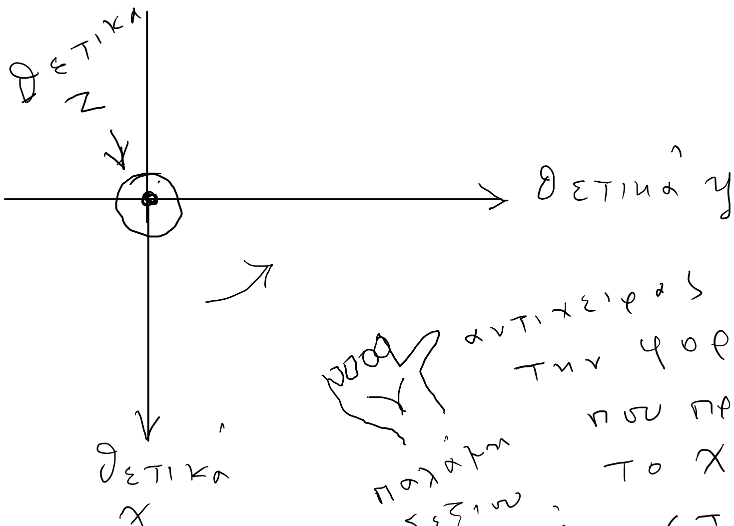
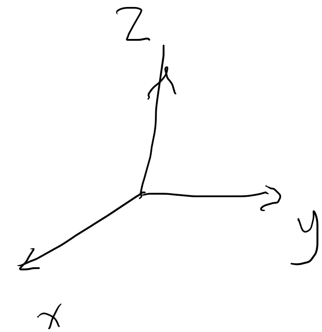
Συστήματα συντεταγμένων

Θα χρησιμοποιούμε συστήματα συντεταγμένων στον 3-διάστατο χώρο που η φορά των θετικών ημιαξόνων καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού

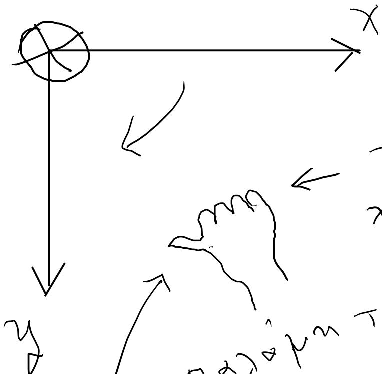




αντιχείρας δείχνει την φορά περιστροφής που πρέπει να πάρει το x για να πέσει στο y

παλάμη δεξιού χεριού προς τα έξω

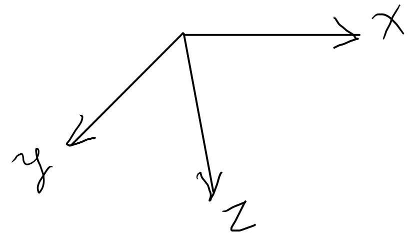
Λυγίζουμε κάθετα τα υπόλοιπα δάκτυλα και δείχνουν έξω προς τα εμάς. Αυτή είναι η φορά του θετικού z



Τα δάχτυλα
λυγισμένα δείχνουν
προς τα μέσα

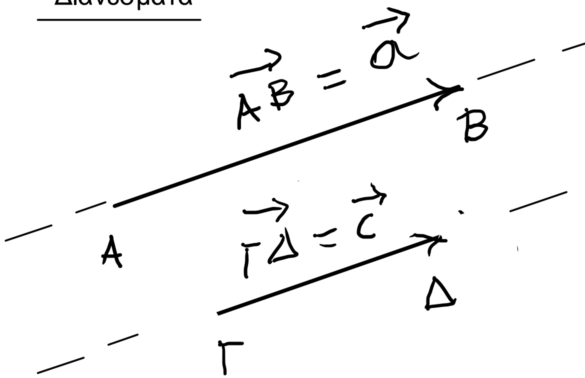
παλάμη του
δεξιού χεριού
προς τα μέσα

αυτή είναι
η φορά του Z
θετικού
ημιάξονα



ο αντίχειρας
δείχνει την φορά που
πρέπει να πάρει ο θετικός x
για να πέσει στον θετικό y

Διανύσματα



Το διάνυσμα είναι ένα μέγεθος που έχει διεύθυνση (την διεύθυνση της ευθείας AB) έχει φορά (από το A προς το B) και μέτρο. Το συμβολίζουμε $\vec{AB}$ ή αλλά $\vec{a}$.

Το διάνυσμα $\vec{ΓΔ} = \vec{c}$ έχει ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{a}$ αλλά μικρότερο μέτρο.

Το μέτρο ενός διανύσματος το συμβολίζουμε $|\vec{AB}| = |\vec{a}| = a$

Βαθμωτά μεγέθη

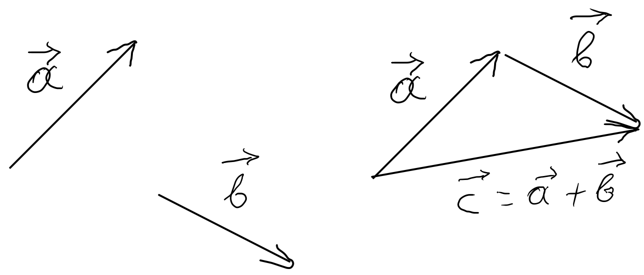
βαθμωτό είναι ένα μέγεθος που δεν έχει διεύθυνση και φορά αλλά μπορεί να παρασταθεί με έναν αριθμό θετικό ή αρνητικό. Το βαθμωτό μέγεθος m έχει απόλυτη τιμή

$$|m| = \begin{cases} m & \text{αν } m \geq 0 \\ -m & \text{αν } m < 0 \end{cases}$$

Το μέτρο ενός διανύσματος είναι και αυτό θετικός αριθμός ή 0.

Πράξεις ανάμεσα σε διανυσματα και ανάμεσα σε διανύσματα και βαθμωτά μεγέθη

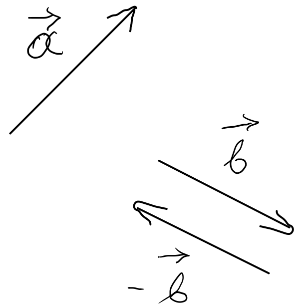
Πρόσθεση διανυσμάτων

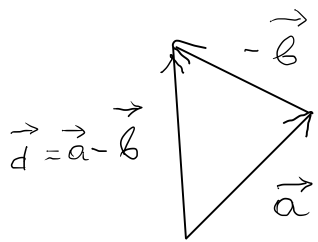


Παίρνω το $\vec{b}$ και βάζω την αρχή του στο τέλος του $\vec{a}$. Το διάνυσμα $\vec{c}$ με αρχή την αρχή του $\vec{a}$ και τέλος το τέλος του $\vec{b}$ είναι το $\vec{a}+\vec{b}$

Αφαίρεση διανυσμάτων

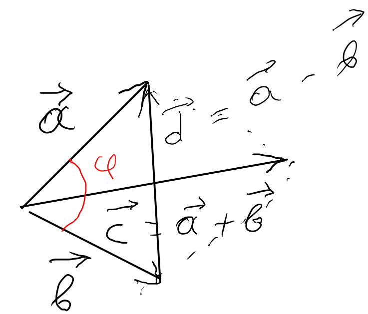
Προσθέτω στο $\vec{a}$ το $-\vec{b}$





Το διάνυσμα με ίδιο μέτρο και διεύθυνση με το $\vec{b}$, αλλά με αντίθετη φορά είναι το $-\vec{b}$

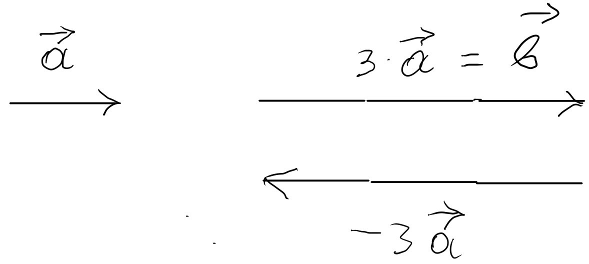
Κανόνας παραλληλογράμμου



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\,συνφ}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,συνφ}$$

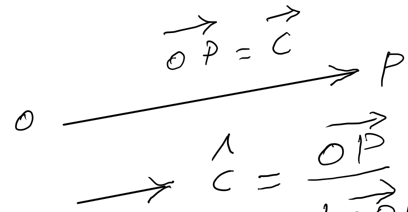
Πολλαπλασιασμός - διαίρεση διανύσματος με βαθμωτό μέγεθος



$$\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

Μοναδιαίο διάνυσμα:

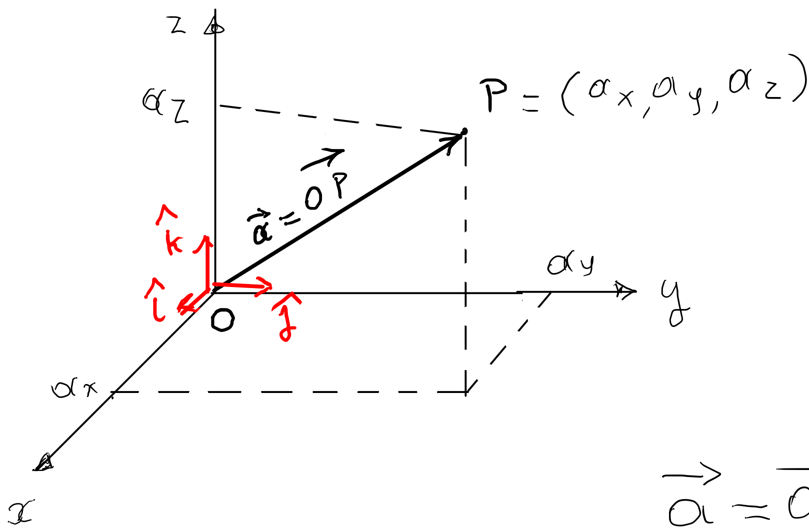
Το διάνυσμα με μέτρο 1



$$\hat{c} = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$$

$$|\hat{c}| = 1$$

Συνιστώσες ενός διανύσματος



$\hat{i}$: το μοναδιαίο διάνυσμα στον θετικό x ημιάξονα

$\hat{j}$: το μοναδιαίο διάνυσμα στον θετικό y ημιάξονα

$\hat{k}$: το μοναδιαίο διάνυσμα στον θετικό z ημιάξονα

$$\vec{a} = \vec{OP} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

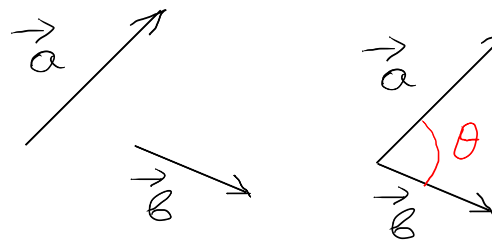
Αν $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ και $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

τότε $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda a_x \hat{i} + \lambda a_y \hat{j} + \lambda a_z \hat{k}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Το βαθμωτό μέγεθος $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{συν}\theta$

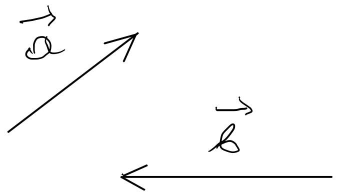
θ είναι η μικρότερη γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην φορά του $\vec{a}$ και του $\vec{b}$

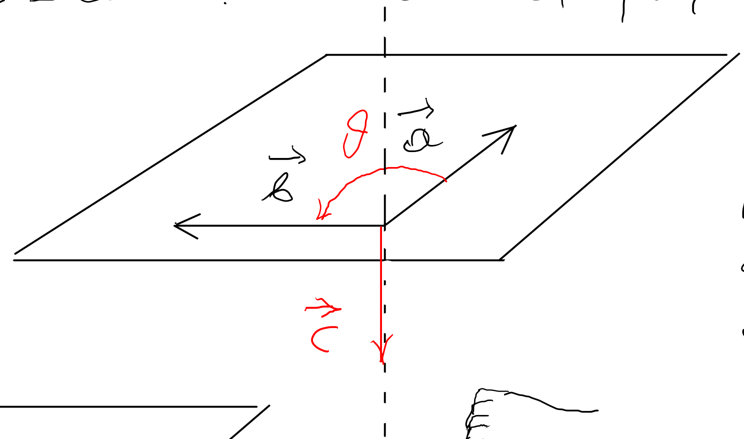
Αν $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$, $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

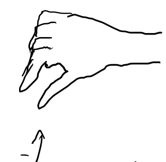
Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων :

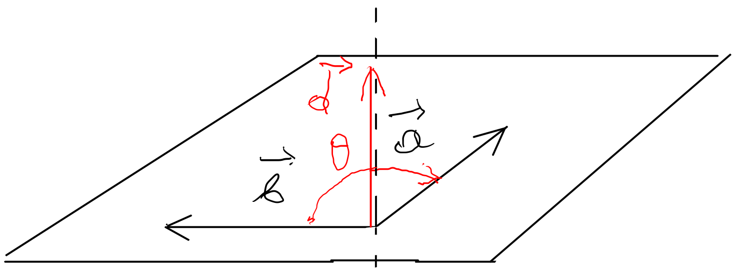
Το διάνυσμα $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Το $\vec{c}$ έχει μέτρο $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot ημθ$

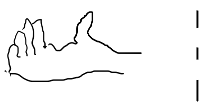




διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και φορά που την βρίσκουμε με τον κανόνα του δεξιού χεριού







ο αντίχειρας δείχνει την φορά που πρέπει να έχει το $\vec{a}$ για να πέσει στο $\vec{b}$ με την μικρότερη γωνία. Τα άλλα δάχτυλα λυγίζουν και δείχνουν την φορά του $\vec{c}$

$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

Αν $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$, $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

Τότε $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) -$

$\hat{j}(a_x b_z - b_x a_z) +$

$\hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$