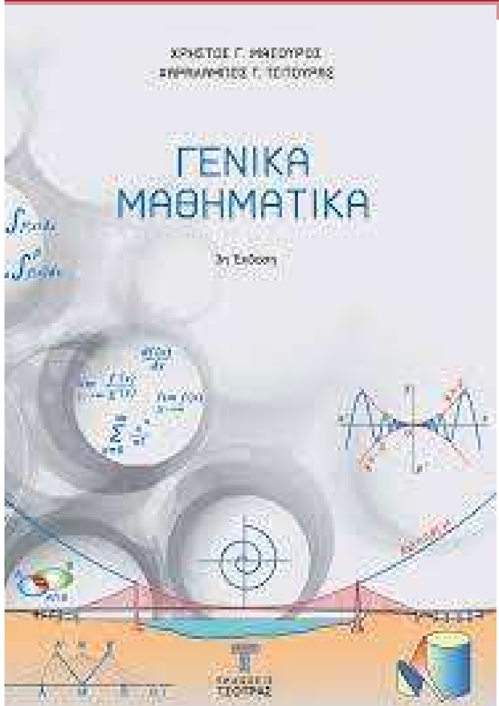
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Σύνολα, Συναρτήσεις και Πραγματικοί Αριθμοί



Σταμάτης Βολιώτης

1ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Σύνολα

- **σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων ή διανοημάτων σαφώς καθορισμένων και διακεκριμένων τα οποία θεωρούμε ως μία ολότητα
- Το καθένα από τα αντικείμενα που απαρτίζουν το σύνολο ονομάζεται **στοιχείο** του συνόλου
- ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο A
  - $x \in A$
- ένα στοιχείο δεν ανήκει σε ένα σύνολο
  - $y \notin A$
- Ένα σύνολο καθορίζεται με δύο τρόπους.
  - Με αναγραφή των στοιχείων του
  - Με περιγραφή των στοιχείων του
- **καλώς ορισμένο**
  - με βεβαιότητα λέμε ότι το a είναι στοιχείο του συνόλου Φ

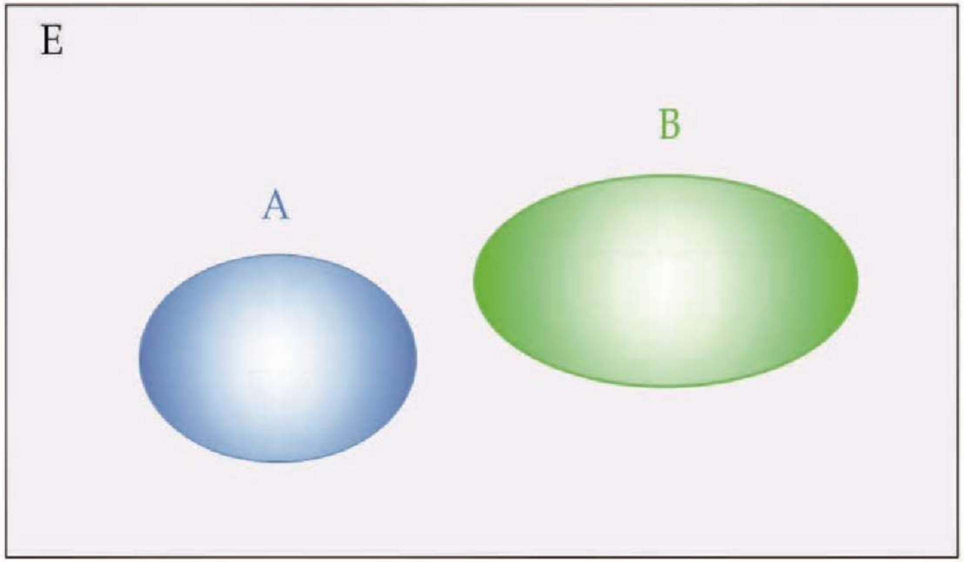
Σύνολα

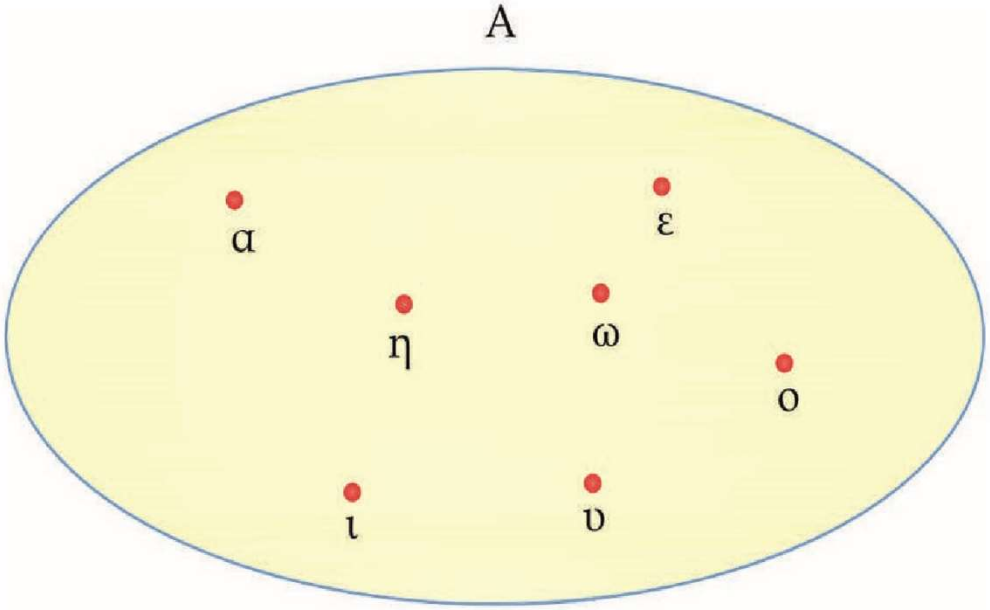
- σύνολα που δεν έχουν κανένα στοιχείο
  - το ονομάζουμε **κενό** και το παριστάνουμε συμβολικά με το σύμβολο $\varnothing$
- σύνολα που έχουν μεγάλη μαθηματική αξία
  - το σύνολο $N = \{1,2,3,....\}$ των φυσικών αριθμών
  - το σύνολο $\mathbb{Z} = \{...., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ακεραίων αριθμών
  - το σύνολο $\mathbb{Q} = \{x \mid x=a/b$, όπου $a, b \in Z$ και $b \neq 0\}$ των ρητών αριθμών
  - το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
  - το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών

- Συμβολίζουμε επίσης με $\mathbb{N}o$ το σύνολο το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με το 0 και με $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ τα σύνολα των ακεραίων, των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών, αντίστοιχα, χωρίς το 0

Σύνολα

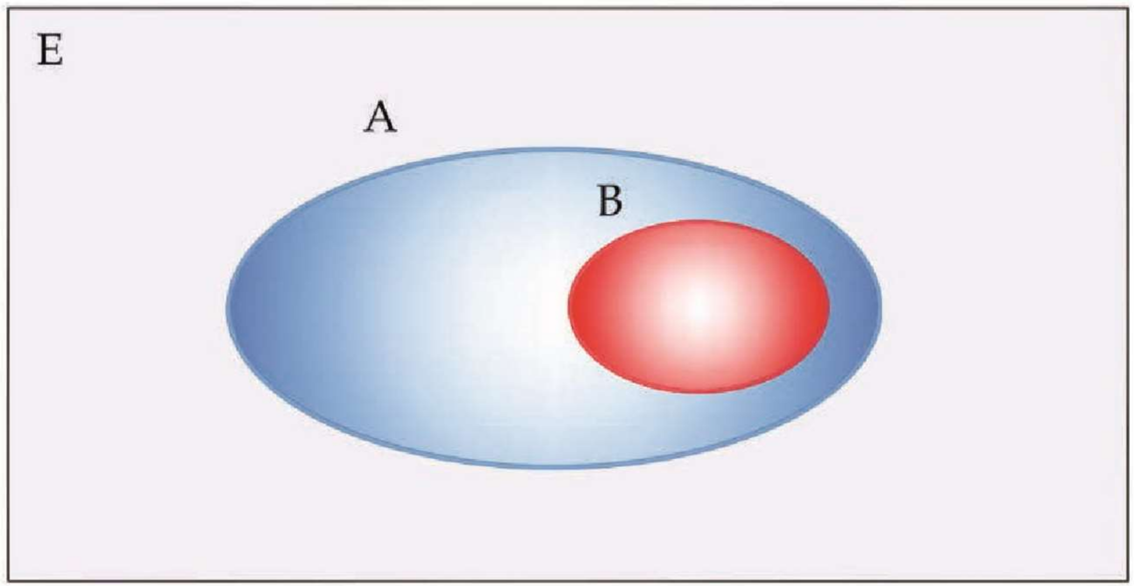
- γεωμετρικές ή γραφικές παραστάσεις
  - διαγράμματα Venn
    - το βασικό σύνολο Ε που περιέχει όλα τα αντικείμενα που εξετάζονται





Σύνολα

- Ένα σύνολο Β θα λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Α, αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α
  - $B \subseteq A$ *ή* $A \supseteq B$



- Ένα σύνολο Β θα λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** ενός συνόλου Α, αν υπάρχει έστω και ένα στοιχείο του Α που να μην περιέχεται στο Β
  - $B \subset A$

Σύνολα

- ***Δυναμοσύνολο*** ενός συνόλου E είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του
- Δύο σύνολα ονομάζονται **ίσα** αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία
  - $A \subseteq A$ (ανακλαστική)
  - αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$ (αντισυμμετρική)
  - αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική)
  - $A = A$ (ανακλαστική)
  - αν $A = B$ τότε $B = A$ (συμμετρική)
  - αν $A\ B=$ και $B = \Gamma$, τότε $A = \Gamma$ (μεταβατική)

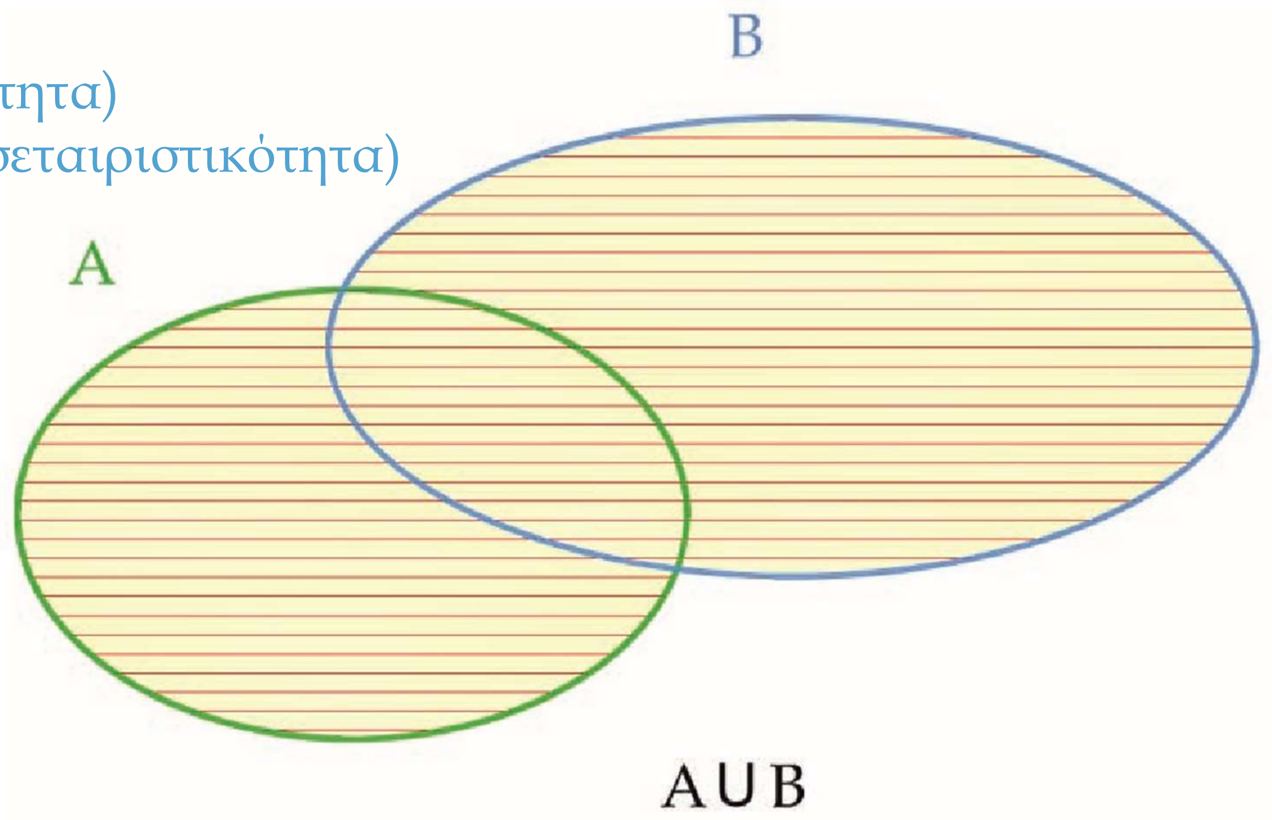
Σύνολα

- ***Δυναμοσύνολο*** ενός συνόλου E είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του
- Δύο σύνολα ονομάζονται **ίσα** αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία
  - $A \subseteq A$ (ανακλαστική)
  - αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$ (αντισυμμετρική)
  - αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική)
  - $A = A$ (ανακλαστική)
  - αν $A = B$ τότε $B = A$ (συμμετρική)
  - αν A B= και $B = \Gamma$, τότε $A = \Gamma$ (μεταβατική)

Σύνολα

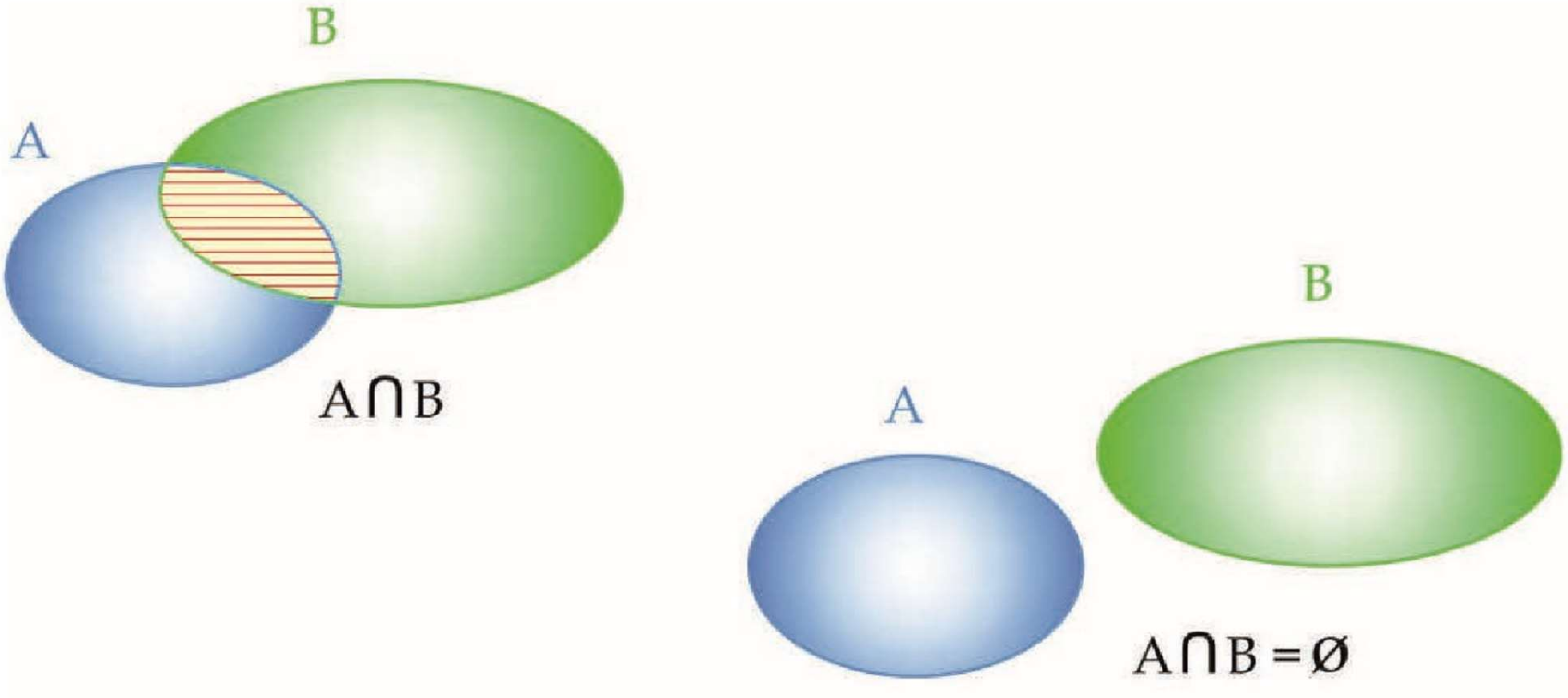
- **Πράξεις επί των Συνόλων**
  - Έστω Ε ένα βασικό σύνολο διάφορο από το κενό και A , B δύο υποσύνολά του
- η **ένωση** των A και B , συμβολικά $A \cup B$, η οποία ορίζεται ως το σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τα δύο σύνολα A ή B
  - $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ή $x \in B\}$

$A \cup A = A$
$A \cup B = B \cup A$ (αντιμεταθετικότητα)
$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ (προσεταιριστικότητα)
$A \cup \emptyset = A$
$A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$
αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$
αν $A \subseteq B$, τότε $A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$



Σύνολα

- **Πράξεις επί των Συνόλων**
  - Έστω Ε ένα βασικό σύνολο διάφορο από το κενό και A , B δύο υποσύνολά του
- η **τομή** των A και B , συμβολικά $A \cap B$, η οποία ορίζεται ως το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των A και B
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$
  - Αν $A \cap B = \varnothing$, τότε τα σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους



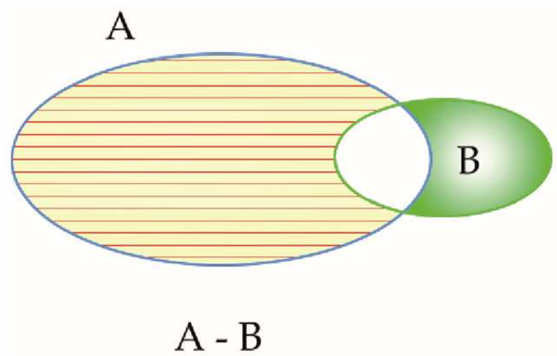
Σύνολα

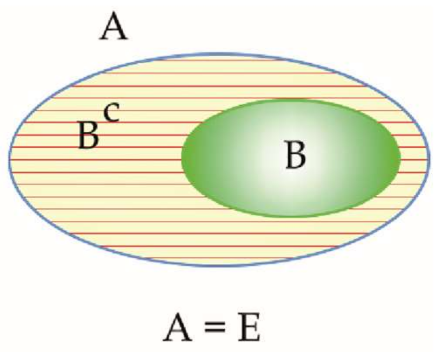
- **Ιδιότητες της τομής**
  - $A \cap A = A$
  - $A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετικότητα)
  - $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ (προσεταιριστικότητα)
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$
  - $A \cap E = A$
  - $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
  - αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$
  - αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$
- *Η ένωση είναι επιμεριστική ως προς την τομή και δυϊκά η τομή είναι επιμεριστική ως προς την ένωση*

$$\mathbf{A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)}$$
$$\mathbf{A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)}$$

Σύνολα

- η **διαφορά** του συνόλου B από το σύνολο A , συμβολικά $A - B$, η οποία ορίζεται ως το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B
  - $A - B = \{x \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$
- αν το B είναι υποσύνολο του A , τότε το σύνολο $A - B$ λέγεται **συμπλήρωμα του B ως προς το A** και συμβολίζεται B^c ή B'





Σύνολα

- Τύποι (ή Νόμοι) του De Morgan
  - Αν Ε είναι το βασικό μας σύνολο και τα Α και Β είναι υποσύνολα του Ε

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Σύνολα

- Καρτεσιανό Γινόμενο
- Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα Α και Β. Το καρτεσιανό γινόμενο είναι ένα νέο σύνολο που να έχει ως στοιχεία το σύνολο όλων των **διατεταγμένων ζευγών** τα οποία έχουν ως πρώτο στοιχείο ένα στοιχείο από το σύνολο Α και ως δεύτερο στοιχείο ένα στοιχείο από το Β
  - $A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A , y \in B \}$

- Κάθε υποσύνολο S του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$ ονομάζεται **διμελής σχέση** από το A στο B.

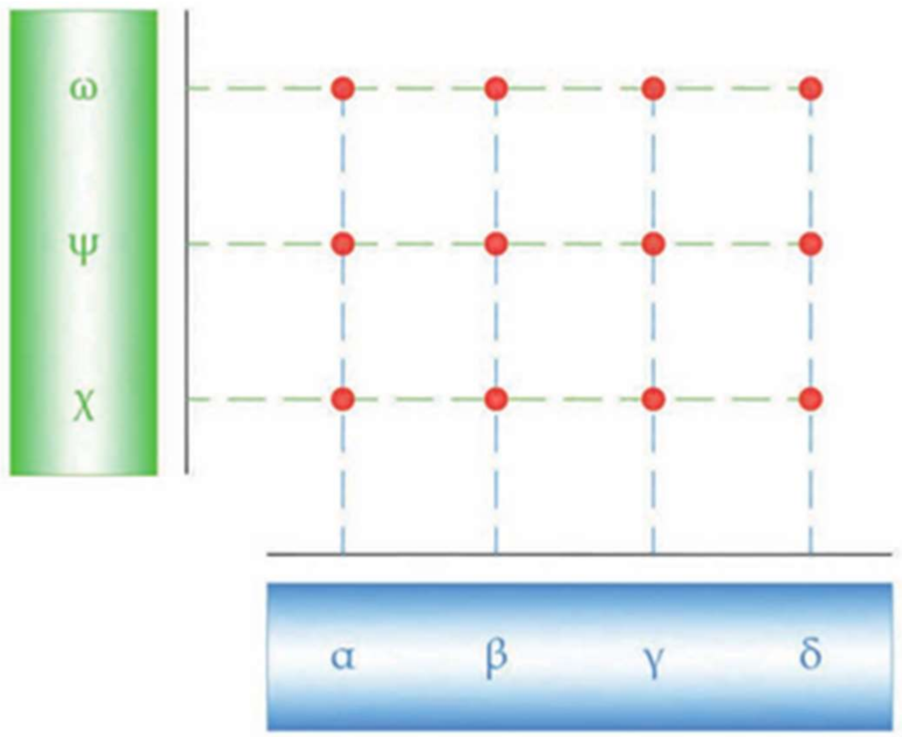
Σύνολα

- Γραφική παράσταση καρτεσιανού Γινομένου
  - πίνακας διπλής εισόδου
    - Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύνολο Α={α, β, γ, δ} και το σύνολο Β={χ, ψ, ω}

Α\Β	χ	ψ	ω
α	(α,χ)	(α,ψ)	(α,ω)
β	(β,χ)	(β,ψ)	(β,ω)
γ	(γ,χ)	(γ,ψ)	(γ,ω)
δ	(δ,χ)	(δ,ψ)	(δ,ω)

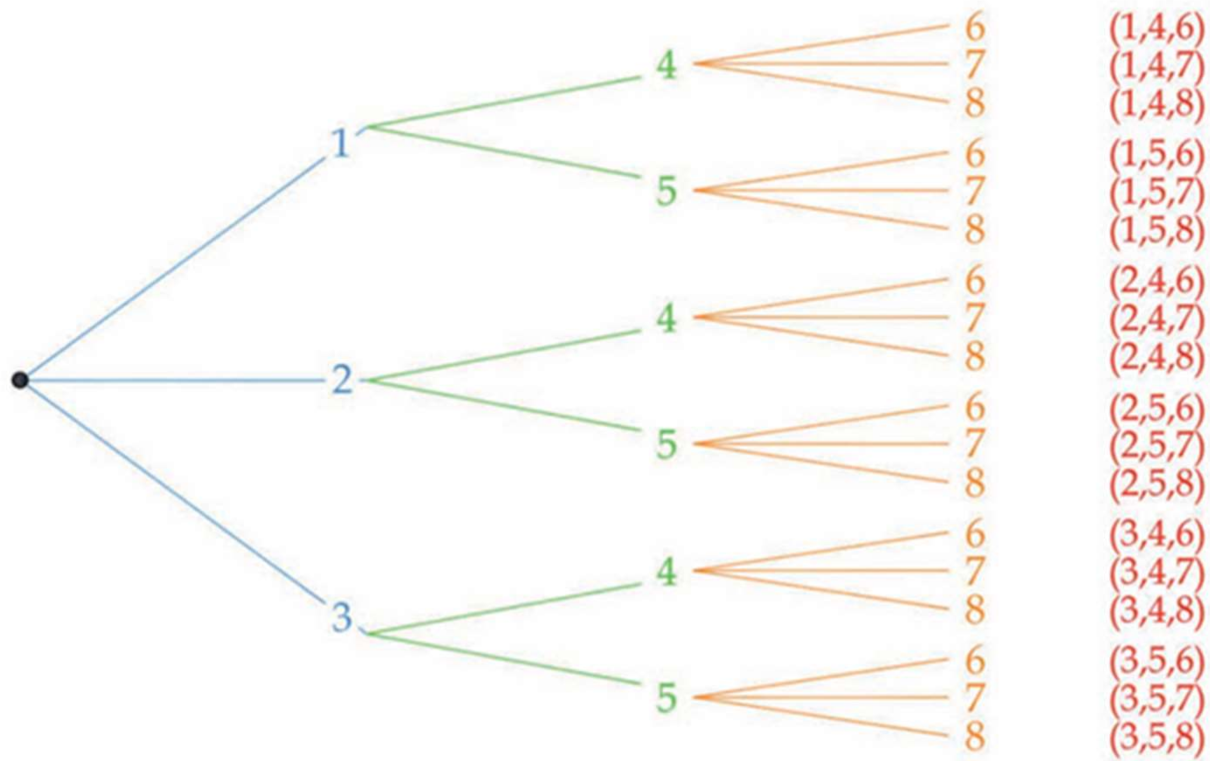
Σύνολα

- Γραφική παράσταση καρτεσιανού Γινομένου
  - καρτεσιανό διάγραμμα
    - Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύνολο Α={α, β, γ, δ} και το σύνολο Β={χ, ψ, ω}



Σύνολα

- Γραφική παράσταση καρτεσιανού Γινομένου
  - Δενδροειδές διάγραμμα (δένδρο)
    - Ας θεωρήσουμε τα σύνολα Α={1, 2, 3}, Β={4, 5} και Γ={6, 7, 8}



Σύνολα

- Γραφική παράσταση καρτεσιανού Γινομένου
  - όταν τα A και B ταυτίζονται με το σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών
    - **καρτεσιανό επίπεδο**
    - **άξονας των τετμημένων**
    - **άξονας των τεταγμένων**
    - **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων**