναι η (β).**

$$\hat{\theta} \pm \mathrm{c} \cdot \mathrm{SE}(\hat{\theta})$$

Όσο πιο μεγάλο είναι το n, τόσο πιο μικρό είναι το Δ.Ε. (διότι μειώνεται το SE), άρα η εκτίμηση της μέσης τιμής είναι καλύτερη.

# Ερώτηση

Αν θέλουμε να έχουμε μικρότερη πιθανότητα κάλυψης σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης τότε πρέπει να μειώσουμε το επίπεδο σημαντικότητας:

(α) Σωστό

(β) Λάθος

**Η σωστή απάντηση είναι η (β).**

Η πιθανότητα κάλυψης είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης 1 – α.