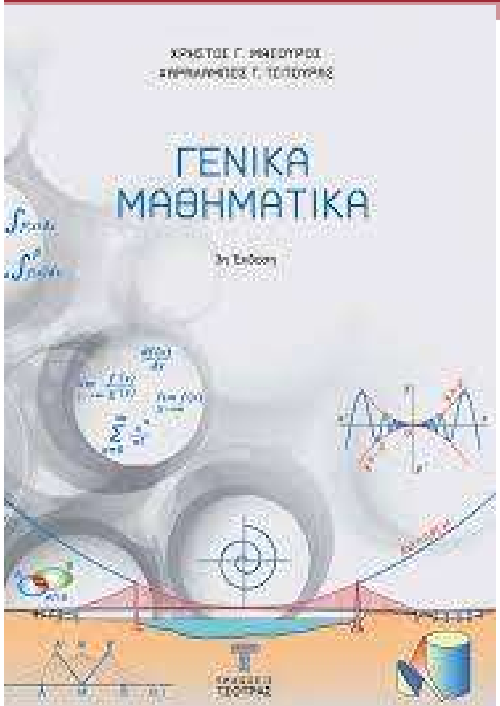
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Πίνακες - Γραμμικά Συστήματα



Σταμάτης Βολιώτης
10ο μάθημα

**Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας**

Γραμμικές εξισώσεις

Μία **ευθεία** σε ένα καρτεσιανό επίπεδο είναι μια εξίσωση της μορφής

$$a_1 x + a_2 y = b$$

Μια εξίσωση της παραπάνω μορφής ονομάζεται **γραμμική εξίσωση** ως προς τις μεταβλητές x και y. Γενικότερα ονομάζουμε **γραμμική εξίσωση** n **αγνώστων** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$2x + 3y = 5, \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$$

$$y = 2x + 3z - 1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

?

$$2x + 3y^2 = 5, \qquad x_1 x_2 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9$$

$$y = 2\cos x + 3z - 1 \qquad \sqrt{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

Γραμμικές εξισώσεις

Ορισμός 1.1. Έστω μια γραμμική εξίσωση

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Μία **λύση** της εξίσωσης αυτής είναι n αριθμοί $s_1, s_2, \ldots, s_n$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση αν θέσουμε:

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n$$

Όλες οι λύσεις που ικανοποιούν την γραμμική εξίσωση αποτελούν το **σύνολο των λύσεων** ή τη **γενική λύση** της εξίσωσης.

Ορισμός 1.2. Ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ονομάζεται **σύστημα γραμμικών εξισώσεων** ή απλά **γραμμικό σύστημα**. Οι n αριθμοί $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ονομάζονται **λύση** του συστήματος αν:

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n$$

είναι λύση κάθε εξίσωσης του συστήματος.

Γραμμικές εξισώσεις

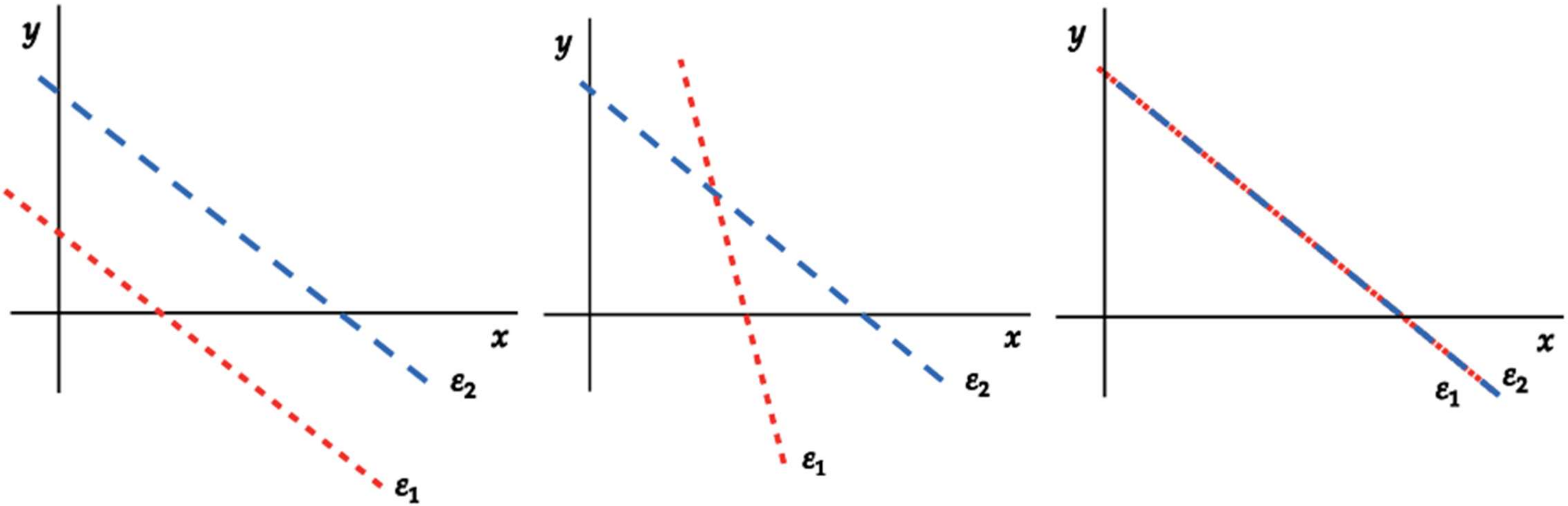
$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$?

$x_1 = 1,\ x_2 = 8,\ x_3 = 1$?

Γραμμικές εξισώσεις

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$



Γραμμικές εξισώσεις

Θεώρημα 1.1. *Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει ή μια λύση, ή άπειρες λύσεις, ή καμία λύση.*

Όταν το σύστημα έχει μία λύση, ονομάζεται **συμβιβαστό**, ενώ όταν δεν έχει λύση ονομάζεται **αδύνατο**.

Γραμμικά συστήματα

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Η χρήση των δύο δεικτών στους συντελεστές των αγνώστων αποδεικνύεται ένας πολύ χρήσιμος συμβολισμός, καθώς μας δίνει πολλές πληροφορίες. Ο πρώτος δείκτης του τυχόντος συντελεστή a_{ij} μας φανερώνει σε ποια εξίσωση ανήκει ο συντελεστής αυτός και ο δεύτερος ποιόν άγνωστο πολλαπλασιάζει. Έτσι, π.χ. ο συντελεστής a_{21} βρίσκεται στην δεύτερη εξίσωση και πολλαπλασιάζει τον άγνωστο x_1.

Γραμμικά συστήματα

Η απλούστερη περίπτωση γραμμικού συστήματος είναι όταν ο αριθμός των αγνώστων είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων

- Η μέθοδος των οριζουσών
- Η μέθοδος της απαλοιφής

Γραμμικά συστήματα

Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y + 3z &= 4 \\ -2x + 15y + z &= 15 \end{aligned}$$

Η μέθοδος ξεκινά προσθαφαιρώντας πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης στις υπόλοιπες, έτσι ώστε να απαλειφθεί ο άγνωστος x από τις δύο τελευταίες εξισώσεις. Έτσι

(α) πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη.

(β) προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη.

Το αποτέλεσμα είναι το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ 16y + 2z &= 20 \end{aligned}$$

Ο συντελεστής 2 που πολλαπλασιάζει τον πρώτο άγνωστο x στην πρώτη εξίσωση ονομάζεται **πρώτος οδηγός**. Στο επόμενο βήμα της μεθόδου της απαλοιφής αγνοούμε την πρώτη εξίσωση και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία στις άλλες δύο εξισώσεις που περιέχουν τους αγνώστους y και z με σκοπό να απαλείψουμε τον άγνωστο y. Έτσι

Γραμμικά συστήματα

(γ) πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 2 και την προσθέτουμε στην τρίτη.

Το αποτέλεσμα είναι το ισοδύναμο απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$$

Η λύση τώρα του τελευταίου αυτού συστήματος, στο οποίο καταλήξαμε, είναι πολύ απλή. Από την τελευταία εξίσωση άμεσα προκύπτει ότι $z = 2$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε ότι $y = 1$. Τέλος αντικαθιστώντας τις τιμές των y και z στην πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε ότι $x = 1$.

Συμβολική γραφή γραμμικών συστημάτων

γραμμικό σύστημα	επαυξημένος πίνακας
$\begin{aligned} x+y+z+w&=6\\ 2x+2y+3z+3w&=15\\ 4x+6y+8z+2w&=34\\ x+2y+2z+2w&=11 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & 2 & 3 & 3 & 15\\ 4 & 6 & 8 & 2 & 34\\ 1 & 2 & 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$
$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ 2x+2y+5z&=b\\ 4x+4y+8z&=c \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a\\ 2 & 2 & 5 & b\\ 4 & 4 & 8 & c \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

γραμμικό σύστημα	επαυξημένος πίνακας
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ 4x - 6y + 3z &= 4 \\ -2x + 15y + z &= 15 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 3 & 4 \\ -2 & 15 & 1 & 15 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:	πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ -2x + 15y + z &= 15 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ -2 & 15 & 1 & 15 \end{bmatrix}$
προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην τρίτη:	προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην τρίτη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ 16y + 2z &= 20 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 16 & 2 & 20 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 2 και την προσθέτουμε στην τρίτη:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί 2 και την προσθέτουμε στην τρίτη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί 1/4:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί 1/4:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y + z &= -6 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ -8y &= -8 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί -1/8:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -1/8:
$\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:	πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:
$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:	πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή επί -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη:
$\begin{aligned} 2x \quad\quad &= 2 \\ y \quad &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί 1/2:	πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί 1/2:
$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ y \quad &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Απαλοιφή με τον επαυξημένο πίνακα

►**Παράδειγμα 5.1.** Έστω ότι επιθυμούμε να λύσουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 8 \\ 2x - 3y + z &= -1 \\ 3x - 8y + 3z &= -8 \end{aligned}$$