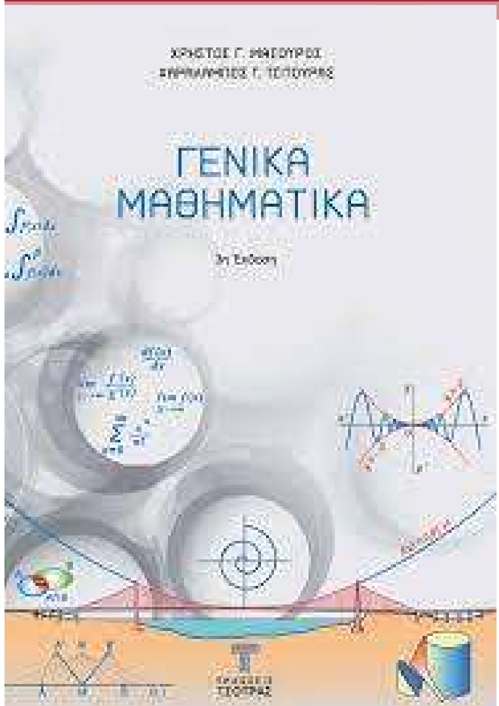
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων

Μάθημα: Μαθηματικά

Ενότητα: Η Παράγωγος



Σταμάτης Βολιώτης

7ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Η έννοια της παραγώγου

- Να δημιουργηθεί το κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο, για να περιγράψει πώς η μεταβολή της τιμής μιας μεταβλητής (x) επηρεάζει τη μεταβολή της τιμής μιας άλλης μεταβλητής (y), η οποία εξαρτάται από την x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

- πληροφορίες για τον **ρυθμό** μεταβολής της συνάρτησης y = f (x) ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x
- πολλές πληροφορίες και για την ίδια την συνάρτηση f (x)

Η έννοια της παραγώγου

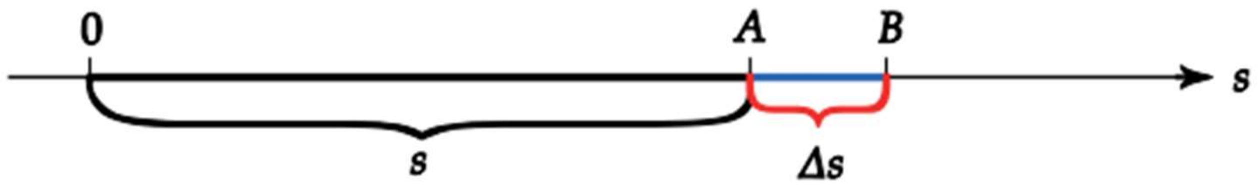
Παραδείγματα

- Έστω ότι μια οικογένεια έχει μηνιαίο εισόδημα x ευρώ και έχει αποφασίσει να καταναλώνει το 70% συν 5 ευρώ
  - Αν το μηνιαίο εισόδημα x της οικογένειας αυξηθεί κατά μια μικρή ποσότητα, έστω Δx , τότε η f (x) θα αυξηθεί κατά Δy
  - ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης σε σχέση με τη μεταβολή του μηνιαίου εισοδήματος
- Έστω ότι οι εργάτες μίας αυτοκινητοβιομηχανίας εργαζόμενοι x ώρες ο καθένας παράγουν έναν αριθμό y = f (x) αυτοκινήτων
  - Αν ο χρόνος εργασίας αυξηθεί κατά Δx, τότε ο αριθμός των αυτοκινήτων αυξάνεται κατά Δy

Η έννοια της παραγώγου

Παραδείγματα

- Ένα υλικό σημείο το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα s από αριστερά προς τα δεξιά



  - Η κίνηση αυτή γενικά δεν είναι ομαλή, δηλαδή η ταχύτητα του υλικού σημείου μπορεί να αυξομειώνεται
  - Συνάρτηση της θέσης s του σημείου σε σχέση με τον χρόνο t, δηλαδή s=f(t)
  - Το πηλίκο του διανυθέντος διαστήματος δια του χρόνου που απαιτήθηκε να διανυθεί μας δίνει την μέση ταχύτητα
    - Πλασματική ταχύτητα
  - «πραγματική» ταχύτητα: ταχύτητα του υλικού σημείου κάθε δεδομένη χρονική στιγμή
    - Στιγμιαία ταχύτητα

Η έννοια της παραγώγου

- κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο, για να περιγράψει πώς η μεταβολή της τιμής μιας μεταβλητής (x) επηρεάζει τη μεταβολή της τιμής μιας άλλης μεταβλητής (y), η οποία εξαρτάται από την x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

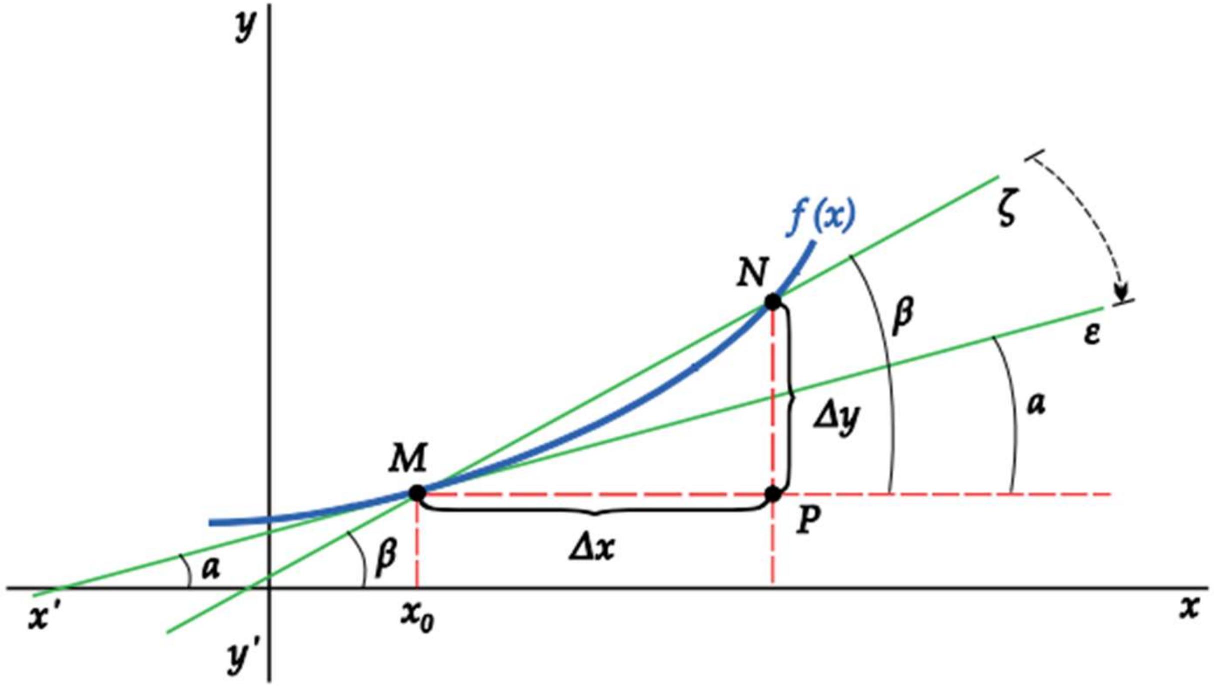
- Ο λόγος αυτός αποκτά ιδιαίτερη σημασία αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

- Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_o

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

- Το πρόβλημα της εύρεσης της μοναδικής εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης ...



- Η παράγωγος μιας συνάρτησης f (x) σε ένα σημείο της x_o γεωμετρικά εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο x_o

Ο ορισμός της παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $x_o\in(a,b)$. Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) στο x_o αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) σε κάθε σημείο του διαστήματος (a,b), τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) στο διάστημα (a,b). .

- Ισοδύναμος ορισμός

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Ο ορισμός της παραγώγου

- Παραδείγματα

Η σταθερή συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$

Η ταυτοτική συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$

Η συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$

Η συνάρτηση: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$

Ο ορισμός της παραγώγου

- Παραδείγματα

Η σταθερή συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{c-c}{x-x_o}=0$$

Η ταυτοτική συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x-x_o}{x-x_o}=1$$

Ο ορισμός της παραγώγου

- Παραδείγματα

Η συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x^n-{x_o}^n}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{(x-x_o)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_o+\ldots+{x_o}^{n-1}\right)}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_o+\ldots+{x_o}^{n-1}\right)=n\cdot {x_o}^{n-1}$$

Ο ορισμός της παραγώγου

- Παραδείγματα

Η συνάρτηση: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{\frac{1}{n}},\ n\in\mathbb{N}$

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x_o^{\frac{1}{n}}}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_o}}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_o}\right)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_o}+\ldots+\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}\right)}{(x-x_o)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_o}+\ldots+\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{x-x_o}{(x-x_o)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_o}+\ldots+\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}\right)}=$$

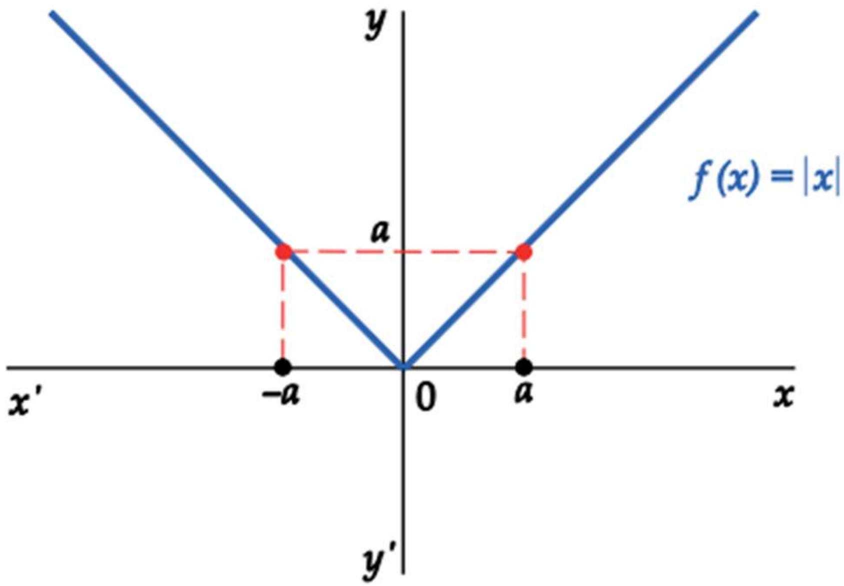
$$=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{x_o}+\ldots+\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}+\sqrt[n]{x_o^{\,n-2}}\sqrt[n]{x_o}+\ldots+\sqrt[n]{x_o^{\,n-1}}}=\frac{1}{n}x_o^{\frac{1}{n}-1}$$

Ο ορισμός της παραγώγου

- Η συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, συνεπάγεται και την ύπαρξη παραγώγου στο σημείο αυτό **?**

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

Επομένως το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει και συνεπώς η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ◄

Ο ορισμός της παραγώγου

Θεώρημα 4.1. *Αν μία συνάρτηση* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο* x_o *του διαστήματος* (a,b), *τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο σημείο* x_o.

Πρόταση 4.1. **(Καραθεοδωρή)** *Μία συνάρτηση* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο* x_o *του διαστήματος* (a,b), *αν και μόνον αν υπάρχει μια συνάρτηση* $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ *με*

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \quad \text{αν} \quad x\neq x_o$$

η οποία να είναι συνεχής στο σημείο x_o. *Τότε έχουμε* $f'(x_o)=\varphi(x_o)$.

Ο ορισμός της παραγώγου

►**Άσκηση 4.1.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη από τις συνθήκες:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu \quad x\le 2 \\ \kappa x+\lambda & \alpha\nu \quad x>2 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα κ, λ ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο 2.

Ο ορισμός της παραγώγου

►**Άσκηση 4.1.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη από τις συνθήκες:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu \quad x\le 2 \\ \kappa x+\lambda & \alpha\nu \quad x>2 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα κ, λ ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο 2.

Λύση. Για να έχει η συνάρτηση παράγωγο στο 2, θα πρέπει να υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται με διαφορετικό τύπο δεξιά και αριστερά από το 2 εξετάζουμε τα πλευρικά όρια.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4 \qquad (1)$$

και

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\kappa x+\lambda-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\kappa x-2\kappa+2\kappa+\lambda-4}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\kappa+2\kappa+\lambda-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left(\kappa+\frac{2\kappa+\lambda-4}{x-2}\right)$$

Ο ορισμός της παραγώγου

►**Άσκηση 4.1.** Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη από τις συνθήκες:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu \quad x\le 2 \\ \kappa x+\lambda & \alpha\nu \quad x>2 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα κ, λ ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο 2.

Όμως για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\kappa+\dfrac{2\kappa+\lambda-4}{x-2}\right)$ θα πρέπει να είναι:

$$2\kappa+\lambda-4=0 \qquad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\kappa+\frac{2\kappa+\lambda-4}{x-2}\right)=\kappa \qquad (3)$$

Άρα για να υπάρχει η παράγωγος της $f(x)$ στο 2, λόγω των (1) και (3) θα πρέπει $\kappa=4$.
Αντικαθιστώντας την τιμή του κ στην (2) υπολογίζουμε και την τιμή του λ:

$$2\cdot 4+\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=-4$$ ◄

Κανόνες παραγώγισης

Θεώρημα 5.1. *Αν οι* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο* $x_o \in (a,b)$, *τότε η συνάρτηση* $f + g$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_o *και ισχύει:*

$$(f+g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$$

Θεώρημα 5.2. *Αν η* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο* $x_o \in (a,b)$, *και* $\lambda \in \mathbb{R}$ *τότε η συνάρτηση* λf *είναι παραγωγίσιμη στο* x_o *και ισχύει:*

$$(\lambda f)'(x_o) = \lambda f'(x_o)$$

Θεώρημα 5.3. *Αν οι* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο* $x_o \in (a,b)$, *τότε το γινόμενό τους* $f \cdot g$ *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο* x_o *και ισχύει:*

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) g'(x_o)$$

Κανόνες παραγώγισης

Θεώρημα 5.4. *Αν οι* $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο* $x_o\in(a,b)$, *και επιπλέον* $g(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in(a,b)$, *τότε το πηλίκο τους* $\dfrac{f}{g}$ *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο* x_o *και ισχύει:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f'(x_o)\cdot g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{\left[g(x_o)\right]^2}$$

Ειδικότερα:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_o)=\frac{-g'(x_o)}{\left[g(x_o)\right]^2}$$

Κανόνες παραγώγισης

Θεώρημα 5.5. *(κανόνας της αλυσίδας) Αν η $f:(a,b)\to(c,d)$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_o\in(a,b)$, και η $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $f(x_o)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_o και ισχύει:*

$$(g\circ f)'(x_o)=g'(f(x_o))f'(x_o)$$

Θεώρημα 5.6. *(κανόνας παραγώγισης αντιστρόφου συναρτήσεως) Έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση στο διάστημα (a,b) και παραγωγίσιμη στο $x_o\in(a,b)$, τότε*

i. αν $f'(x_o)\neq 0$, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_o=f(x_o)$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_o)=\frac{1}{f'(x_o)}$$

ii. αν $f'(x_o)=0$, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $y_o=f(x_o)$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = x^{-n}$	$y' = -nx^{-n-1}$
$y = x^{\frac{1}{n}}$	$y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \dfrac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
$y = x^a$	$y' = a x^{a-1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Άσκηση 1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x)=2x^3-5x^2+7x+4$

ii. $f(x)=x^2e^x$

iii. $f(x)=x^3\arctan x$

iv. $f(x)=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Άσκηση 1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x)=2x^3-5x^2+7x+4$

ii. $f(x)=x^2e^x$

iii. $f(x)=x^3\arctan x$

iv. $f(x)=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$

(i) $$f'(x)=\left(2x^3\right)'-\left(5x^2\right)'+(7x)'+(4)'=2\left(x^3\right)'-5\left(x^2\right)'+7x'+4'=$$

$$=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+7\cdot 1+0=6x^2-10x+7\,.$$

(ii) $$f'(x)=x^2\left(e^x\right)'+e^x\left(x^2\right)'=x^2e^x+2xe^x=xe^x(x+2)$$

(iii) $$f'(x)=x^3(\arctan x)'+\arctan x\cdot\left(x^3\right)'=x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}+3x^2\cdot\arctan x=$$

$$=\frac{x^3}{1+x^2}+3x^2\cdot\arctan x\,.$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Άσκηση 1. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x)=2x^3-5x^2+7x+4$

ii. $f(x)=x^2e^x$

iii. $f(x)=x^3\arctan x$

iv. $f(x)=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$

(iv) Η συνάρτηση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)=x^{3/2}\cdot(3\ln x-2)=3x^{3/2}\ln x-2x^{3/2}$$

Οπότε

$$f'(x)=3\frac{3}{2}x^{1/2}\ln x+3x^{3/2}\frac{1}{x}-2\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{9}{2}x^{1/2}\cdot\ln x+3x^{1/2}+-3x^{1/2}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Άσκηση 5. Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = (5x - 3)^2$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Άσκηση 5. Να υπολογισθεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = (5x-3)^2$$

Είναι:

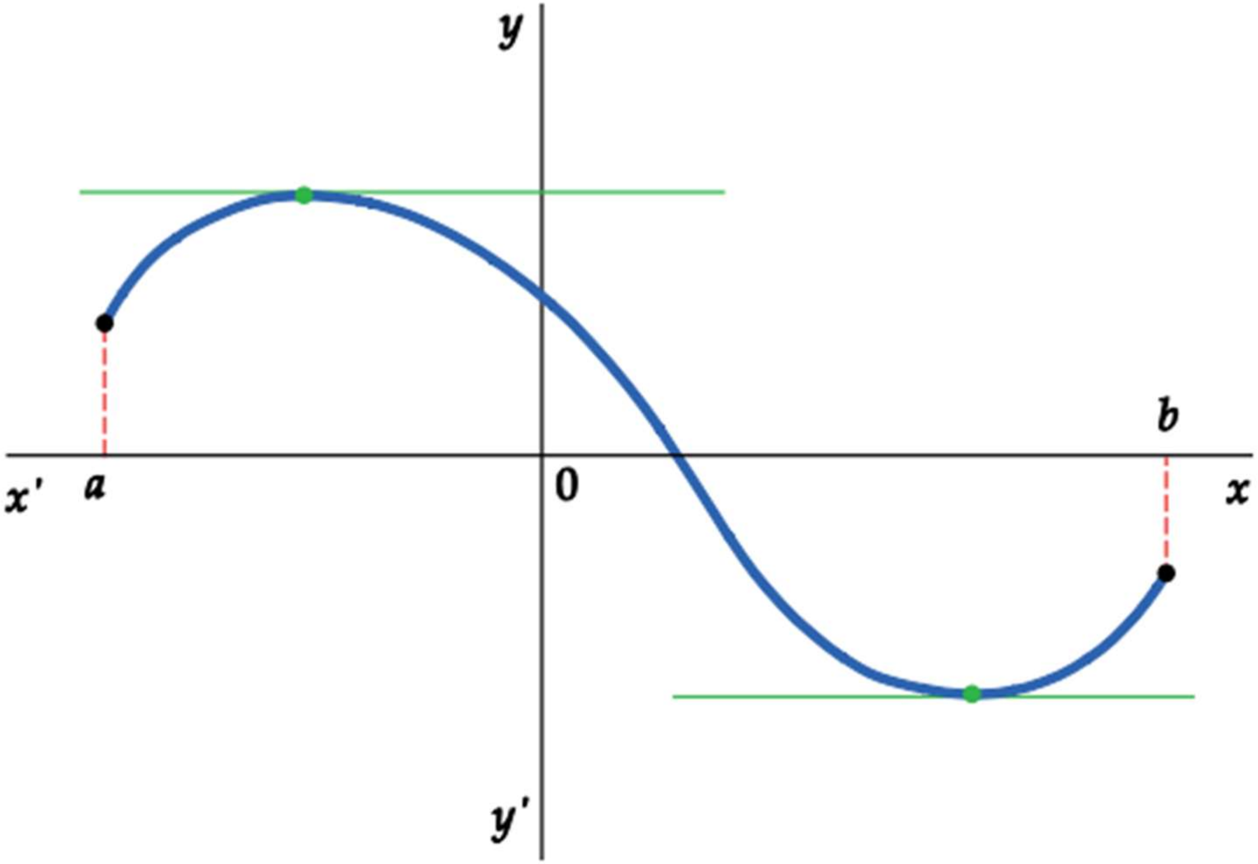
$$f'(x) = \left[(5x-3)^2\right]' = 2(5x-3)(5x-3)' = 2(5x-3)\cdot 5 = 10(5x-3)$$

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = \left[10(5x-3)\right]' = 10\,(5x-3)' = 10\cdot 5 = 50 \quad ◀$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα 1.1. (Θεώρημα του Fermat) *Αν για την συνάρτηση* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, *το* $x_o \in (a,b)$ *είναι τοπικό ακρότατο και η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x_o, *τότε*

$$f'(x_o)=0$$



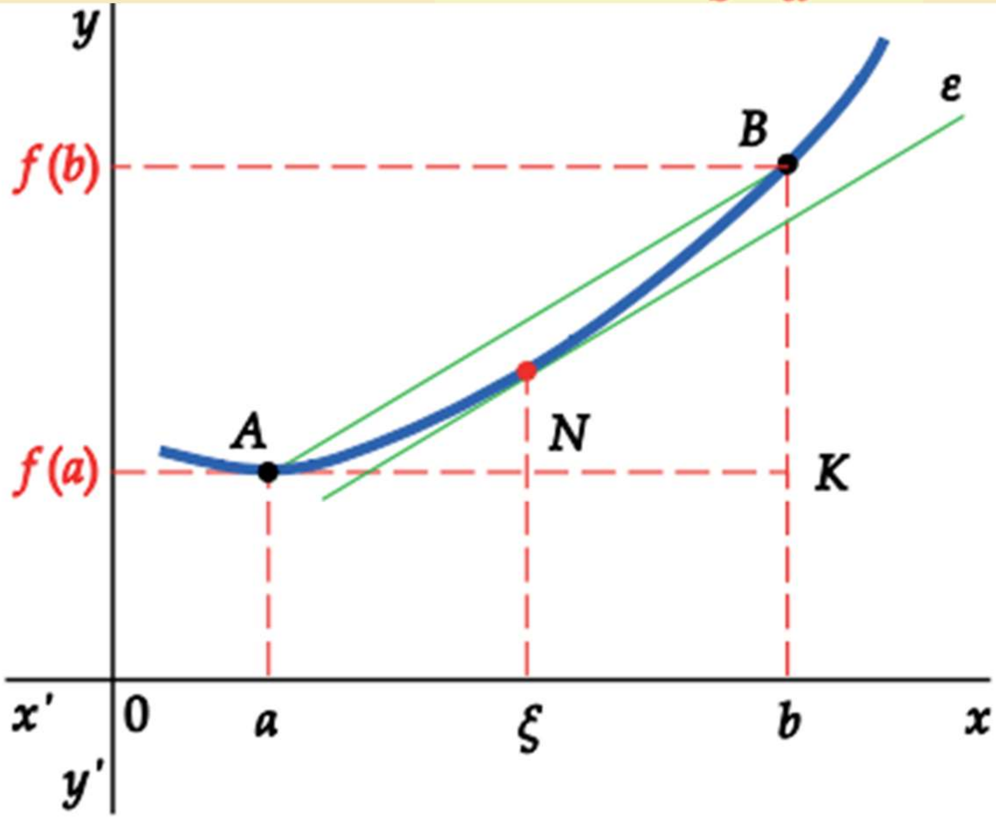
Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα 3.1. (Θεώρημα του Lagrange) *Έστω ότι η συνάρτηση* f *είναι*

- *συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$
- *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (a,b)

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$, *τέτοιο ώστε:*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα 3.1. (Θεώρημα του Lagrange) *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι*

- *συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$
- *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (a,b)

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$*, τέτοιο ώστε:*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Πόρισμα 3.1. *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και* $f'(x)=0$ *για κάθε* x *στο διάστημα αυτό, τότε η* $f(x)$ *είναι σταθερή σε αυτό το διάστημα.*

Πόρισμα 3.3. *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και* $f'(x)>0$ *για κάθε* x *από το διάστημα αυτό, τότε η* $f(x)$ *είναι γνήσια αύξουσα σε αυτό το διάστημα, ενώ αν* $f'(x)<0$ *για κάθε* x *από το διάστημα αυτό, τότε η* $f(x)$ *είναι γνήσια φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.*

Πόρισμα 3.4. *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και* $f'(x)\geq 0$ *για κάθε* x *από το διάστημα αυτό, τότε η* $f(x)$ *είναι αύξουσα σε αυτό το διάστημα, ενώ αν* $f'(x)\leq 0$ *για κάθε* x *από το διάστημα αυτό, τότε η* $f(x)$ *είναι φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.*

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα 3.1. (Θεώρημα του Lagrange) *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι*

- *συνεχής στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$
- *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (a,b)

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$, *τέτοιο ώστε:*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Πόρισμα 3.5. *Αν μία συνάρτηση f έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε ένα σημείο a του πεδίου ορισμού της και $f'(a)=0$, τότε*

i. *αν* $f''(a)>0$ *η* f *παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο* a

ii. *αν* $f''(a)<0$ *η* f *παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο* a

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Ο Κανόνας του de l'Hôpital

Θεώρημα 5.1. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* f *και* g *είναι*

- *συνεχείς στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$
- *παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα* (a,b)
- *και* $f(a)=g(a)=0$

Τότε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *, υπάρχει και το όριο* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *και μάλιστα:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Ο Κανόνας του de l'Hôpital

▶ **Παράδειγμα 5.1.** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

▶ **Παράδειγμα 5.2.** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

▶ **Παράδειγμα 5.3.** $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Ο Κανόνας του de l'Hôpital

▶ **Παράδειγμα 5.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{3}=\dfrac{5}{3}$ ◀

▶ **Παράδειγμα 5.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\ln(1+x)\right]'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\dfrac{1}{1}=1$ ◀

▶ **Παράδειγμα 5.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[e^x-e^{-x}-2x\right]'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[e^x+e^{-x}-2\right]'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Ο Κανόνας του de l'Hôpital

Θεώρημα 5.2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* f *και* g *είναι συνεχείς, διαφορίσιμες και* $g'(x) \neq 0$ *σε κάθε σημείο* x *της περιοχής ενός σημείου* a*, εκτός ενδεχομένως από το ίδιο το* a*. Αν*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \textit{και} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εφόσον το όριο του δευτέρου μέρους, πεπερασμένο ή άπειρο, υπάρχει.

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Ο Κανόνας του de l'Hôpital

▶ **Παράδειγμα 5.5.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

▶ **Παράδειγμα 5.6.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$

▶ **Παράδειγμα 5.7.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 + b}{cx^2 + d} =$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Ο Κανόνας του de l'Hôpital

► **Παράδειγμα 5.5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$ ◄

► **Παράδειγμα 5.6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ ◄

► **Παράδειγμα 5.7.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{cx^2+d}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(ax^2+b\right)'}{\left(cx^2+d\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{2cx}=\dfrac{a}{c}$ ◄