Παραδείγματα λυμένων ασκήσεων Ηλ. Πεδίο – Ροή Ηλ. Πεδίου – Νόμος Gauss

1. Να υπολογιστεί η ροή του ομοιόμορφου ηλεκτρικού πεδίου με ένταση $5.8 \cdot 10^3$ N/C μέσα από την επιφάνεια ενός κύκλου ακτίνας 13 cm, όταν αυτός είναι: (α) κάθετος στο πεδίο, (β) παράλληλος στο πεδίο και (γ) σχηματίζει γωνία 45^o με το πεδίο

   <u>Λύση</u>

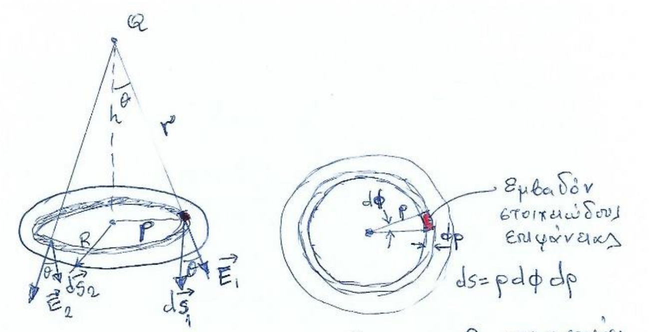
   $\Phi = \oint_{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = E \cdot S \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ για (α) θ=0, (β) $\theta=90^o$, (γ) $\theta=45^o$ Άρα

   (α) $5.8 \times 10^3\, N/C \cdot \pi \cdot (0.13\, m)^2 \times \sigma\upsilon\nu(0^o) = 31\ {N \cdot m^2}/{C}$

   (β) $5.8 \times 10^3\, N/C \cdot \pi \cdot (0.13\, m)^2 \times \sigma\upsilon\nu(90^o) = 0\ {N \cdot m^2}/{C}$

   (γ) $5.8 \times 10^3\, N/C \cdot \pi \cdot (0.13\, m)^2 \times \sigma\upsilon\nu(45^o) = 22\ {N \cdot m^2}/{C}$

2. Να υπολογιστεί η ροή του ηλεκτρικού πεδίου ενός σημειακού φορτίου Q που περνάει μέσα από την επιφάνεια ενός κύκλου ακτίνας R που το κέντρο του βρίσκεται σε απόσταση h από το Q.



Η ροή του ηλ. πεδίου εξαιτίας του Q που περνάει μέσα από την επιφάνεια του κύκλου ακτίνας R είναι το $\oint_{\substack{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha \\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3 + \cdots$

Για να το υπολογίσουμε χωρίζουμε τον κύκλο σε δακτυλίδια πάχους $d\rho$ και το κάθε δακτυλίδι σε στοιχειώδη τμήματα, που το καθένα έχει εμβαδόν $\rho d\varphi \cdot d\rho$. Το ρ παίρνει τιμές από 0 ως R και το φ από 0 ως 2π με:

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS\, \sigma\upsilon\nu\theta$. Το $r^2 = \rho^2 + h^2$ και $E = k\frac{Q}{r^2}$ και $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$

Το $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{h}{r}$. Έτσι η ροή $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ γράφεται:

$$\Phi = \int_{\rho=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{k\frac{Q}{\rho^2+h^2}}_{E} \cdot \underbrace{\rho\, d\rho\, d\varphi}_{dS} \cdot \frac{h}{\underset{\sqrt{\rho^2+h^2}}{r}} =$$

$$= kQh \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} = 2\pi k Q h \int_{\rho=0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}$$

Το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\rho=0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}}$$ υπολογίζεται ως εξής: Το $\rho d\rho =$

$$= \frac{1}{2}\, 2\rho d\rho = \frac{1}{2}\, d(\rho^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\, d(\rho^2+h^2)$$ Αν συμβολίσω

το ρ^2+h^2 με z το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\frac{1}{2}\int_{\rho=0}^{R} \frac{dz}{z^{3/2}} = -\int_{\rho=0}^{R} \left(-\tfrac{1}{2}\right) z^{-3/2} dz = -\int_{\rho=0}^{R} \left(z^{-1/2}\right)' dz$$

$$= -z^{-1/2}\Big|_{\rho=0}^{R} = -\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} + \frac{1}{\sqrt{0+h^2}} =$$

$$= \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}$$ Άρα

$$\Phi = 2\pi k Q h\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right].$$ Το $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

έτσι $$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right].$$

3. Έστω δύο άγνωστα σημειακά φορτία Q1 και Q2. Σε ένα σημείο της ευθείας που τα ενώνει, το οποίο βρίσκεται στο 1/3 της απόστασης μεταξύ τους, το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0. Ποιος είναι ο λόγος Q1/Q2;

   Λύση

   Τα δύο φορτία πρέπει να είναι ομόσημα, έτσι ώστε τα διανύσματα των πεδίων E1 (εξαιτίας του Q1) και E2 (εξαιτίας του Q2) στο σημείο αυτό να είναι ίσα και αντίθετα. Επομένως

$$k \cdot \frac{Q1}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} = k \cdot \frac{Q2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \frac{Q1}{Q2} = \frac{\left(\frac{d}{3}\right)^2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

4. Το ηλεκτρικό πεδίο του οποίου η ροή εμφανίζεται στον νόμο του Gauss $\Phi = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\varphi o\rho\tau\acute{\iota}o\ \pi o\upsilon\ \pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda\varepsilon\acute{\iota}\varepsilon\tau\alpha\iota\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\nu\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{\eta}\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}{\varepsilon_0}$ οφείλεται αποκλειστικά στο φορτίο που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια;

   Απάντηση

   Όχι. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί την ροή είναι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο, τόσο αυτό που οφείλεται στα φορτία που περικλείονται από την κλειστή επιφάνεια όσο και αυτό που οφείλεται σε φορτία που ευρίσκονται έξω από τον όγκο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια.

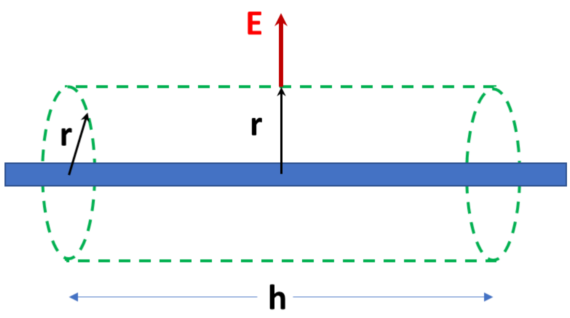
5. Ένα σημειακό φορτίο 9.2 nC βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και ένα δεύτερο φορτίο -5 nC πάνω στον άξονα χ στην θέση x=2.75 cm. Υπολογίστε την ροή του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου της σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 m. Επαναλάβετε τον υπολογισμό για σφαίρα ακτίνας 2 m.

Λύση

Η ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια εξαρτάται μόνο από το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια. Επομένως και για τις δύο σφαίρες η ροή είναι η ίδια και ισούται με $\Phi = \frac{9.2\times10^{-9}C - 5\times10^{-9}C}{8.85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2} = 475\ N\cdot m^2/C$

6. Ένα ευθύγραμμο καλώδιο πολύ μεγάλου μήκους έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό ηλεκτρικό φορτίο **λ** C/m. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο που βρίσκεται σε απόσταση r από το καλώδιο, όπου το r είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του καλωδίου. Επίσης το σημείο δεν πρέπει να βρίσκεται πολύ κοντά στα άκρα του καλωδίου

Λύση



Λόγω της συμμετρίας και του ότι το φορτίο στο καλώδιο είναι θετικό, περιμένουμε το ηλ. πεδίο να έχει φορά που να φεύγει από το καλώδιο και διεύθυνση ακτινική. Δηλ. περιμένουμε το πεδίο να έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της πλευρική επιφάνειας ενός κυλίνδρου ακτίνας r, όπου το καλώδιο είναι στον άξονα συμμετρίας του. Επίσης περιμένουμε το πεδίο να έχει διεύθυνση κάθετη σε κάθε σημείο της πλευρικής επιφάνειας. Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss στον κύλινδρο του σχήματος. Το φορτίο που ευρίσκεται μέσα στον όγκο του κυλίνδρου είναι **λ·h.** Το ολοκλήρωμα του πεδίου επάνω σε όλη την κυλινδρική επιφάνεια:

$$\int_{\kappa\upsilon\lambda\iota\nu\delta\rho o\varsigma} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\boldsymbol{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 2\cdot\int_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta} EdS\sigma\upsilon\nu(90^o) +$$

$+ E\cdot\int_{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}} ds\cdot\sigma\upsilon\nu(0^o) = 0 + E\cdot 2\pi rh$ άρα ο νόμος Gauss δίνει:

$E\cdot 2\pi rh = \frac{\lambda\cdot h}{\varepsilon_0}$ και τελικά $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}$