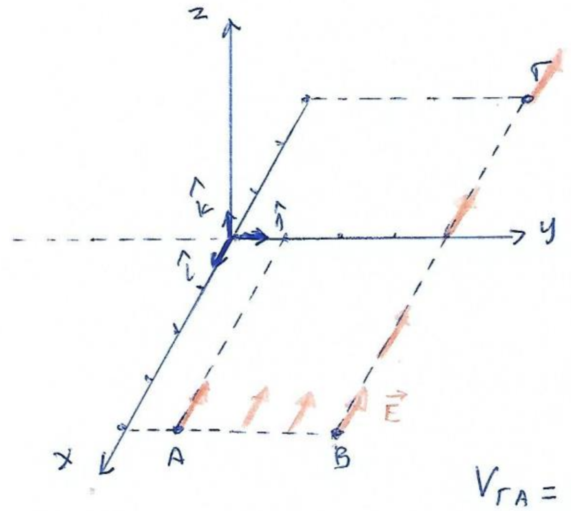
ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟ – ΚΥΜΑΤΙΚΗ – ΟΠΤΙΚΗ
Β ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022
ΤΜΗΜΑ ΑΕΡΟΔΙΑΣΤΗΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ Ε.Κ.Π.Α.

ΘΕΜΑ 1 (3 μονάδες)

Ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{\boldsymbol{E}} = -4.2\hat{\imath}\ (N/C)$. Το σημείο Α έχει συντεταγμένες (x=4 m, y= 1 m, z=0). Το σημείο Β έχει συντεταγμένες (x=4 m, y= 4 m, z=0). Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (x=-3 m, y= 4 m, z=0). Να βρεθούν οι διαφορές δυναμικού $V_{BA}, V_{\Gamma B}, V_{\Gamma A}$



Χρησιμοποιούμε το ότι

$$V_{BA} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$V_{\Gamma B} = V_\Gamma - V_B = -\int_B^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

και

$$V_{\Gamma A} = V_\Gamma - V_A = V_\Gamma - V_B + V_B - V_A = V_{\Gamma B} + V_{BA}$$

Αν πάω από το Α στο Β σε ευθεία γραμμή παρατηρώ ότι $d\vec{r} = dr\cdot\hat{\jmath}$ είναι κάθετο στο $\vec{E} = -4.2\,\hat{\imath}\ (N/C)$

Άρα $\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ και $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$, δηλ $V_{BA} = 0$

Αν πάω από το Β στο Γ σε ευθεία γραμμή παρατηρώ ότι $d\vec{r} = dr(-\hat{\imath})$. Επομένως $\vec{E}\cdot d\vec{r} = -4.2\cdot\hat{\imath}\,dr(-\hat{\imath})$, δηλαδή $\vec{E}\cdot d\vec{r} = 4.2\,dr\ (N/C)\cdot m$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_B^\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_B^\Gamma E\,dr = E\int_B^\Gamma dr = E\,r_{\Gamma B} = 4.2\times 7\ \frac{N}{C}\cdot m = 29.4\ \frac{N}{C}\,m$$

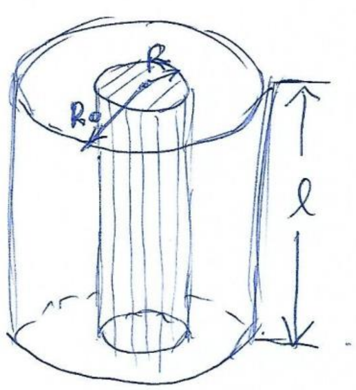
Άρα $V_{\Gamma B} = -\int_B^\Gamma \vec{E}\,d\vec{r} = -29.4\,V$

Προφανώς $V_{\Gamma A} = V_{\Gamma B} + 0 = -29.4\,V$

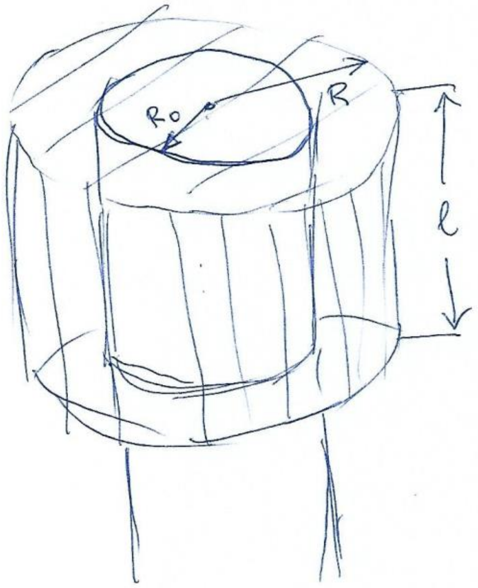
ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες)

Ένας πλαστικός κύλινδρος ακτίνας R_0 και «απείρου μήκους» (δηλ. με μήκος $l \gg R_0$) έχει ομοιόμορφη πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\rho_E\ C/m^3$. Να βρείτε την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου για $R < R_0$ και για $R > R_0$.

(α) $R < R_0$



(β) $R > R_0$



Εφαρμόζω τον νόμο του Gauss $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, όπου Φ μία κλειστή επιφάνεια, Q το φορτίο που περικλείει. Εκμεταλλεύομαι την κυλινδρική συμμετρία

(α) $R < R_0$. Εφαρμόζω τον νόμο Gauss στον γραμμοσκιασμένο κύλινδρο.

$$\Phi = E \cdot 2\pi R l$$

$$Q = \rho_E \cdot \pi R^2 l \quad \text{άρα}$$

$$E\, 2\cancel{\pi} \cancel{R} \cancel{l} = \frac{\rho_E}{\varepsilon_0} \cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \cancel{l} \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{\rho_E}{2\varepsilon_0} R$$

(β) $R > R_0$. εφαρμόζω τον νόμο Gauss στον γραμμοσκιασμένο κύλινδρο

$$\Phi = E\, 2\pi R l$$

$$Q = \rho_E \pi R_0^2 l$$

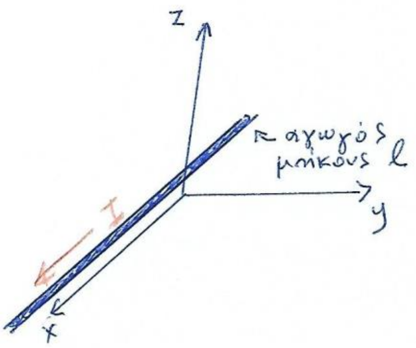
άρα

$$E\, 2\cancel{\pi} R \cancel{l} = \frac{\rho_E}{\varepsilon_0} \cancel{\pi} R_0^2 \cancel{l} \Leftrightarrow \frac{\rho_E}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{R_0^2}{R} = E$$

Παρατηρώ ότι για $R = R_0$ οι δύο τύποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα

ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες)

Ένα μακρύ ευθύγραμμο καλώδιο βρίσκεται στην x-διεύθυνση και έχει ρεύμα 3 A με φορά προς τον +x άξονα. Το καλώδιο βρίσκεται μέσα σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{\boldsymbol{B}} = (\mathbf{0.2}\hat{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{0.36}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{0.25}\hat{\boldsymbol{k}})\,T$. Να βρείτε τις συνιστώσες της δύναμης ανά μονάδα μήκους N/m που ασκείται στο καλώδιο.



Χρησιμοποιούμε ότι η δύναμη σε έναν αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I και έχει μήκος ℓ είναι

$$\vec{F} = I \int_{\substack{\text{επάνω στον}\\ \text{αγωγό}}} d\vec{\ell} \times \vec{B}$$ όπου

Το $d\vec{\ell}$ έχει την φορά του ρεύματος.

Στην περίπτωσή μας $d\vec{\ell} = d\ell\,\hat{i}$

Άρα $\vec{F} = I \int_{\substack{\text{επάνω}\\ \text{στον}\\ \text{αγωγό}}} d\ell\,\hat{i} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I\ell\,\hat{i} \times \vec{B} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \vec{F}/\ell = I\,\hat{i} \times \vec{B}.$$

Αντικαθιστώντας έχω $\dfrac{\vec{F}}{\ell} = 3\,\hat{i} \times (0.2\hat{i} - 0.36\hat{j} + 0{,}25\hat{k})$

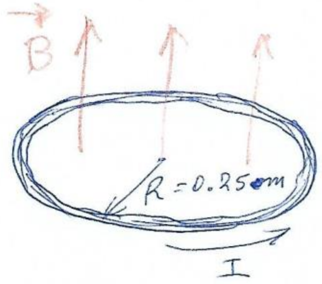
με μονάδες N/m. Άρα $\dfrac{\vec{F}}{\ell} = 3\cdot 0.2\,\hat{i}\times\hat{i} - 3\cdot 0.36\,\hat{i}\times\hat{j} + 3\cdot 0.25\,\hat{i}\times\hat{k}$.

$\hat{i}\times\hat{i} = 0$, $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

Επομένως $\dfrac{\vec{F}}{\ell} = -0.75\hat{j} + 1.08\hat{k}\ \left(\dfrac{N}{m}\right)$

Θέμα 4 (2 μονάδες)

Ένας συρμάτινος κυκλικός βρόγχος έχει διάμετρο 25 cm και αντίσταση 1.5 Ω. Είναι τοποθετημένος μέσα σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο που έχει κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο του βρόγχου. Το μαγνητικό πεδίο μέσα σε 1 s από 0.4 T γίνεται 0. Να βρείτε την ισχύ που καταναλώνεται ως θερμότητα πάνω στον βρόγχο.



Θα χρησιμοποιήσω τον νόμο Faraday πού λέει ότι

$$\int_{\text{επάνω στον βρόγχο}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{μπ}}{dt}$$ όπου

$\Phi_{μπ}$ είναι η ροή του Μ.Π. μέσα από επιφάνεια μέ σύνορο τον βρόγχο

Το $\int_{\text{επάνω στον βρόγχο}} \vec{E}\cdot dl$ είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη $\mathcal{E}$ και το − δίνει την φορά του πεδίου που δημιουργεί ρεύμα το οποίο αντιτίθεται στην αλλαγή του Μ.Π.

Το ρεύμα στον βρόγχο είναι $\frac{\mathcal{E}}{R}$ και η ισχύς που καταναλώνεται είναι $P=\frac{\mathcal{E}^2}{R}$

... στην περίπτωσή μας:

$$\Phi_{μπ} = 0.4T\cdot\pi\cdot\left(\frac{0.25}{2}\right)^2 m^2 = 0.0196\ T\cdot m^2$$

και $$\frac{d\Phi_{μπ}}{dt} = \frac{0.0196}{1\ s}\ T\cdot m^2 = 0.0196\ \frac{T\,m^2}{s}$$

και $$P = \frac{(0.0196)^2}{1.5\Omega}\ W = 2.57\cdot 10^{-4}\ W$$ ή

$$\approx 0.26\ mW$$