ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΘΟΔΩΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΓΓΟΝΑΣ

Σετ Διαφανειών 3: Κατανομές τυχαίων μεταβλητών – Κατανομές διακριτών τυχαίων μεταβλητών - Διωνυμική - Poisson

Τυχαίες Μεταβλητές

- Τυχαία μεταβλητή
  - Είναι ένα γεγονός του οποίου το αποτέλεσμα δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων
  - Τα αποτελέσματα του εκφράζονται αριθμητικά
  - Παράδειγμα:
    - ΤΥΧΑΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑ:Η ρίψη 2 ζαριών
    - ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ: Μετράμε τον αριθμό εμφάνισης του 6 (0,1 ή 2 φορές)

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

- Είναι Τυχαίες μεταβλητές των οποίων τα ενδεχόμενα είναι διακριτοί αριθμοί
- Παράδειγμα 1:
  - Τυχαίο πείραμα: Ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές
  - Τυχαία μεταβλητή: Αριθμός Γραμμάτων (0, 1, 2 ή 3)
- Παράδειγμα 2:
  - Τυχαίο πείραμα: Αγώνας Μπάσκετ
  - Τυχαία μεταβλητή: Αριθμός πόντων

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές:

Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 Νομισμάτων

Τυχαία Μεταβλητή: Αριθμός Κεφαλών

Κατανομή Πιθανότητας

Ενδεχόμενα	Πιθανότητα
0	1/4 = 0,25
1	2/4 = 0,50
2	1/4 = 0,25

Κατανομές Πιθανοτήτων

Σε κάθε τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί μια κατανομή πιθανότητας. Συχνά όμως έχουν διαπιστωθεί μεγάλες ομοιότητες σε αυτές τις κατανομές πιθανοτήτων.

Έτσι, έχουν δημιουργηθεί ορισμένες βασικές μορφές κατανομών πιθανοτήτων που ονομάζονται **θεωρητικές κατανομές πιθανοτήτων** και τις οποίες συνήθως χρησιμοποιούμε ως προσεγγίσεις των πραγματικών κατανομών.

Όταν λοιπόν θέλουμε να μελετήσουμε μια τ.μ. Χ η επιλογή της κατάλληλης θεωρητικής κατανομής που μπορεί να εκφράσει τις πιθανότητες των σημείων του δειγματικού χώρου της Χ μας επιτρέπει την εξαγωγή συνοπτικών και αξιόπιστων συμπερασμάτων για τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες της Χ.

Συνάρτηση Πιθανότητας (Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές)

- Είναι η καταγραφή όλων των βασικών ενδεχομένων (X_i) και των αντίστοιχων πιθανοτήτων τους $P(X_i)$
  - X_i = βασικό ενδεχόμενο δηλ. τιμή της τυχαίας Μεταβλητής
  - $P(X_i)$ = Πιθανότητα της τιμής - ενδεχομένου X_i
  - *Η* $P(X_i)$ συμβολίζεται και ως $f(x)$ και ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας. Ισχύουν:

$$0 \leq P\left(X_i\right) \leq 1 \qquad \sum_i P\left(X_i\right) = 1$$

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Αναμενόμενη τιμή (μέσος ή μαθηματική ελπίδα):

Σταθμικός μέσος των X_i με βάρη τις πιθανότητες των X_i:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ρίψη 2 νομισμάτων, αριθμός κεφαλών

Αναμενόμενη τιμή:

$$\mu = \sum_{x=0}^{2} x\,P(x)$$

$$= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,25 = 1,0$$

Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 Νομισμάτων

Τυχαία Μεταβλητή: Αριθμός Κεφαλών

Κατανομή Πιθανότητας

Ενδεχόμενα	Πιθανότητα
0	1/4 = 0,25
1	2/4 = 0,50
2	1/4 = 0,25

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

<u>Διακύμανση</u>

Σταθμικός μέσος των τετραγωνικών αποστάσεων X_j από το μέσο με βάρη τις πιθανότητες των X_j:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(\mathrm{X}-\mu)^2 = \sum_i \left(x_i - \mu\right)^2 P\left(X = x_i\right)$$

Η τυπική απόκλιση της X είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης:

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

Ιδιότητες Μέσης Τιμής και Διακύμανσης

Για όλες τις τυχαίες μεταβλητές ισχύουν :

$$E\left(a\cdot X+b\right)=a\cdot E\left(X\right)+b,\quad a,\ b\in\mathbb{R}$$

$$E\left(a\cdot X\right)=a\cdot E\left(X\right),\quad a\in\mathbb{R}$$

$$E\left(a\cdot X\pm b\cdot Y\right)=a\cdot E\left(X\right)\pm b\cdot E\left(Y\right),\quad a,\ b\in\mathbb{R}$$

$$E\left(a\right)=a,\quad a\in\mathbb{R}$$

$$V\left(a\cdot X\right)=a^2\cdot V\left(X\right),\quad a\in\mathbb{R}$$

$$V\left(a\cdot X\pm b\cdot Y\right)=a^2\cdot V\left(X\right)+b^2\cdot V\left(Y\right),\quad a,\ b\in\mathbb{R}$$

$$V\left(a\right)=0,\quad a\in\mathbb{R}$$

$$V\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ρίψη 2 νομισμάτων, αριθμός κεφαλών

Διακύμανση:

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{2} (\mathrm{x}-\mu)^2 \mathrm{P}(\mathrm{x})$$

$$= (0-1)^2 \times 0,25 + (1-1)^2 \times 0,50 +$$

$$+(2-1)^2 \times 0,25 = 0,5$$

Τυχαίο Πείραμα: Ρίψη 2 Νομισμάτων

Τυχαία Μεταβλητή: Αριθμός Κεφαλών

Μέσος μ = 1

Κατανομή Πιθανότητας

Ενδεχόμενα	Πιθανότητα
0	1/4 = 0,25
1	2/4 = 0,50
2	1/4 = 0,25

Συνάρτηση Κατανομής

- Είναι η συνάρτηση που μας δίνει την πιθανότητα $P(X \leq x)$
- Προκύπτει ως άθροισμα των πιθανοτήτων $P(X = x_i)$ όλων των βασικών ενδεχομένων x_i για τα οποία $x_i \leq x$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P\left(X = x_i\right)$$

Πείραμα Bernoulli:

- Ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει δύο δυνατά (αμοιβαίως αποκλειόμενα) αποτελέσματα: επιτυχία ή αποτυχία, και η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερή και ίση με p.
- Κάθε τέτοια εκτέλεση ενός πειράματος τύχης με μόνο δύο δυνατά αποτελέσματα καλείται **δοκιμή**.
- Το πείραμα με τα χαρακτηριστικά αυτά ονομάζεται **πείραμα Bernoulli**.

Παράδειγμα

- Το στρίψιμο ενός νομίσματος είναι ένα πείραμα Bernoulli, με πιθανότητα επιτυχίας p = 0,5 και πιθανότητα αποτυχίας επίσης q =1 – p = 0,5. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το ενδεχόμενο επιτυχίας έχουμε:

$$X \sim B(0,5)$$

Διωνυμική (Binomial) κατανομή

- Εάν έχουμε μια ακολουθία από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli (p), με την πιθανότητα επιτυχίας p να είναι σταθερή σε όλες τις δοκιμές τότε η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει τον αριθμό των επιτυχιών (στις n προσπάθειες) ονομάζεται Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p και συμβολίζουμε:

$$X \sim B(n, p)$$

Διωνυμική κατανομή

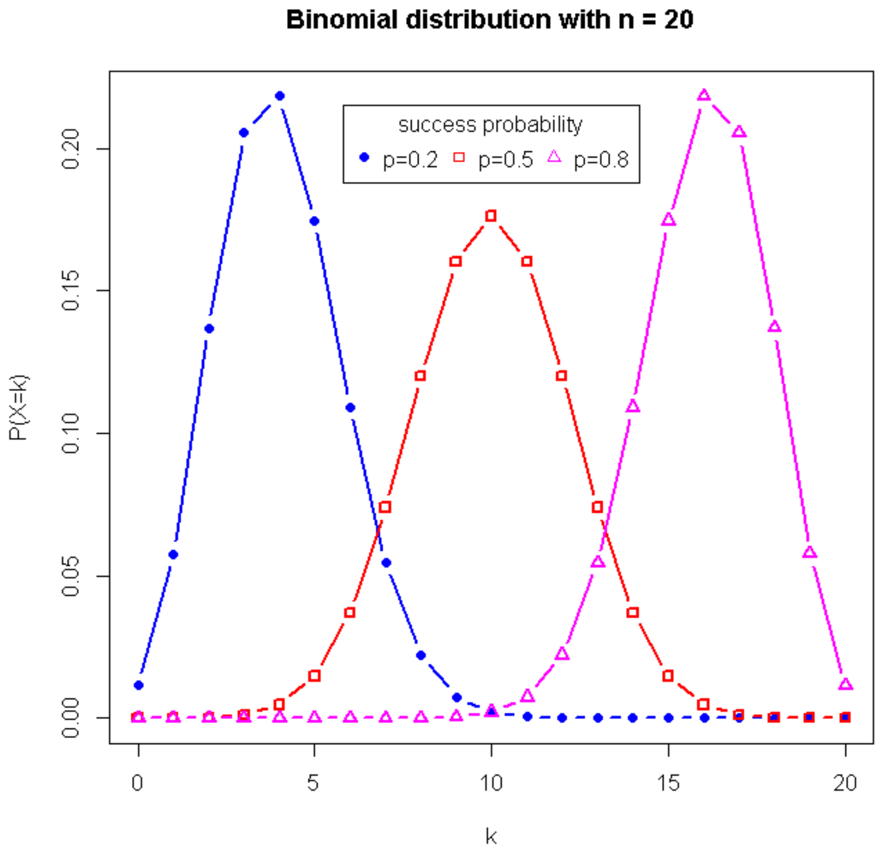
- Η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

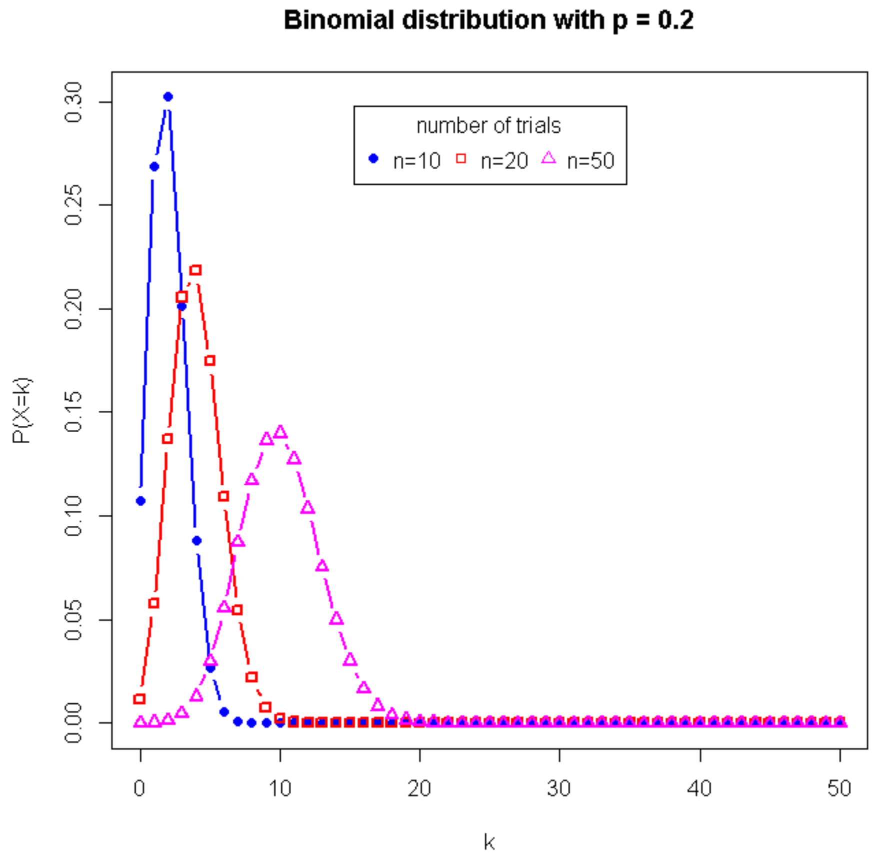
$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},\quad 0\le k\le n,\qquad 0<p<1$$

ενώ η μέση τιμή και η διακύμανση είναι:

$$E(X)=np \qquad\qquad V(X)=npq$$

Η μορφή της διωνυμικής κατανομής





Παράδειγμα:

- Ένας πωλητής πραγματοποιεί τηλεφωνικές πωλήσεις. Από διαχρονικά στοιχεία που τηρούνται στο τμήμα πωλήσεων της εταιρείας προκύπτει ότι η πιθανότητα επίτευξης πώλησης για το συγκεκριμένο πωλητή είναι 30%. Έστω ότι ο πωλητής σε μια τυχαία επιλεγμένη ημέρα τηλεφωνεί σε 10 άτομα. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα πώλησης παραμένει σταθερή στο χρόνο και ότι τα διαδοχικά τηλεφωνήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους να υπολογισθούν:

1. Η πιθανότητα να επιτύχει 3 πωλήσεις.
2. Η πιθανότητα να επιτύχει το πολύ 2 πωλήσεις.
3. Η πιθανότητα να επιτύχει τουλάχιστον 2 πωλήσεις.
4. Ο αναμενόμενος αριθμός και η τυπική απόκλιση των πωλήσεων.

Λύση

- Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχημένων τηλεφωνημάτων από τα 10 που συνολικά έγιναν τη συγκεκριμένη ημέρα. Έχουμε:

$$X \sim B(n, p) = B(10, 0, 3)$$

1. $P(X=3)=\binom{10}{3}p^3(1-p)^7=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}0,3^3\times 0,7^7=0,2668$

2. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$P\left(X \leq 2\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) =$$

$$= \binom{10}{0} p^{0} \left(1 - p\right)^{10} + \binom{10}{1} p^{1} \left(1 - p\right)^{9} + \binom{10}{2} p^{2} \left(1 - p\right)^{8} =$$

$$= 0,7^{10} + 10 \times 0,3^{1} \times 0,7^{9} + \frac{10 \times 9}{2} 0,3^{2} \times 0,7^{8} =$$

$$= 0,0282 + 0,1211 + 0,2335 =$$

$$= 0,3828$$

3.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$
$$= 1 - 0,0282 - 0,1211 = 0,8507$$

4.

$$E(X) = n \times p = 10 \times 0,3 = 3$$
$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{10 \times 0,3 \times 0,7} = 1,449$$

Κατανομή Poisson

Η **κατανομή Poisson** χρησιμοποιείται συνήθως για να περιγράψει φαινόμενα «ουρών» όπως π.χ. ο αριθμός πελατών που φθάνουν σε μια τράπεζα εντός ορισμένου χρονικού διαστήματος, ο αριθμός τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μία περιοχή κατά τη διάρκεια ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, ο αριθμός κλήσεων ενός τηλεφωνικού κέντρου κ.λπ.

Κατανομή Poisson

Για την διαδικασία πραγματοποίησης των ενδεχομένων μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Σε κάθε χρονικό διάστημα ένα ενδεχόμενο μπορεί είτε να πραγματοποιηθεί είτε να μην πραγματοποιηθεί. Η πραγματοποίησή του ενδεχομένου ονομάζεται επιτυχία ενώ η μη πραγματοποίησή του αποτυχία.

ii. Οι τυχαίες εμφανίσεις ενδεχομένων είναι ανεξάρτητες, δηλαδή η εμφάνιση ενός ενδεχομένου σε ένα διάστημα χρόνου ή χώρου δεν επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισής του στα επόμενα διαστήματα του χρόνου ή του χώρου.

Κατανομή Poisson

- Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X της οποίας οι τιμές εκφράζουν τον αριθμό των συμβάντων σε ένα προκαθορισμένο διάστημα χρόνου ή χώρου. Αν λ είναι ο μέσος αριθμός επιτυχιών στο διάστημα αυτό, τότε η τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ:

$$X \sim P(\lambda)$$

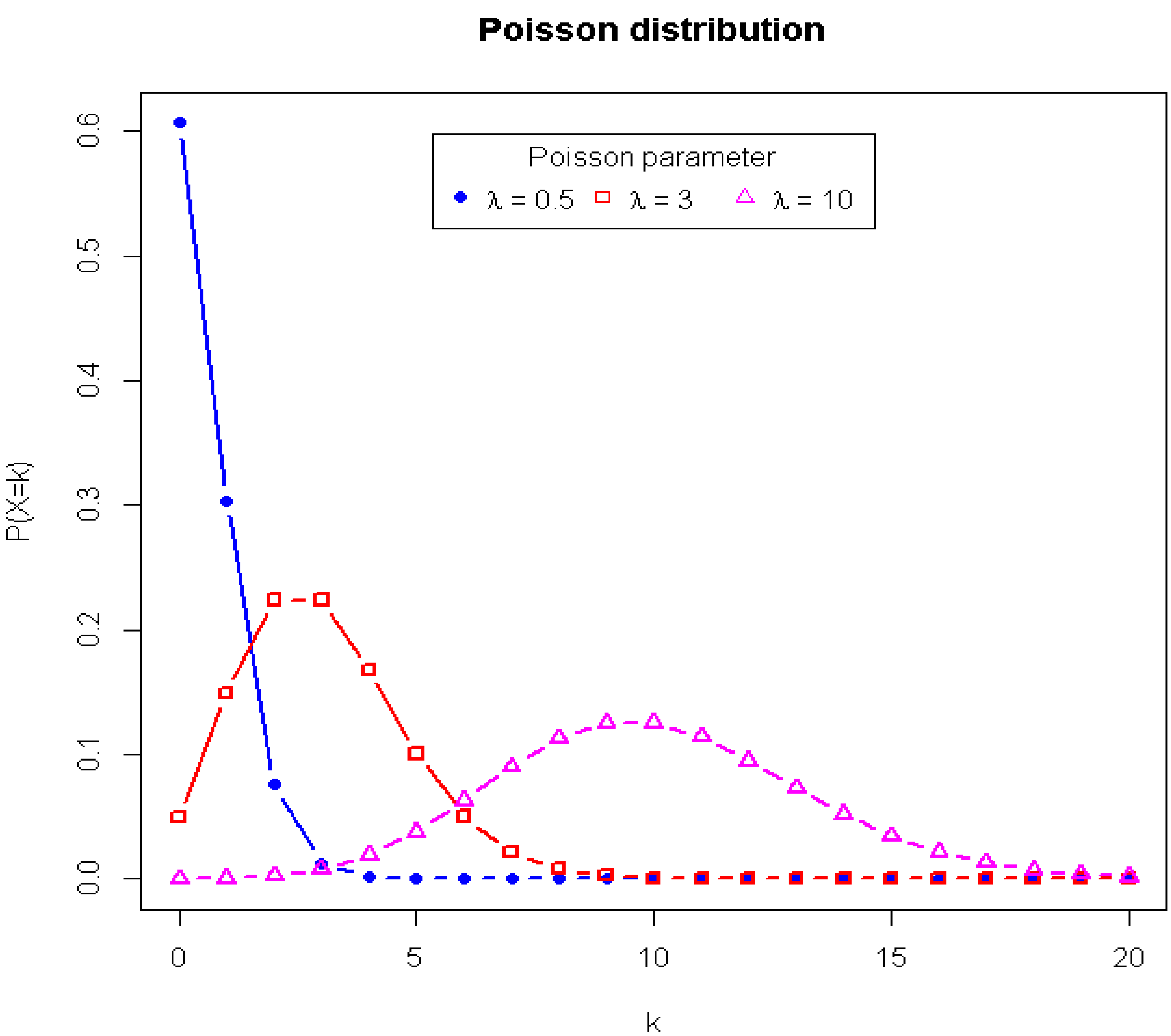
Κατανομή Poisson

- Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson είναι:

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

- Με μέση τιμή και διακύμανση:

$$E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$


Poisson distribution
Poisson parameter
λ = 0.5
λ = 3
λ = 10
P(X=k)
k
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0
5
10
15
20

Ιδιότητες

- Η μέση τιμή είναι ίση με τη διακύμανση (ίσες με το λ)

- Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ στη μονάδα του χρόνου (ή χώρου) τότε σε t μονάδες χρόνου (ή χώρου) ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λt

Παράδειγμα

Η εταιρεία «DOT.COM A.E.» ασχολείται με τις πωλήσεις προϊόντων μέσω Internet. Οι παραγγελίες καταφθάνουν με ρυθμό 48 ανά ώρα.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν 2 παραγγελίες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα ενός πενταλέπτου.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν 4 παραγγελίες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα ενός τετάρτου.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 παραγγελίες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα ενός πενταλέπτου.

Λύση

Οι παραγγελίες ακολουθούν την κατανομή Poisson. Σύμφωνα με τα δεδομένα ο μέσος αριθμός παραγγελιών είναι 48 κλήσεις ανά 60 λεπτά, δηλαδή λ = 48/60 = 0,8 κλήσεις το λεπτό. Επομένως έχουμε:

$$P\left(2 \text{ παραγγελίες σε ένα πεντάλεπτο}\right) = P\left(X = 2 \middle| \lambda \ = 5 \times 0,8\right) =$$

$$= P\left(X = 2 \middle| \lambda = 4\right) = \frac{e^{-4} 4^2}{2!} = 0,1465$$

2. $$P\left(4 \text{ παραγγελίες σε ένα τέταρτο}\right) = P\left(X = 4 \middle| \lambda_2 = 15 \times 0,8\right) =$$

$$= P\left(X = 4 \middle| \lambda_2 = 12\right) = \frac{e^{-12} 12^4}{4!} = 0,0053$$

3. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - P\left(X = 0 \middle| \lambda = 4\right) - P\left(X = 1 \middle| \lambda = 4\right) = 1 - \frac{e^{-4} 4^0}{0!} - \frac{e^{-4} 4^1}{1!} =$$

$$= 1 - 0{,}0183 - 0{,}0732 = 0{,}9084$$