Πρόβλημα 1 (1 μονάδα)
Ένα σημειακό φορτίο $Q1=+3\mu C$ τοποθετείται στην αρχή του άξονα x και ένα άλλο σημειακό φορτίο $Q2=-7\mu C$ τοποθετείται στο $x=0.4$ m. Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο $E(x)$ επάνω σε κάθε σημείο του άξονα των x.

Πρόβλημα 2 (1 μονάδα)
Σε κάθε κορυφή ενός τετραγώνου πλευράς α τοποθετείται φορτίο Q. Να βρεθούν:
(α) Η συνολική ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια.
(β) Το δυναμικό στο κέντρο του τετραγώνου

Πρόβλημα 3 (1 μονάδα)
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της χωρητικότητας, να βρείτε:
(α) Την χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή με οπλισμούς ομόκεντρους αγωγούς με ακτίνες $R1= 6$ cm και $R2 = 9$ cm.
(β) Την χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή όταν $R2=R1+\varepsilon$, όπου $\varepsilon \ll R1$.
Ο χώρος ανάμεσα στους οπλισμούς των πυκνωτών είναι κενός.

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
—ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837—

ΘΕΜΑ 1ο

Το ηλ. πεδίο είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργούν τα δύο φορτία. Όμως επειδή τα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση το άθροισμ[α] είναι αλγεβρικό. Έτσι:

για $x<0$, το +3μC δημιουργεί πεδίο $\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-6}}{x^2}\,\frac{N}{C}$

και το -7μC δημιουργεί $\frac{9\cdot10^9\cdot(-7)\cdot10^{6}}{(-x+0.4)^2}\,\frac{N}{C}$

για $x=0$ το πεδίο του +3μC τείνει στο $+\infty$, οπότε και το συνολικό πεδίο τείνει στο ∞

για $0<x<0.4m$, το +3μC δίνει: $\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-6}}{x^2}\,\frac{N}{C}$

και το -7μC δίνει $\frac{9\cdot10^9\cdot(-7)\cdot10^{6}}{(0.4-x)^2}\,\frac{N}{C}$

για $x=0.4m$ το πεδίο του -7μC τείνει στο $-\infty$ και το συνολικό πεδίο τείνει στο $-\infty$

για $x>0.4m$ το +3μC δίνει $\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-6}}{x^2}\,\frac{N}{C}$

και το -7μC δίνει $\frac{9\cdot10^9(-7)\cdot10^{-6}}{(x-0.4)^2}\,\frac{N}{C}$

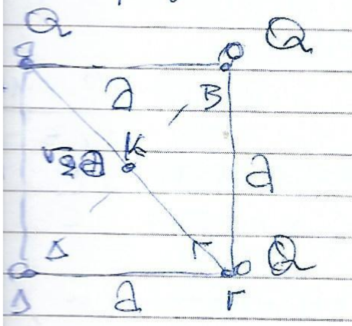
Οπότε συνολικά

$$E(x)=\begin{cases}10^3\left[\frac{27}{x^2}-\frac{63}{(x-0.4)^2}\right]\frac{N}{C} & x\neq0,\ x\neq0.4\\ +\infty & x=0\\ -\infty & x=-0.4\end{cases}$$

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

εμα 2ο

Η συνολική ηλεκτροστατική δυναμική γεια είναι ίση με τo έργο που παράγω για να νικήσω την δύναμη του Ηλ. Πεδίου και να μεταφέ το φορτίο Q από πολύ μακριά ως την κορυφή τετραγώνου:



Για να μεταφέρω το πρώτο φορτίο Q στην κορυφή A δεν χρειάζεται να υπερνικήσω κάποια ηλεκτρική δύναμη άρα $W_{Q_A} = 0$

να μεταφέρω το δεύτερο φορτίο στην κορυφή B ιάζεται να υπερνικήσω την δύναμη του . πεδίου του Q που βρίσκεται στην θέση A.

α $W_{Q_B} = k\frac{Q^2}{a}$

α να μεταφέρω το τρίτο φορτίο στην κορυφή Γ ιάζεται να υπερνικήσω την δύναμη του ηλ. πεδίου ν φορτίων Q που είναι στις A και B.

$W_{Q_\Gamma} = \frac{kQ^2}{a} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}a}$

α να μεταφέρω το τέταρτο φορτίο στην κορυφή Δ ω ομοίως:

$W_{Q_\Delta} = \frac{kQ^2}{a} + \frac{kQ^2}{a} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}a}$. Η ηλεκτροστατική δυναμική

γεια $U = W_{Q_A} + W_{Q_B} + W_{Q_\Gamma} + W_{Q_\Delta} = 0 + k\frac{Q^2}{a} + k\frac{Q^2}{a} + k\frac{Q^2}{\sqrt{2}a} + \frac{kQ^2}{a} + \frac{kQ^2}{a} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}a} = 4\frac{kQ^2}{a} + \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{kQ^2}{a}$

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Το δυναμικό στο κέντρο του τετραγώνου είναι:

$4 \cdot k \dfrac{Q}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$ γιατί η απόσταση του κέντρου από τα φορτία είναι $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

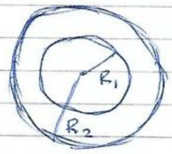
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΘΕΜΑ 3ο

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

όπου Q το θετικό φορτίο και $\Delta V = V_1 - V_2$ με V_1 το δυναμικό του φλοιού με το θετικό φορτίο και V_2 το δυναμικό του φλοιού με το αρνητικό φορτίο

Έστω ότι Q έχει η σφαίρα με ακτίνα R_1 και $-Q$ η σφαίρα με ακτίνα R_2



Το $V_1 = k \dfrac{Q}{R_1}$.

Το δυναμικό επάνω και στο εσωτερικό της σφαίρας με ακτίνα R_2 είναι $-k\dfrac{Q}{R_2}$

Επομένως $V_1 - V_2 = k\dfrac{Q}{R_1} - k\dfrac{Q}{R_2} = kQ\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) =$

$= kQ\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$ και $C = \dfrac{\cancel{Q}}{k\cancel{Q}} \cdot \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \cdot \frac{54 \cdot 10^{-4}}{(9-6) \cdot 10^{-2}} F = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{2} F = 2 \cdot 10^{-11} F =$$
$$= 20 \cdot 10^{-12} F = 20 pF$$

Για $R_2 = R_1 + \varepsilon$ με $\varepsilon \ll R_1$ έχουμε

$$C = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_1(R_1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1^2 + \underbrace{R_1 \varepsilon}_{\text{"πολύ μικρό"}}}{\varepsilon} \simeq$$
$$\simeq \varepsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{\varepsilon} = \varepsilon_0 \frac{S}{\varepsilon}$$

όπου S η επιφάνεια της σφαίρας με $R_1 \simeq R_2$ και ε η απόσταση των δύο επιφανειών.