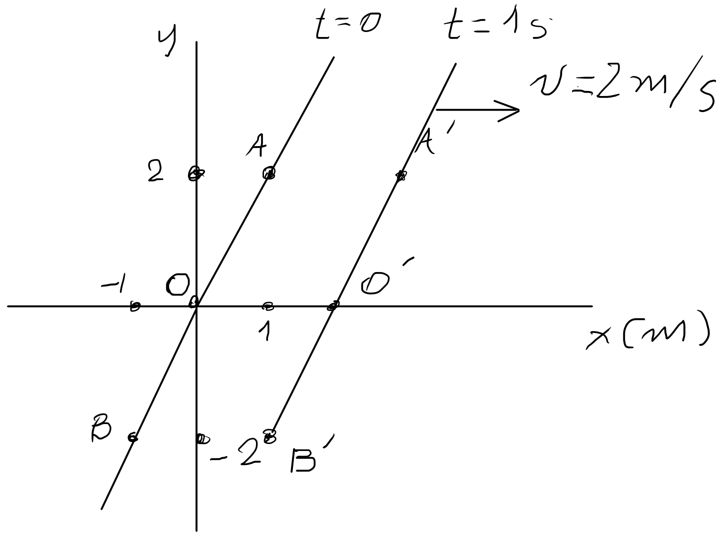
Κύματα

Έχω μια ευθεία $y=2x$ και θέλω να κινείται με ταχύτητα $2m/s$ προς την $+x$ διεύθυνση



Δηλ. θέλω για $t=1s$

το σημείο $O(0,0) \longrightarrow O'(0,2)$

το $A(1,2) \longrightarrow A'(3,2)$

το $B(-1,-2) \rightarrow B'(1,-2)$

Αυτό το πετυχαίνω αντικαθιστώντας το x με $x-2t$

Δηλαδή η $y=2(x-2t)$ κινείται προς την $+x$ διεύθυνση με ταχύτητα $2\,m/s$

για $t=0s$ $\quad y=2x$

$t=1s$ $\quad y=2(x-2)$

$t=2s$ $\quad y=2(x-4)$ κ.ο.κ.

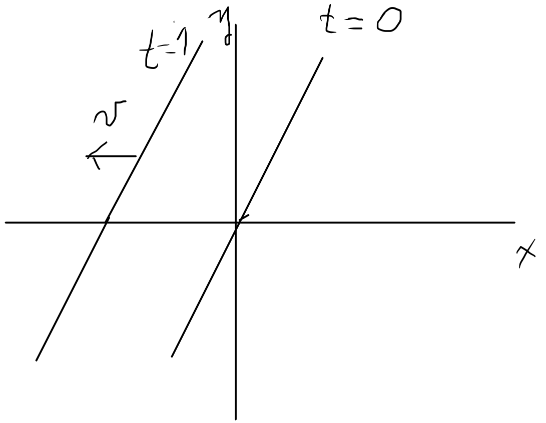
Αντίστοιχα αν θέλουμε η $y=2x$ να κινείται προς την $-x$ διεύθυνση με ταχύτητα $2m/s$ αντικαθιστούμε το x με $x+2t$

δηλαδή η $y=2(x+2t)$ είναι:

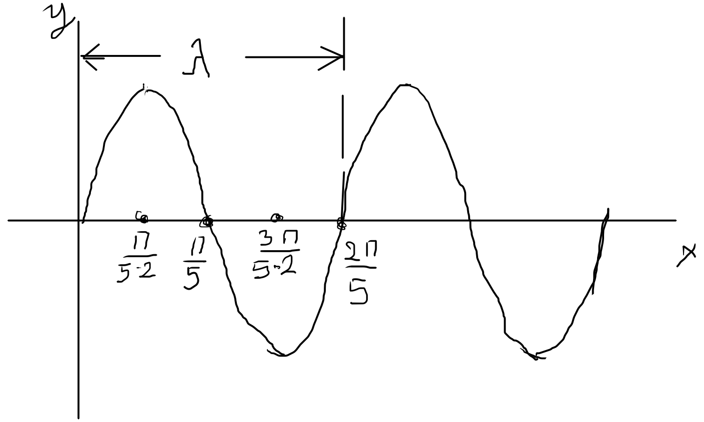
$t=0s \quad y=2x$

$t=1s \quad y=2(x+2)$

$t=2s \quad y=2(x+4)$ κ.ο.κ.



Αν πάρουμε ένα φυσικό μέγεθος με μορφή $y=2ημ(5x)$



Το μήκος κύματος είναι το $λ=\frac{2π}{5}$

Αν θέλουμε το φυσικό μέγεθος να κινείται με ταχύτητα $2m/s$ προς το $+x$ θα αντικαταστήσουμε το x με $x-2t$

Δηλ το y θα γίνει

$$y=2ημ(5(x-2t))$$

αν θέλουμε να κινείται προς την $-x$ κατεύθυνση το $y=2ημ(5(x+2t))$

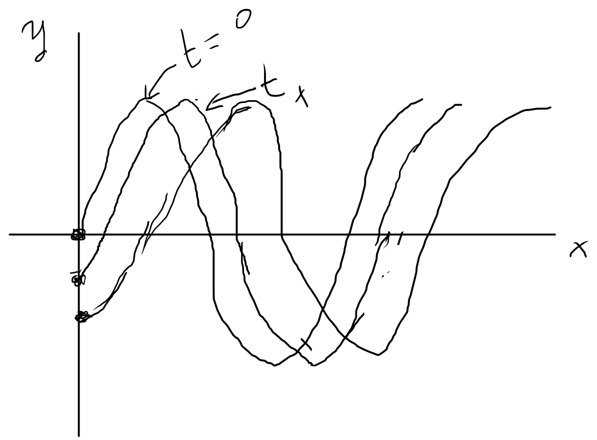
Γενικά αν $y = A\eta\mu[k(x-\upsilon t)]$ τότε το μήκος κύματος είναι

το $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Το k ονομάζεται κυματαριθμός

Επειδή το $A\eta\mu[k(x-\upsilon t)] = A\eta\mu[kx - k\upsilon t] = A\eta\mu(kx - \omega t)$

έχουμε ότι $k\upsilon = \omega$ δηλ. $\upsilon = \frac{\omega}{k}$

Για ένα συγκεκριμένο x (π.χ. για $x=0$) το y παίρνει τιμές που μεταβάλλονται χρονικά ως εξής: $y = A\eta\mu[k\cdot 0 - \omega t] = A\eta\mu(-\omega t) = -A\eta\mu(\omega t)$



Το y κάνει μια ταλάντωση με περίοδο $t = T$ όπου $\omega T = 2\pi$ δηλ.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ κι $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rad/s)

$f = \frac{1}{T}$ (s^{-1}, Hz)

Επομένως προκύπτει ότι $\lambda \cdot f = \upsilon$ γιατί $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$ άρα

$$\left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k}$$ που είναι το υ (η ταχύτητα μετάδοσης)

Το φυσικό μέγεθος $y = A\eta\mu(kx - \omega t)$ είναι ένα κύμα που ταξιδεύει με ταχύτητα υ προς το $+x$. Είναι ένα "οδεύον" κύμα.

Αν έχουμε ένα κύμα $y_1 = A\eta\mu(k(x - \upsilon t))$ που πηγαίνει προς το $+x$ και ένα κύμα $y_2 = A\eta\mu(k(x + \upsilon t))$ που πηγαίνει προς το $-x$

Το $y = y_1 + y_2 = A\left[\eta\mu[k(x - \upsilon t)] + \eta\mu[k(x + \upsilon t)]\right] =$

$$= A\left[\eta\mu(kx - \omega t) + \eta\mu(kx + \omega t)\right] =$$

$$= 2A \cdot \eta\mu(kx) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$ το οποίο παύει πια να είναι κύμα που ταξιδεύει γιατί δεν έχει όρισμα $x \pm \upsilon t$

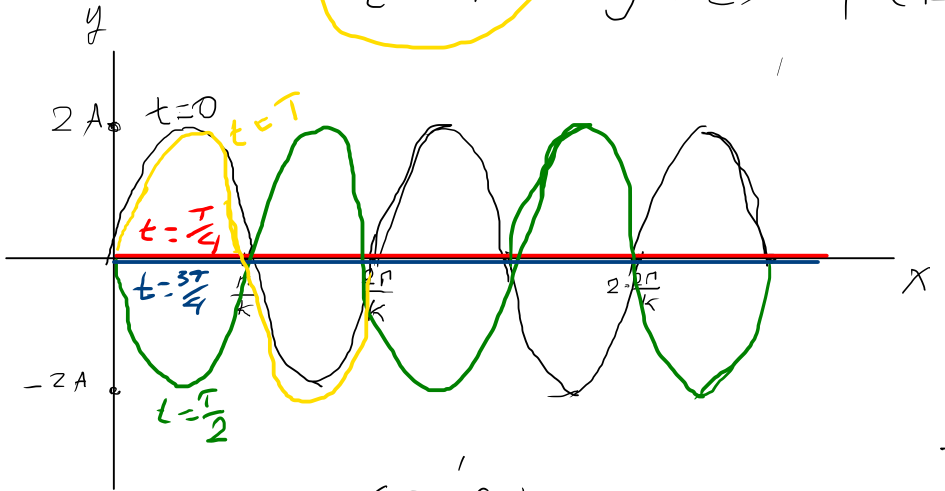
Αν το δούμε για $t=0$ θα έχουμε $y = 2A\eta\mu(kx)\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot 0) = 2A\eta\mu kx \cdot 1$

$\boxed{t = \frac{T}{4}}$ $\quad y = 2A\eta\mu(kx)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = 2A\eta\mu kx\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) =$
$= 0$

$\boxed{t = \frac{T}{2}}$ $\quad y = 2A\,\eta\mu(kx)\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) = 2A\eta\mu(kx)\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi) = -2A\eta\mu(kx)$

$\boxed{t = \frac{3T}{4}}$ $\quad y = 2A\,\eta\mu(kx)\cdot 0 = 0$

$\boxed{t = T}$ $\quad y = 2A\eta\mu(kx)\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}T\right) = 2A\,\eta\mu(kx)$

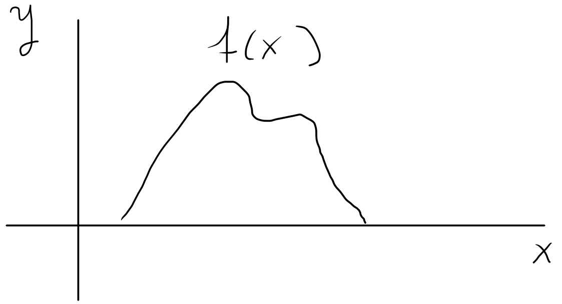


στάσιμο

Παρατηρούμε ότι τα σημεία με $x = \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \ldots, \frac{n\pi}{k}, \ldots$ δεν φεύγουν ποτέ από το 0 και λέγονται <u>κόμβοι</u>

Το σώμα που δεν κινείται λέγεται

Αυτά που είπαμε για την ευθεία και για το ημίτονο μπορούμε να τα γενικεύσουμε για κάθε συνάρτηση που συμπεριφέρεται ομαλά.



Η $f(x)$ μπορεί να ταξιδέψει με ταχύτητα v προς την $+x$ κατεύθυνση αν αντικαταστήσω το x με $x-vt$ και προς την $-x$ κατεύθυνση αν αντικαταστήσω το x με $x+vt$

Θα αποδείξουμε ότι η $f(x-vt)$ (ή η $f(x+vt)$) ικανοποιεί μια εξίσωση που ονομάζεται κυματική εξίσωση

Είναι προφανές ότι η $f(x-vt)$ είναι συνάρτηση και του x και του t άρα θα χρησιμοποιώ μερικές παραγώγους, δηλ. θα παίρνω την παράγωγο ως προς την μία μεταβλητή θεωρώντας την άλλη σταθερή.

Έτσι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x-vt)$ θέτω $x-vt=\xi$ και κάνω παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \xi}\cdot 1$ $\left(\dfrac{\partial (x-vt)}{\partial x} = 1\right)$

Βρήκα $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$ αφού $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$

κ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\cdot 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

δηλ. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,\frac{\partial (x-vt)}{\partial t} = (-v)\frac{\partial f}{\partial \xi}$$ και

κ $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[-v\frac{\partial f}{\partial \xi}\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[-v\frac{\partial f}{\partial \xi}\right]\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[-v\frac{\partial f}{\partial \xi}\right](-v) =$$

$$= v^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$ δηλ. κ $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \iff$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

Παράδειγμα: Παίρνω την $f(x) = 6x^2$, $f(x-vt) = 6(\underbrace{x-vt}_{\xi})^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}(6\xi^2)\frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = 12\xi \cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}(12\xi)\frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = 12 \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}(6\xi^2)\frac{\partial \xi}{\partial t} = 12\xi(-v) = 12 \cdot (x-vt) \cdot (-v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(12\xi(-v)\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} = 12(-v)(-v) = 12v^2$$

άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12$ $\quad \frac{\partial f^2}{\partial t^2} = 12v^2$ τό $12 - \frac{1}{v^2} \cdot 12v^2 = 0$ δηλ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Θα πάρω τις εξισώσεις Maxwell στον κενό χώρο. Δηλ. σε χώρο χωρίς ηλεκτρικά φορτία – ρεύματα και χωρίς υλικά (δηλ. η διηλεκτρική σταθερά είναι ε_0 και η μαγν. διαπερατότητα είναι μ_0)

Νόμος Gauss: $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ (γιατί δεν υπάρχει φορτίο στον όγκο που περικλείει η επιφάνεια)

S (κλειστή επιφάνεια

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Νόμος Ampere: $\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ ← ροή του ηλ. πεδίου μέσα από την επιφάνεια S'

C' κλειστή καμπύλη που περικλείει μια ανοικτή επιφάνεια S'

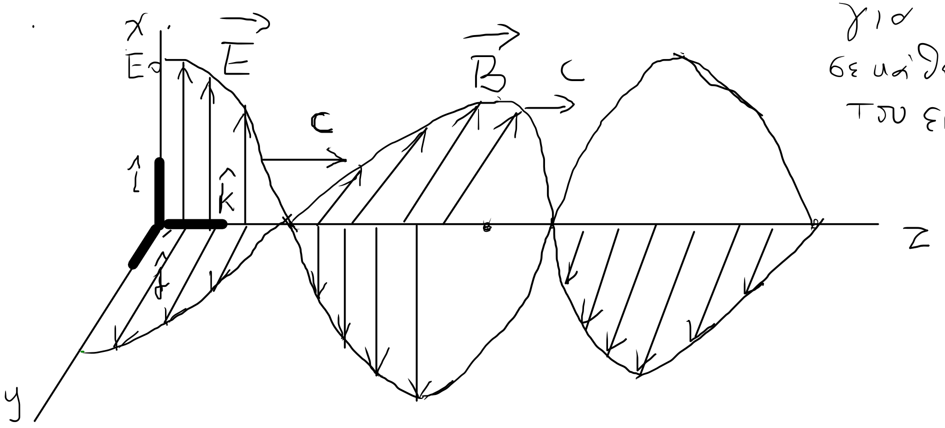
Νόμος Faraday: $\oint_{C''} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ ← ροή του μαγν. πεδίου μέσα από την επιφάνεια S'' που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C''

Θα πάρω ένα ηλεκτρικό κύμα: $\vec{E} = E_0 \hat{i} \cos k(z - \frac{\omega}{k} t) = E_0 \hat{i} \cos(kz - \omega t)$

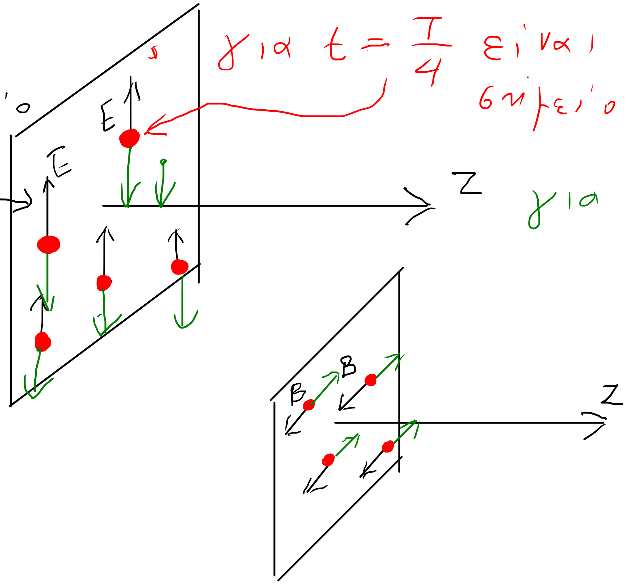
και ένα μαγνητικό κύμα: $\vec{B} = B_0 \hat{j} \cos(kz - \omega t)$ όπου και τα δύο κινούνται προς την $+z$ διεύθυνση με ταχύτητα c (δηλ $\frac{\omega}{k} = c$)

Θα δείξω ότι για να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell το $\vec{E}$ και το $\vec{B}$ θα πρέπει να ισχύει (α) $B_0 = \frac{E_0}{c}$, (β) $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Τα $\vec{B}$ και $\vec{E}$ είναι επίπεδα κύματα Δηλαδή το κάθετο επίπεδο στον z άξονα



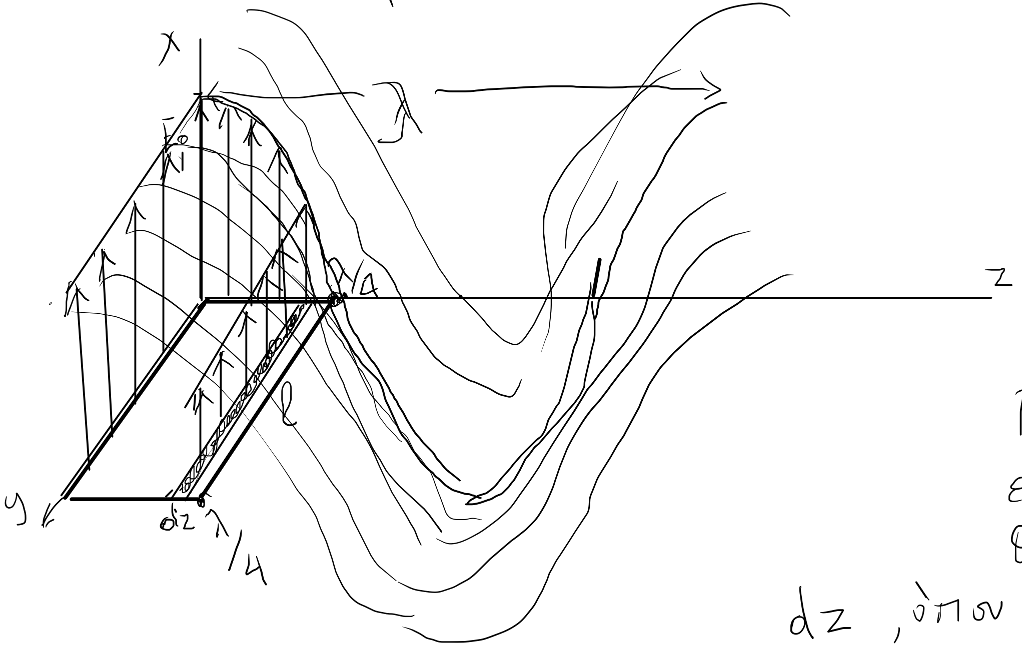
για $t = 0$ σε κάθε σημείο του επιπέδου



για $t = \frac{T}{4}$ είναι 0 σε κάθε σημείο του επιπέδου

για $T = \frac{T}{2}$

Θα εφαρμόσω τον Νόμο Ampere.. Διαλέγω καμπύλη C με διαστάσεις $\frac{\lambda}{4}$ κατά μήκος του z και l κατά μήκος του y δηλ. εμβαδόν $l\frac{\lambda}{4}$ και παίρνω το διάνυσμα $\vec{S}$ να έχει την $+x$ διεύθυν δηλ να είναι $\vec{S} = l\frac{\lambda}{4}\hat{i}$



Για να υπολογίσω το Φ_E στην επίπεδη επιφάνεια που περικλείει η καμπύλη C θα πρέπει να την χωρίσω σε λωρίδες πλάτους dz, όπου θεωρώ το Ηλ πεδίο σταθερό (όπως στην γραμμοσκιασμένη λωρίδα στο σχήμα) και να ολοκληρώσω

$d\Phi_E = l\,dz\,E_0\,\text{συν}(kz-\omega t)$ άρα $\Phi_E = \int_{z=0}^{\lambda/4} l\,E_0\,\text{συν}(kz-\omega t)\,dz$. Επειδή στον νόμο Ampere μπαίνει το $\frac{d\Phi_E}{dt}$ παίρνω την Παράγωγο του $\text{συν}(kz-\omega t)$ ως προς τον χρόνο που είναι $(-\omega)\,(-\text{ημ}(kz-\omega t)) = \omega\,\text{ημ}(kz-\omega t)$ άρα το $\frac{d\Phi_E}{dt}$ είναι

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = l E_0 \omega \int_0^{\lambda/4} \text{ημ}(kz-\omega t)\,dz$$

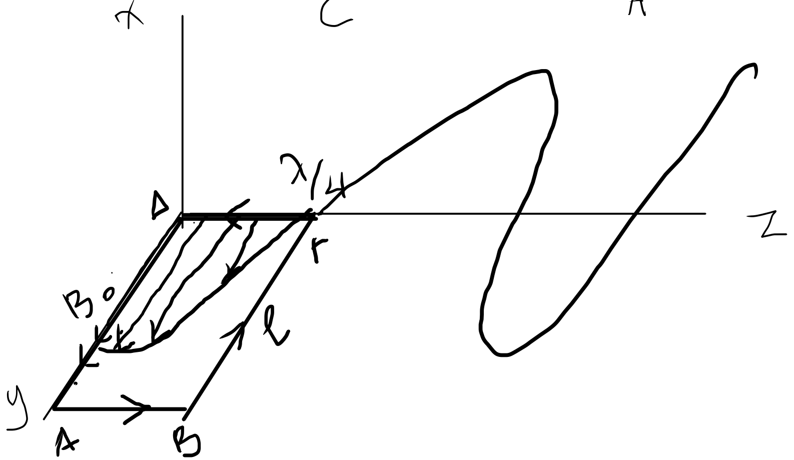
Αν πάρω το $\left.\frac{d\Phi_E}{dt}\right|_{t=0}$

Θα έχω $\left.\frac{d\Phi_E}{dt}\right|_{t=0} = \ell E_0 \omega \int_0^{\lambda/4} \eta\mu(kz)\,dz = \frac{\ell E_0 \omega}{k}\left(-\sigma\upsilon\nu(kz)\Big|_{z=0}^{\lambda/4}\right)$

$\sigma\upsilon\nu\, 0 = 1$, $\sigma\upsilon\nu\left(k\frac{\lambda}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ οπότε

οπότε $\left.\frac{d\Phi_E}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\ell E_0 \omega}{k} = \ell E_0 c$ ($c = \frac{\omega}{k}$ η ταχύτητα διάδοσης)

Θα βρώ το $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_B^\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_\Gamma^\Delta \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \int_\Delta^A \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$



στο τμήμα AB το $\vec{B}$ είναι κάθετο στο $d\vec{\ell}$
άρα $\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0$

στο τμήμα ΒΓ το $\vec{B} = 0$

στο τμήμα ΓΔ το $\vec{B}$ είναι κάθετο στο $d\vec{\ell}$
άρα $\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0$

στο τμήμα ΔΑ το $\int_\Delta^A B_0\, dy = B_0 \ell$ Επομένως

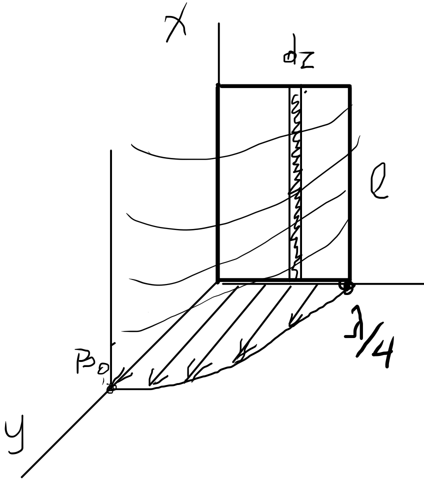
Το $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_o l$

Επομένως για να ισχύει $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}$ για $t=0$

πρέπει $B_o \cancel{l} = \varepsilon_o \mu_o \cancel{l} E_o c$ δηλ πρέπει

$$B_o = \varepsilon_o \mu_o E_o c$$

Θα εφαρμόσω τον νόμο του Faraday: $\oint_{C'} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ στο παραλληλόγραμμο με πλευρές $\lambda/4$ και l: Θα βρω την ροή $d\Phi_B$ σε μια λωρίδα πλάτους dz μέσα στην οποία το $\vec{B}$ είναι σταθερό.



Z

$$d\Phi_B = \underbrace{dz\, l\, \hat{j}}_{d\vec{s}} \cdot B_0 \hat{j}\, \text{συν}(kz-\omega t)$$
$$= B_0 l\, \text{συν}(kz-\omega t)\, dz$$

άρα η ροή του μ.π.

$$\Phi_B = \int_{z=0}^{z=\lambda/4} B_0 l\, \text{συν}(kz-\omega t)\, dz$$

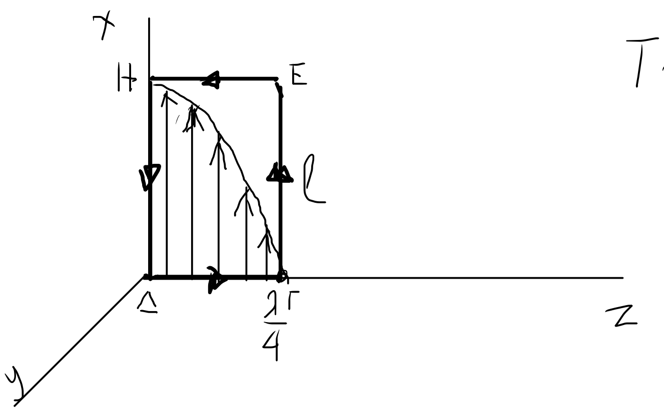
το $\displaystyle\int_0^{\lambda/4} \text{συν}(kz-\omega t)\, dz = \frac{1}{k}\, \text{ημ}(kz-\omega t)\Big|_0^{\lambda/4} =$

$$= \frac{1}{k}\left[\text{ημ}\left(k\frac{\lambda}{4}-\omega t\right) - \text{ημ}(k\cdot 0-\omega t)\right] =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\text{ημ}\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\lambda}}\cdot\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{4}\,2}-\omega t\right) + \text{ημ}(\omega t)\right] = \frac{1}{k}\left[\text{συν}(\omega t) + \text{ημ}(\omega t)\right]$$ και επομένως

$$\Phi_B = \frac{B_0 l}{k}\left[\text{συν}(\omega t) + \text{ημ}(\omega t)\right]$$ άρα $$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{B_0 l}{k}\left[-\omega\, \text{ημ}(\omega t) + \omega\, \text{συν}(\omega t)\right]$$ άρα

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{B_0 l \omega}{k}\left[\text{ημ}(\omega t) - \text{συν}(\omega t)\right]$$



Το $\oint_{C'} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\Delta}^{\Gamma} \vec{E}\cdot d\ell + \int_{\Gamma}^{E} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_{E}^{H} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \int_{H}^{\Delta} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

στην κατεύθυνση $\Delta \to \Gamma$ το $\vec{E} \perp d\vec{\ell}$ (το $\vec{E} = E\hat{i}$ και το $d\vec{\ell} = dz\,\hat{k}$) άρα το $\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$

Ομοίως και για την κατεύθυνση $E \to H$

Το $\int_{\Gamma}^{E} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{x=0}^{\ell} E_0\hat{i}\,συν\left(k\frac{λ}{4} - ωt\right)dx\,\hat{i} = E_0\,συν\left(k\frac{λ}{4} - ωt\right)\int_0^{\ell} dx = E_0\,\ell\,συν\left(k\frac{λ}{4} - ωt\right)$

Το $\int_{H}^{\Delta} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_{x=\ell}^{0} E_0\hat{i}\,συν(k\cdot 0 - ωt)\,dx\,\hat{i} = E_0\,συν(-ωt)\int_{\ell}^{0} dx = E_0\,συν(-ωt)(-\ell)$

$= -\ell E_0\,συν(ωt)$. Επομένως το $\oint_{C'} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_0\ell\,\overbrace{συν\left(\frac{2π}{\cancel{λ}}\cdot\frac{\cancel{λ}}{\cancel{4}\,2} - ωt\right)}^{ημ(ωt)} - E_0\ell\,συν(ωt) =$

$= E_0\ell\left[ημ(ωt) - συν(ωt)\right]$

Για να συμφωνούν τα αποτελέσματα με τον νόμο Faraday

Πρέπει $B_0 l \frac{\omega}{k}[\eta\mu(\omega t) - \sigma\upsilon\nu(\omega t)] = E_0 l[\eta\mu(\omega t) - \sigma\upsilon\nu(\omega t)]$

για κάθε t, δηλ. πρέπει να ισχύει

$B_0 \cancel{l} \frac{\omega}{k} = E_0 \cancel{l}$ Το $\frac{\omega}{k} = c$ (ταχύτητα διάδοσης H/M κύματος)

άρα πρέπει $B_0 c = E_0$ δηλ. $\boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$

Έχουμε βρεί ότι για να ισχύει ο νόμος Ampere πρέπει $B_0 = \varepsilon_0 \mu_0 E_0 c$ άρα

πρέπει $\frac{\cancel{E_0}}{c} = \varepsilon_0 \mu_0 \cancel{E_0} c \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ δηλ. ότι $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Το $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$
$\mu_0 \simeq 1.257 \cdot 10^{-6}$ Το $\varepsilon_0 \mu_0 \simeq 11.129478 \cdot 10^{-18}$ Το $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \simeq 3.36087 \cdot 10^{-9}$ και

Το $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 0.299792 \cdot 10^9 \; m/s \simeq 0.3 \cdot 10^9 \; m/s$ δηλ.

30cm σε 1 ns

ή 3 m σε 10 ns

30 m σε 0.1 μs

300 m σε 1 μs

300000 m 300km σε 1 ms

300000 km σε 1 s

Από την σχέση $\lambda f = c$ δηλ. $\lambda = \frac{c}{f}$ μπορούμε να βρούμε το μήκος κύματος των Η/Μ κυμάτων στον κενό χώρο

f(Hz)	λ	
1000 (1 kHz)	300 km	Ραδιοκύματα
10^5 (100 kHz)	3 km	
10^6 (1 MHz)	300 m	
10^8 (100 MHz)	3 m	← FM ραδιόφωνο, τηλεόραση στα 300MHz
10^9 (1 GHz)	30 cm	κινητά, Wifi 5G 800MHz, 2.4GHz 5GHz 2.4 GHz 5GHz
10^{10} (10 GHz)	3 cm	

Δορυφορικές επικοινωνίες 3GHz — 30GHz

10cm — 1cm

f: $3 \cdot 10^{11}$ (300GHz) ως $430 \cdot 10^{12}$ (430 THz) } Υπέρυθρη ακτινοβολία
λ: 1mm ~ 700 nm

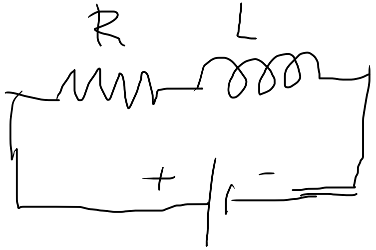
Το οπτικό φάσμα είναι από 700nm ως 380nm (790 THz)

Ενέργεια που μεταφέρεται από τα επίπεδα Η/Μ κύματα

Την πυκνότητα ενέργειας του ηλ. πεδίου την υπολογίσαμε βρίσκοντας το έργο που πρέπει να καταβάλλουμε για να «γεμίσουμε» έναν όγκο με ηλ. πεδίο (απομακρύνοντας μεταξύ τους τους οπλισμούς του πυκνωτή)

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \ \mathrm{J/m^3}$$

Την πυκνότητα ενέργειας του Μ.Π. την υπολογίσαμε στο αντικαθιστώντας την μπαταρία με βραχυκύκλωμα και υπολογίζοντας πόση θερμότητα δημιουργείται στην αντίσταση.



$$u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Επειδή στα επίπεδα Η/Μ κύματα κάθε χρονική στιγμή t

το $B = \frac{E}{c}$

η $U_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{(E/c)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\cancel{\mu_0}\frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{\mu_0}}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Δηλαδή η πυκνότητα ενέργειας του οδεύοντος κύματος Μαγν. πεδίο είναι ίση με αυτή του οδεύοντος κύματος Ηλ. πεδίο !!!

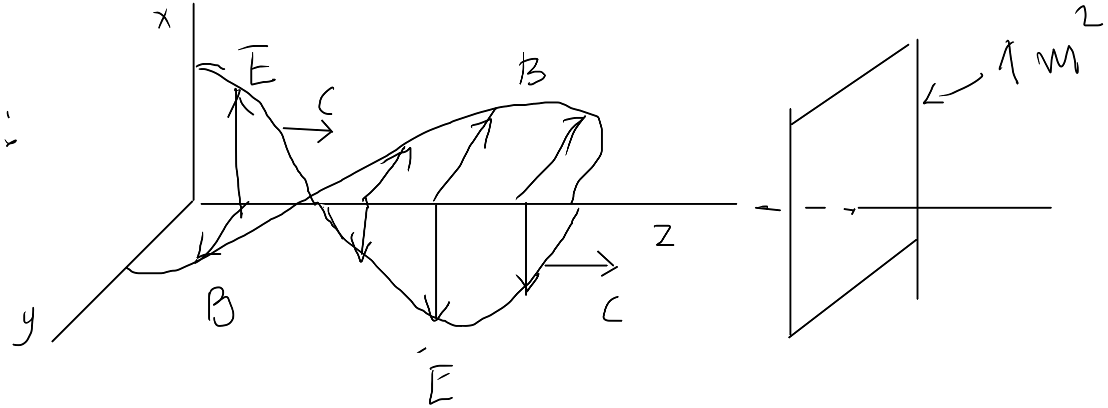
Επομένως η συνολική πυκνότητα ενέργειας $U_E + U_M = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 =$

$= \varepsilon_0 E^2 \ (J/m^3)$

$= \varepsilon_0 E B c$

Προκύπτει το ερώτημα:
Πόση ενέργεια πέφτει επάνω σε μία επιφάνεια εμβαδού $1 m^2$ και κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης του Η-Μ κύματος σε 1 δευτερόλεπτο

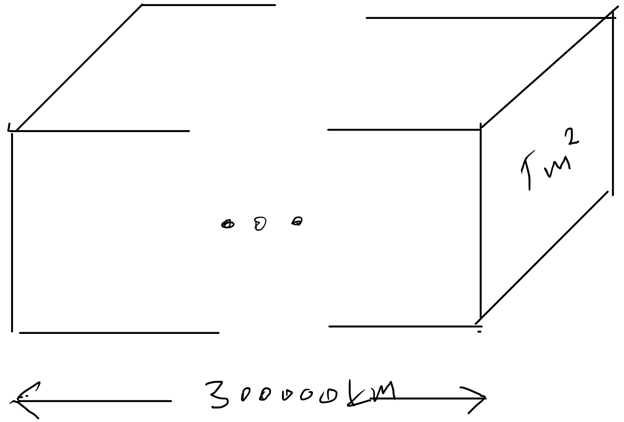
Δηλ:



Πόση ενέργεια πέφτει στην επιφάνεια 1 m² σε 1 s

$$\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{s}$$

Σε 1 s το Η/Μ καλύπτει απόσταση 300000 km επομένως όλη η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον όγκο $1 m^2 \cdot c\, m$ περνάει από την επιφάνεια



Δηλ η $\frac{\text{Ενέργεια}}{m^2 \cdot s} = \varepsilon_0 E^2 \cdot \text{όγκος} =$

$$\varepsilon_0 E^2 c =$$

$$\varepsilon_0 E \cdot B \cdot c \cdot c = \varepsilon_0 E B c^2 =$$

$$\left[\frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2} \right]$$

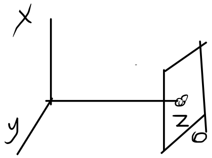
$$= \varepsilon_0 E B \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}$$

Αυτή η $\frac{\text{Ενέργεια}}{m^2 \cdot s}$ γράφεται σαν διάνυσμα ως εξής:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$$ και ονομάζεται διάνυσμα Poynting.

Βλέπουμε ότι το $\vec{E}\times\vec{B}$ έχει μέτρο EB αφού τα $\vec{E}$, $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Επίσης έχει φορά προς το επίπεδο που είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης τους

Επειδή τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ πάνω στο επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση μετάδοσης ταλαντώνονται με κυκλ. συχνότητα ω



$$\vec{E} = E_0 \hat{i}\,\text{συν}(kz_0-\omega t)$$
$$\vec{B} = B_0 \hat{j}\,\text{συν}(kz_0-\omega t)$$

Το S θα έχει μέτρο $\frac{E_0B_0}{\mu_0}\text{συν}^2(kz_0-\omega t)$

Αν πάρουμε την μέση τιμή του S για μια περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle S\rangle = \frac{E_0B_0}{\mu_0}\cdot\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\text{συν}^2(kz_0-\omega t)\,dt = \frac{E_0B_0}{\mu_0}\cdot\frac{1}{2}$$ δηλ. $$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\left[\frac{W}{m^2}\right]$$