Παραδείγματα λυμένων ασκήσεων Ηλεκτροστατική Δυναμική Ενέργεια, Ηλεκτρικό Δυναμικό, Χωρητικότητα,

1. Στο σημείο Α βρίσκεται «καρφωμένο» ένα φορτίο $Q = 1\mu C$. Ποιο είναι το έργο που πρέπει να παράξω για να μεταφέρω ένα φορτίο $q = \frac{1}{9}\,\mu C$ από πολύ μακριά στο σημείο Β που απέχει 1 cm από το σημείο Α; Πως σχετίζεται με το δυναμικό στο σημείο Β εξαιτίας του πεδίου που παράγει το φορτίο Q;

   <u>Λύση</u>

   Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το φορτίο Q που βρίσκεται στο σημείο Α είναι:

   $\vec{\boldsymbol{E}}(r) = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{e}}$ μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το σημείο Α με το σημείο που απέχει *r* από το Α και φορά από το Α προς το σημείο.

   Η **απωστική** δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι

   $\vec{\boldsymbol{F}} = q \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(r) = k \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$

   Επομένως εγώ για να μετακινήσω το q από το άπειρο στο σημείο Β πρέπει να ασκήσω μια δύναμη ίση και αντίθετης φοράς με την $\vec{\boldsymbol{F}}$. Έτσι το άθροισμα των δυνάμεων πάνω στο q θα είναι 0 και αν του έχω δώσει μια αρχική ταχύτητα με κατεύθυνση προς το Β αυτό θα φτάσει κάποια στιγμή στο Β. Το έργο που εγώ πρέπει να παράξω είναι

   $W = \int_{r=\infty}^{r_B} -q \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\,(r) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{r_B}^{\infty} q \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\,(r) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{r_B}^{\infty} k \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$

   $= \int_{r_B}^{\infty} k \cdot \frac{Qq}{r^2} dr = k \cdot Qq \cdot \left(-\frac{1}{r}\Big|_{r_B}^{\infty}\right) = k \cdot Qq \cdot \frac{1}{r_B}$. Αντικαθιστώντας παίρνω:

   $$W = 9 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot 10^{-6} C \cdot \frac{1}{9} \times 10^{-6} C \cdot \left(-\frac{1}{r \to \infty} + \frac{1}{10^{-2}\, m}\right)$$

   Αυτό δίνει W = *0.1 J*

   Προφανώς το δυναμικό στο σημείο Β εξαιτίας του πεδίου που παράγει το Q είναι $U = \frac{W}{q} = k \cdot \frac{Q}{r_B} = \frac{0.1\,J}{\frac{1}{9} \times 10^{-6} C} = 9 \times 10^5\, V$

2. Να επαναληφθεί το προηγούμενο παράδειγμα για $-Q = -1\mu C$.

<u>Λύση</u>

Το φορτίο -*Q* που βρίσκεται στο σημείο Α παράγει ηλεκτρικό πεδίο:

$\vec{\boldsymbol{E}}(r) = k \cdot \frac{-Q}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{e}}$ μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το σημείο Α με το σημείο που απέχει *r* από το Α και φορά από το Α προς το σημείο. Προφανώς το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά αντίθετη από αυτή του $\hat{\boldsymbol{e}}$.

Η **ελκτική** δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι

$\vec{\boldsymbol{F}} = q \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(r) = k \cdot \frac{-Qq}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$

Επομένως αν εγώ «κρατάω» το φορτίο q θα μου ασκείται αυτή η ελκτική δύναμη και δεν θα καταβάλω προσπάθεια, αλλά θα κερδίζω ενέργεια. Όταν κερδίζω ενέργεια παράγω αρνητικό έργο. Το έργο αυτό είναι:

$$W = \int_{r=\infty}^{r_B} -q \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\,(r) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{r_B}^{\infty} q \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\,(r) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{r_B}^{\infty} k \cdot \frac{-Qq}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{e}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$= \int_{r_B}^{\infty} k \cdot \frac{-Qq}{r^2} dr = k \cdot (-Q)q \cdot \left(-\frac{1}{r}\Big]_{r_B}^{\infty}\right) = -\,k \cdot Qq \cdot \frac{1}{r_B}$$

Αντικαθιστώντας παίρνω: W = *- 0.1 J*

Προφανώς το δυναμικό στο σημείο Β εξαιτίας του πεδίου που παράγει το *-Q* είναι $U = \frac{W}{q} = k \cdot \frac{-Q}{r_B} = \frac{-0.1\,J}{\frac{1}{9}\times 10^{-6} C} = -9 \times 10^5\ V$

3. Το ηλεκτρικό πεδίο σε μία περιοχή του χώρου έχει σταθερή διεύθυνση, φορά και μέτρο ίσο με 3 N/C. Πόση είναι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία Α και Β που βρίσκονται σε αυτό τον χώρο και απέχουν 2 m (α) όταν η ευθεία που τα ενώνει έχει την ίδια διεύθυνση με το πεδίο, (β) όταν η ευθεία που τα ενώνει είναι κάθετη στο πεδίο και (γ) όταν η ευθεία που τα ενώνει σχηματίζει γωνία 45° με το πεδίο.

   Λύση

   Η διαφορά του δυναμικού του πεδίου στο σημείο Α από το σημείο Β είναι το πηλίκο του έργου που παράγει η ηλεκτρική δύναμη πάνω σε ένα φορτίο q όταν αυτό μετακινείται από το σημείο Α προς το σημείο Β δια του φορτίου:

   $$U_A - U_B = {W_{A\to B}}/{q} = {\int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}\Big/{q} = \frac{\int_A^B q\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}{q} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

   Στην περίπτωση (α) και αν η φορά του πεδίου είναι από το Α προς το Β τα $\vec{\boldsymbol{E}}$ και $d\vec{\boldsymbol{l}}$ έχουν ίδια φορά και $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = E \cdot dl \cdot \sigma\upsilon\nu 0^o = E \cdot dl.$ Το ολοκλήρωμα δίνει $E \cdot d = 3\frac{N}{C} \cdot 2m = 6\frac{N\cdot m}{C} = 6V$

   Στην περίπτωση (α) και αν η φορά του πεδίου είναι από το Β προς το Α τα $\vec{\boldsymbol{E}}$ και $d\vec{\boldsymbol{l}}$ έχουν αντίθετη φορά και $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = E \cdot dl \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -E \cdot dl.$

   Το ολοκλήρωμα δίνει $-E \cdot d = -3\frac{N}{C} \cdot 2m = -6\frac{N\cdot m}{C} = -6V$

Στην περίπτωση (β) τα $\vec{\boldsymbol{E}}$ και $d\vec{\boldsymbol{l}}$ είναι κάθετα μεταξύ τους:

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = E \cdot dl \cdot \sigma\upsilon\nu 90^o = 0$$

Το ολοκλήρωμα δίνει 0, δηλ. $U_A = U_B$

Στην περίπτωση (γ) και αν η φορά του πεδίου είναι από το Α προς το Β

$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = E \cdot dl \cdot \sigma\upsilon\nu 45^o = E \cdot dl \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Το ολοκλήρωμα δίνει $E \cdot d \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\frac{N}{C} \cdot 2m \cdot 0.707 = 6\frac{N \cdot m}{C} = 4.24V$

Στην περίπτωση (γ) και αν η φορά του πεδίου είναι από το Β προς το Α

$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = E \cdot dl \cdot \sigma\upsilon\nu 135^o = E \cdot dl \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}$

Το ολοκλήρωμα δίνει $-4.24V$

4. Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλα αγώγιμα ορθογώνια φύλλα που ανάμεσά τους υπάρχει μόνο αέρας και η μεταξύ τους απόσταση $d=10^{-5}$ m είναι πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους $a = 10^{-2}$ m και $b = 10^{-1}$ m. Ποια είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή;

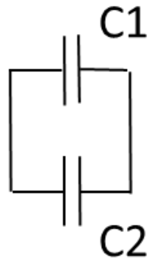
   Λύση

   Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $\Delta U = E \cdot d$. Το ηλ. πεδίο $E=\sigma/\varepsilon_0$. Άρα $\sigma = E \cdot \varepsilon_0$. Το φορτίο $Q = \sigma \cdot a \cdot b = E \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot b$

   Η χωρητικότητα $C=Q/\Delta U$ είναι $E \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot b / E \cdot d$. *Άρα η χωρητικότητα* $C= \varepsilon_0 \cdot a \cdot b/d$.

   Βάζοντας τα νούμερα έχουμε: $C = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C}{N \cdot m^2} \cdot \frac{10^{-2} \times 10^{-1} m^2}{10^{-5} m} = 8.854 \times 10^{-10} F$

5. Ένας πυκνωτής με χωρητικότητα C1=7.7 μF φορτίζεται από μια μπαταρία 125 V και κατόπιν αποσυνδέεται από την μπαταρία. Ο πυκνωτής αυτός συνδέεται σε έναν άλλον πυκνωτή χωρητικότητας C2 αρχικά αφόρτιστο, όπως στο σχήμα:

   Με την σύνδεση, η τάση σε κάθε πυκνωτή γίνεται 15 V. Πόση είναι η C2;

   Λύση

   Όταν ο πυκνωτής C1 αποσυνδέεται από την μπαταρία, έχει φορτίο $Q = 7.7 \times 10^{-6} F \cdot 125\, V = 962.5\, \times 10^{-6}\, C$ Το φορτίο αυτό μοιράζεται στους δύο πυκνωτές που έχουν τώρα τάση 15 V. Άρα ο πυκνωτής με C1 = 7.7 μF κρατάει φορτίο $Q' = 7.7 \times 10^{-6} F \cdot 15\, V = 115.5 \times 10^{-6} C$ και το υπόλοιπο φορτίο $Q_2 = Q - Q' = 847 \times 10^{-6}\, C$ πηγαίνει στον πυκνωτή με χωρητικότητα $C2 = {Q_2}/{15\, V} = 56.4666 \times 10^{-6}\, F \approx 56.5\, \mu F$