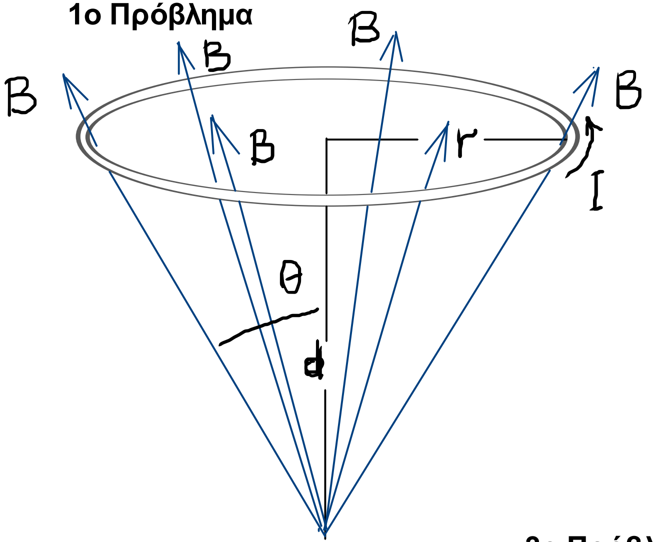
Προβλήματα και λύσεις στον μαγνητισμό

1ο Πρόβλημα

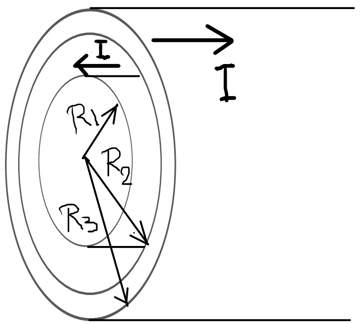


Ενας κυκλικός βρόγχος καλωδίου ακτίνας r διαρρέεται από ρεύμα I.Τοποθετείται σε μαγνητικό πεδίο του οποίου οι ευθείες γραμμές φαίνονται να αποκλίνουν από ένα σημείο σε απόσταση d κάτω από τον βρόγχο στον άξονά του. (δηλαδή το πεδίο σχηματίζει μια γωνία θ με τον βρόγχο σε όλα τα σημεία, όπως στο σχήμα με εφθ=r/d). Να βρεθεί η δύναμη στον βρόγχο.

2ο Πρόβλημα

Ενα πρωτόνιο μάζας m_p, ένα δευτέριο (μάζα $2m_p$, Q=e) και ένα σωματίδιο άλφα (μάζα $4m_p$,Q=2e) επιταχύνονται από την ίδια διαφορά δυναμικού V και έπειτα εισάγονται σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B όπου κινούνται σε κυκλικές τροχιές κάθετες στο B. Καθορίστε την ακτίνα των τροχιών για το δευτέριο και το σωματίδιο άλφα σε συνάρτηση με την τροχιά του πρωτονίου.

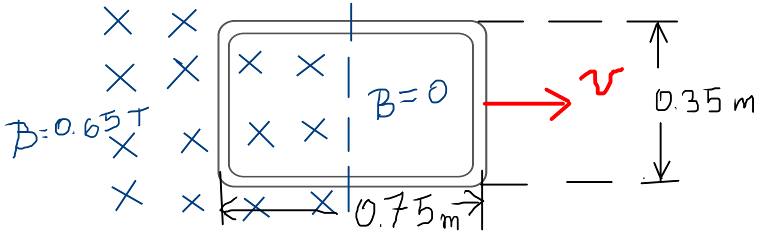
3ο Πρόβλημα



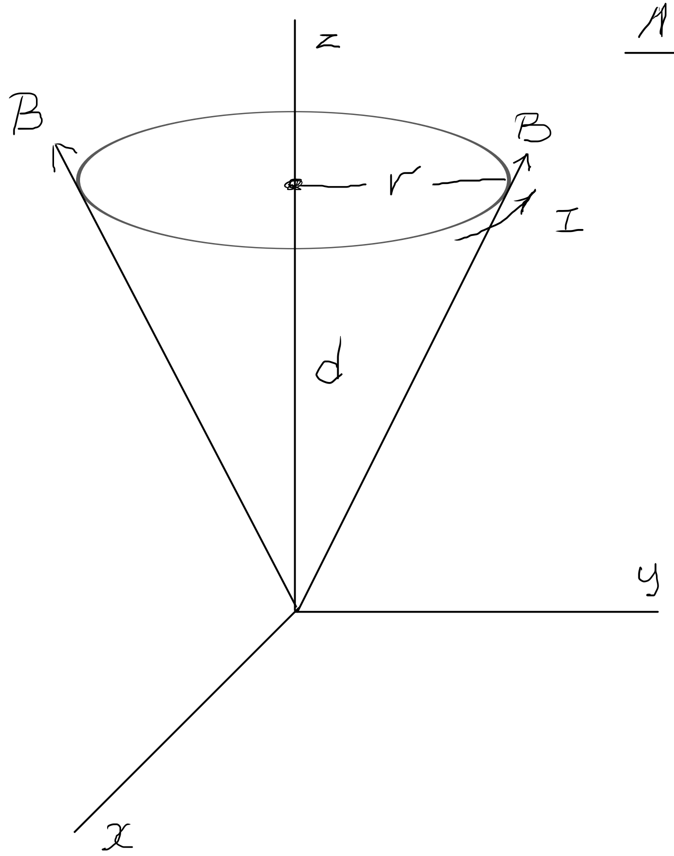
Ενα ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από έναν εσωτερικό αγωγό ακτίνας R1 που περιβάλλεται από έναν ομόκεντρο κυλινδρικό σωλήνα με εσωτερική ακτίνα R2 και εξωτερική ακτίνα R3. Οι αγωγοί έχουν ίσα και αντίθετα ρεύματα, που κατανέμονται ομοιόμορφα κατά την ακτινική διεύθυνση. Να κάνετε την γραφική παράσταση του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με την απόσταση r από τον άξονα έως r = 3 cm θεωρώντας ότι το ρεύμα έχει τιμή 15 mA και R1 = 1 cm, R2 = 2 cm, R3 = 2.5 cm

4ο Πρόβλημα

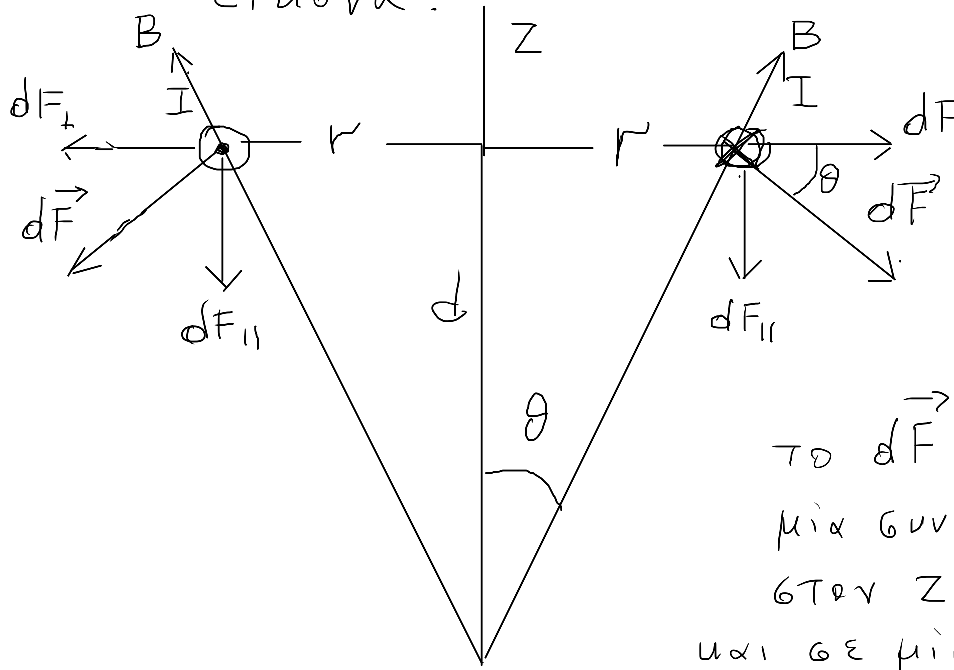
Τμήμα ενός ορθογώνιου αγωγού με τις διαστάσεις που φαίνονται στο σχήμα μπαίνει σε μια περιοχή με ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο 0.65 T. Η συνολική αντίσταση του αγωγού είναι 0.28 Ω. Υπολογείστε την δύναμη που απαιτείται για να τραβήξουμε τον αγωγό έξω από το πεδίο με σταθερή ταχύτητα 3.4 m/s. Αγνοείστε την βαρύτητα



Λύση προβλήματος 1



Αν πάω σε ένα επίπεδο κάθετο στο x-y επίπεδο, που να περιέχει τον z-άξονα τότε θα έχω την παρακάτω εικόνα:



Οπότε η δύναμη επάνω στο τμήμα $d\vec{l}$ του αγωγού θα είναι:

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

Το $d\vec{F}$ αναλύεται σε μία συνιστώσα παράλληλη στον z-άξονα: $dF_{\parallel}$ και σε μία συνιστώσα κάθετη στον z-άξονα και παράλληλη στο x-y επίπεδο. Οι $dF_\perp$ των αντιδιαμετρικών σημείων του βρόχου είναι ίσες και αντίθετες μεταξύ τους με τιμή $IdlB$συνθ. Οι $dF_\perp$ με τιμή $IdlB$ημθ προστίθενται και επομένως η συνολική δύναμη στον βρόχο είναι:

$$F_{o\lambda}\hat{k} = \hat{k}\int_{\text{Επανω στον βρόγχο}} dF_{\parallel} = -\hat{k}\int_{\text{Επάνω στον βρόγχο}} IB\,dl\,\eta\mu\theta = -\hat{k}\,IB\,2\pi r\,\eta\mu\theta$$

$$\eta\mu\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} \quad \text{αρα}$$

$$F_{o\lambda}\hat{k} = -\hat{k}\,\frac{IB\,2\pi r^2}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

Λύση προβλήματος 2

Σωματίδιο	Μάζα	Φορτίο
Πρωτόνιο	m_p	e
Δευτέριο	$2m_p$	e
άλφα	$4\,m_p$	$2e$

Επιταχύνονται από την ίδια διαφορά δυναμικού. V

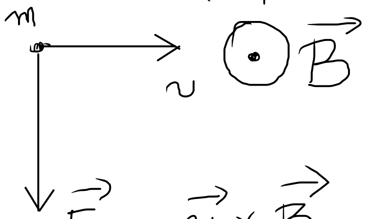
άρα:

κινητική ενέργεια πρωτονίου: $\frac{1}{2} m_p v_p^2 = e\,V \Rightarrow v_p = \left(\frac{2eV}{m_p}\right)^{1/2}$

—— " —— δευτερίου: $\frac{1}{2} 2 m_p v_d^2 = eV \Rightarrow v_d = \left(\frac{eV}{m_p}\right)^{1/2}$

—— " —— άλφα: $\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{4}^{\,2} m_p v_\alpha^2 = \cancel{2} e V \Rightarrow v_\alpha = \left(\frac{eV}{m_p}\right)^{1/2}$

Η δύναμη Lorenz εξαιτίας του Μαγν. Πεδίου είναι η κεντρομόλος δύναμη. Άρα για κάθε σωματίδιο ισχύει:



$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

πρωτόνιο: $\frac{m\, v_p^{\cancel{2}}}{r_p} = e \cancel{v_p} B \Rightarrow r_p = \frac{m_p v_p}{eB} = \frac{m_p \left(\frac{2eV}{m_p}\right)^{1/2}}{eB} =$

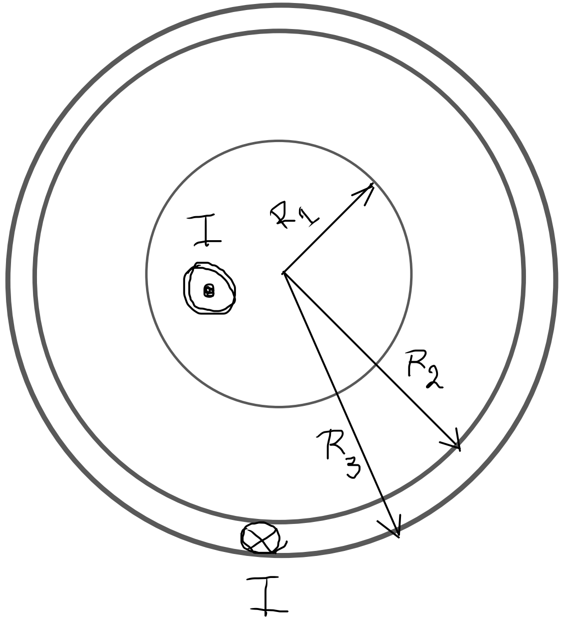
$$= \left(\frac{m_p^{\cancel{2}}}{e^{\cancel{2}} B^2} \cdot \frac{2\cancel{e}V}{\cancel{m_p}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 m_p V}{e B^2}\right)^{1/2}$$

δευτέριο: $\frac{m_d \cancel{v_d^2}}{r_d} = e\cancel{v_d}B \Rightarrow r_d = \frac{m_d v_d}{eB} = \frac{2m_p}{eB}\left(\frac{eV}{m_p}\right)^{1/2} \Rightarrow$

$$r_d = \left(\frac{4m_p^{\cancel{2}}}{e^{\cancel{2}}B^2} \cdot \frac{\cancel{e}V}{\cancel{m_p}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\cdot 2m_p V}{eB^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\cdot r_p$$

άλφα: $\frac{m_\alpha \cancel{v_\alpha^2}}{r_\alpha} = 2e\cancel{v_\alpha}B \Rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{4}}m_p v_\alpha}{\cancel{2}eB} = r_\alpha \Rightarrow r_\alpha = \frac{2m_p}{eB}\cdot\left(\frac{eV}{m_p}\right)^{1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_\alpha = \left(\frac{4m_p^{\cancel{2}}}{e^{\cancel{2}}B^2} \cdot \frac{\cancel{e}V}{\cancel{m_p}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\cdot 2m_p V}{eB^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\cdot r_p$$



Λύση προβλήματος 3

Θα εφαρμόσω τον νόμο Ampere εκμεταλλευόμενος την κυλινδρική συμμετρία.
Το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα κατά την ακτινική διεύθυνση, άρα για $0<r<R_1$ το ρεύμα που διαπερνά μια επίπεδη κυκλική επιφάνεια ακτίνας r θα είναι:

$$\frac{I}{\pi R_1^2}\cdot \pi r^2 = I\cdot\frac{r^2}{R_1^2}$$

Το $\oint_{C(0,r)} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα r είναι $B2\pi r$

άρα ο νόμος Ampere λέει $B2\pi \cancel{r} = \mu_0 I\cdot\frac{r^{\cancel{2}}}{R_1^2}$ άρα

για $0\leq r<R_1$ το $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{r}{R_1^2}$

Για $R_1\leq r<R_2$ το ρεύμα που διαπερνά μια επίπεδη κυκλική επιφάνεια με κέντρο O

και ακτίνα r είναι I άρα ο νόμος Ampere δίνει ότι

$$B 2\pi r = \mu_0 I \iff B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

Για $R_2 < r < R_3$ το ρεύμα που διαπερνά την επίπεδη κυκλική επιφάνεια με κέντρο O και ακτίνα r είναι:

I − Το ρεύμα που διαπερνά το δακτυλίδι με πλάτος $r-R_2$

το ρεύμα αυτό είναι: $$\frac{I}{\pi R_3^2-\pi R_2^2}\cdot(\pi r^2-\pi R_2^2) = I\cdot\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}$$

έτσι το ρεύμα που διαπερνά την επίπεδη κυκλική επιφάνεια είναι

$$I\left(1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right)$$ και ο νόμος Ampere

δίνει $$B 2\pi r = \mu_0 I \left(1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right] \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{r}\left[1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right]$$

Για $r > R_3$, το συνολικό ρεύμα που διαπερνά την κυκλική επιφάνεια είναι: $I - I = 0$, άρα $B = 0$

Το $\frac{\mu_0}{2\pi} = 2\cdot 10^{-7}$, $I = 15\cdot 10^{-3}$ A άρα $\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I = 30\cdot 10^{-10}$

$R_1 = 10^{-2}$ m, $R_2 = 2\cdot 10^{-2}$, $R_3 = 2.5\cdot 10^{-2}$ m

$B(r) = 30\cdot 10^{-10}\frac{r}{10^{-4}}$ [T] για $0 \le r < 10^{-2}$ m

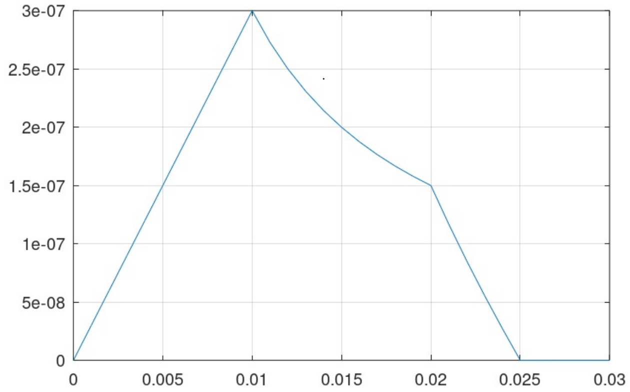
$B(r) = 30\cdot 10^{-10}\frac{1}{r}$ [T] για $10^{-2} \le r < 2\cdot 10^{-2}$

$$B(r) = 30\cdot 10^{-10}\frac{1}{r}\left[1 - \frac{r^2 - 4\cdot 10^{-4}}{(2.5\cdot 10^{-2})^2 - (2\cdot 10^{-2})^2}\right] = 30\cdot 10^{-10}\frac{1}{r}\cdot\left[1 - \frac{r^2 - 4\cdot 10^{-4}}{10^{-4}\cdot 2.25}\right] [T]$$

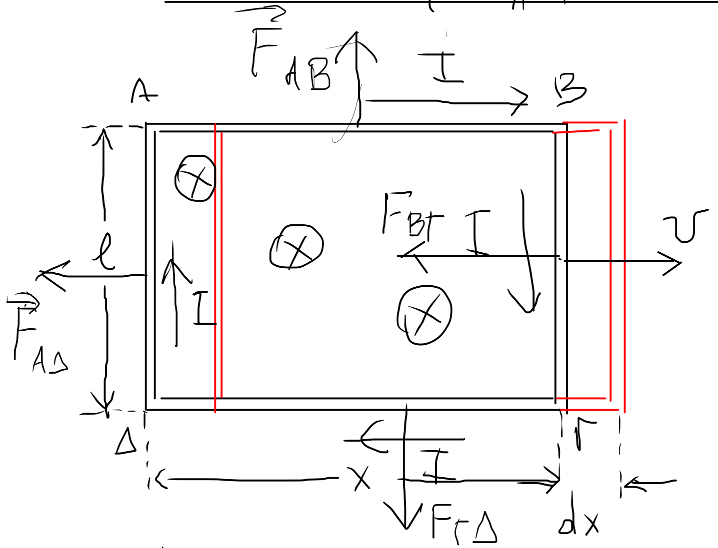
για $2\cdot 10^{-2}$ m $< r < 2.5\cdot 10^{-2}$ m

$B(r) = 0$ για $r > 2.5\cdot 10^{-2}$ m

```
#plot Πρόβλημα 3 (Octave)
r=linspace(0,0.03, 31)
mo_over2pi_times_current=30*1e-10
B1=mo_over2pi_times_current*1e4.*r(1:11)
B2=mo_over2pi_times_current./r(12:20)
B3=mo_over2pi_times_current*([1 1 1 1 1 1].-(1e4/2.25)*(r(21:26).*r(21:26).-0.0004*[1 1 1 1 1 1]))./r(21:26)
B4=[0 0 0 0 0]
B=[B1 B2 B3 B4]
plot(r,B)
```



Λύση προβλήματος 4



Η ροή είναι $\Phi = B \cdot x \cdot l$ άρα το

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot \upsilon$$

Όσο αλλάζει η ροή του Μ.Π. δημιουργείται ένα ρεύμα που δημιουργεί Μ.Π. που αντιτίθεται στην αλλαγή της ροής. Επομένως θα δημιουργηθεί ρεύμα με την φορά πού φαίνεται στο σχήμα. Αυτό το ρεύμα είναι

$$I = \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}}{R} = \frac{B l \upsilon}{R}$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και είναι μέσα σε Μ.Π. θα ασκούνται σε αυτόν δυνάμεις.

$F_{B\Gamma} = IlB$, $F_{A\Delta} = IlB$ άρα $\vec{F}$ με φορά αντίθετη του $\vec{\upsilon}$ είναι το

$$F_{B\Gamma} + F_{A\Delta} = 2IlB = 2\frac{Bl\upsilon}{R}Bl = 2\frac{B^2 l^2 \upsilon}{R} \ [N]$$