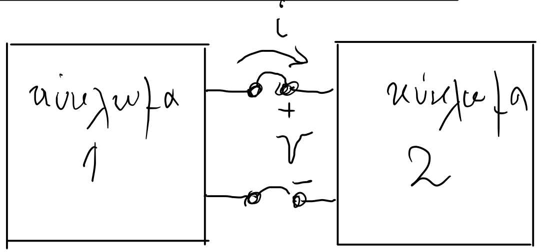
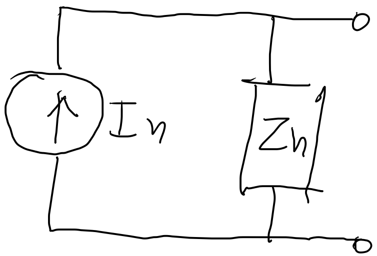
Θεώρημα Norton



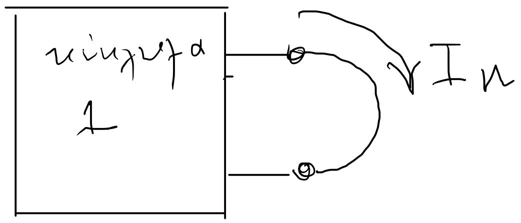
Το κύκλωμα 1 είναι ισοδύναμο ως προς την επίδραση του στο κύκλωμα 2 με το:

Ισοδύναμο κύκλωμα Norton



(Πηγή ρεύματος παράλληλα με εμπέδηση)

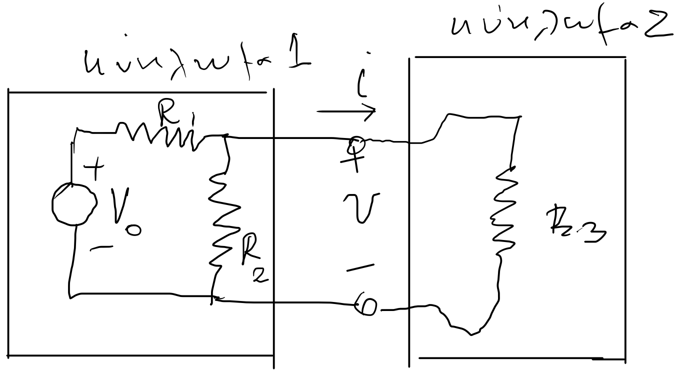
Την τιμή του I_n την βρίσκουμε ως εξής: Αφαιρούμε από την έξοδο του κυκλώματος 1 το κύκλωμα 2 και βραχυκυκλώνουμε τους ακροδέκτες εξόδου του κυκλώματος 1. Το ρεύμα που τους διαρρέει είναι το I_n

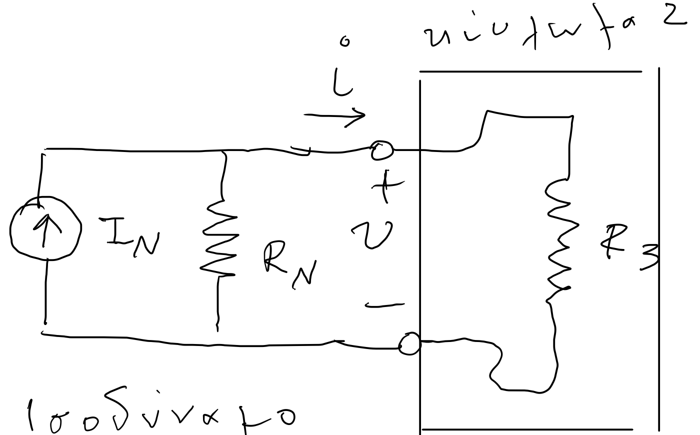


Το Z_n το βρίσκουμε όπως βρίσκουμε και το Z_{TH}

άρα $Z_n = Z_{TH}$.

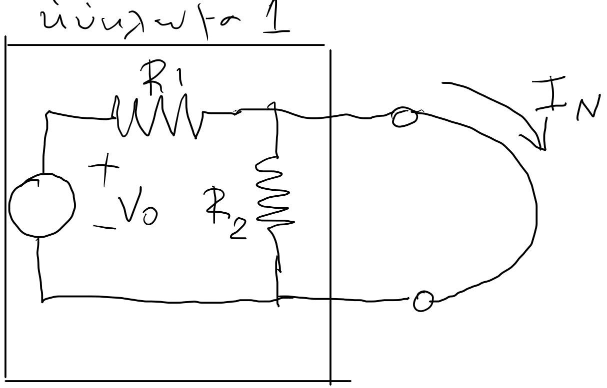
Παράδειγμα:





Ισοδύναμο κύκλωμα Norton του κυκλώματος 1

Εύρεση του I_N



Από την R_2 δεν περνάει ρεύμα γιατί οι ακροδέκτες της είναι βραχυκυκλωμένοι, άρα η διαφορά δυναμικού ανάμεσά τους είναι 0 και $i_{R_2} = \frac{0}{R_2} = 0$

Άρα $I_N = \frac{V_0}{R_1}$, $R_N = R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

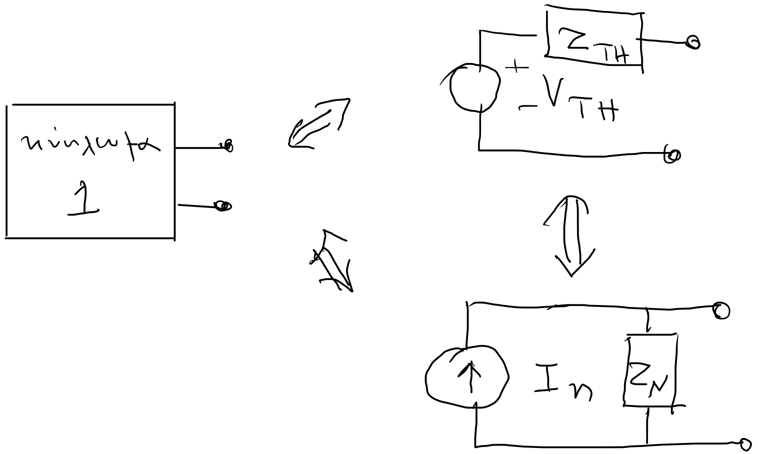
$I_N = \frac{V}{R_N} + \frac{V}{R_3} \Leftrightarrow I_N = V\left(\frac{R_N + R_3}{R_N R_3}\right) \Leftrightarrow V = I_N \cdot \frac{R_N R_3}{R_N + R_3}$ αντικαθιστώντας το I_N και R_N

$$V = \frac{V_0}{\cancel{R_1}} \cdot \frac{\frac{\cancel{R_1} R_2}{R_1+R_2} \cdot R_3 \cdot (R_1+R_2)}{\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3\right) \cdot (R_1+R_2)} \Longrightarrow V = V_0 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

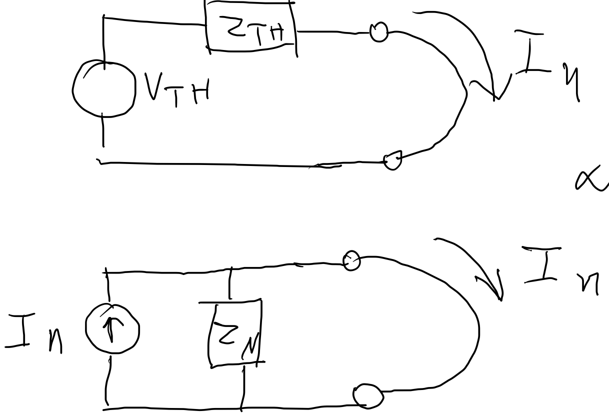
$$i = \frac{V}{R_3} = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Δείξαμε ότι πράγματι αν βάλουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton θα έχουμε στο κύκλωμα 2 την ίδια V και το ίδιο i που έχουμε όταν βάλαμε το κύκλωμα 1

Σχέση ανάμεσα στα ισοδύναμα κυκλώματα NORTON και THEVENIN



Δηλαδή

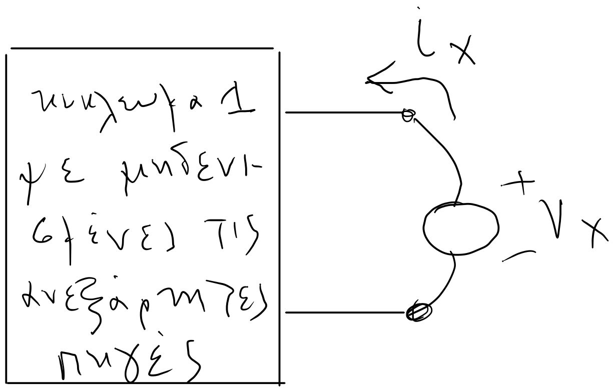


άρα

$$\boxed{V_{TH} = \frac{I_{NORTON}}{Z_{TH}} \qquad Z_{TH} = Z_N}$$

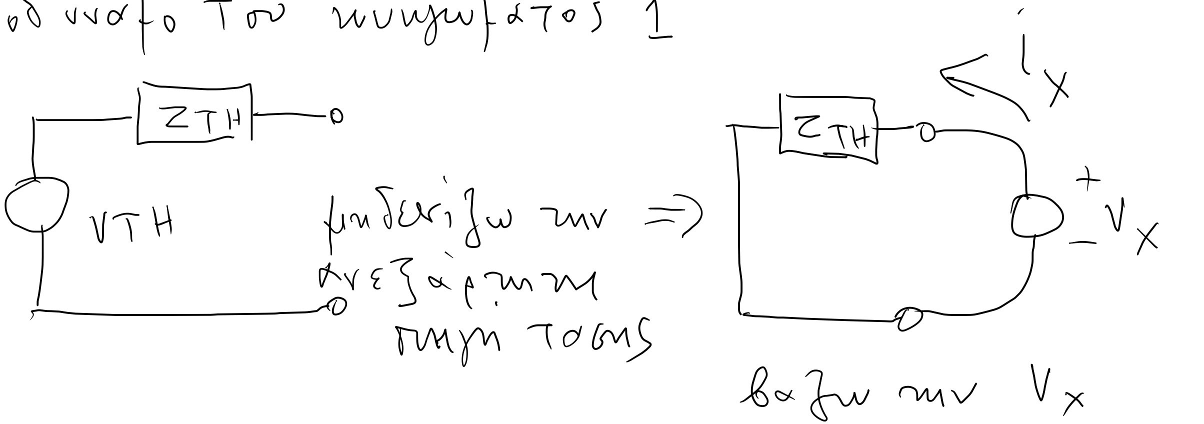
Ένας τρόπος να βρούμε το $Z_{TH} = Z_N$ είναι ο εξής: Στο κύκλωμα 1 βραχυκυκλώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές τάσης και ανοικτοκυκλώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές ρεύματος. Στους ακροδέκτες εξόδου του κυκλώματος 1 βάζουμε μία «δοκιμαστική» πηγή τάσης V_x και μετράμε το ρεύμα i_x που αυτή δίνει στο κύκλωμα 1

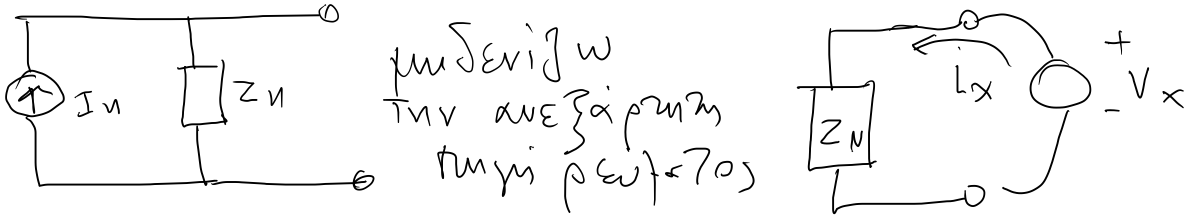
$$Z_N = Z_{TH} = \frac{V_x}{i_x}$$



$$\boxed{Z_{TH} = Z_N = \frac{V_x}{i_x}}$$

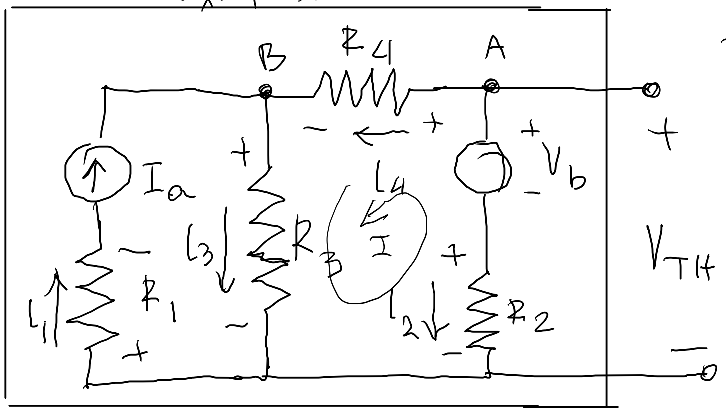
Ισοδύναμο του κυκλώματος 1





<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογισθούν τα V_{TH}, I_N, $R_{TH}=R_N$ για το παρακάτω κύκλωμα:

κύκλωμα 1



Το V_{TH} είναι η τάση ανάμεσα στους ακροδέκτες εξόδου του κυκλώματος 1 αν δεν συνδέσουμε κάποιο άλλο κύκλωμα

$$V_{TH} = V_b + V_{R2}$$

KCL (A) : $i_2 + i_4 = 0$ άρα $\underline{i_4 = -i_2}$

KCL (B) : $I_a + i_4 - i_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{I_a + i_4 = i_3}$

KVL (I) : $-V_{R2} - V_b + V_{R4} + V_{R3} = 0$ δηλ.

$$-i_2 R_2 - V_b + i_4 R_4 + i_3 R_3 = 0 \text{ άρα}$$

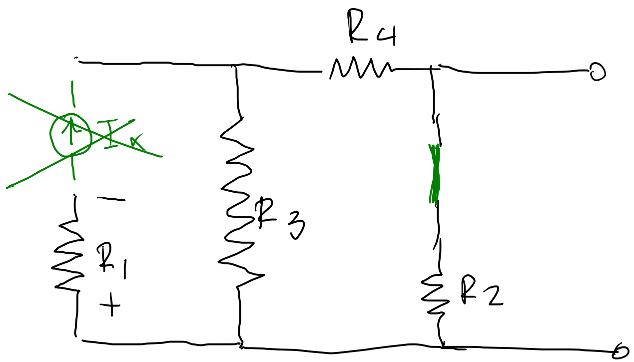
$$\underbrace{i_4}_{-i_2} R_2 - V_b + i_4 \cdot R_4 + (\underbrace{I_a + i_4}_{i_3}) \cdot R_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i_4 \cdot (R_2 + R_4 + R_3) - V_b + I_a R_3 = 0 \quad \text{άρα} \quad i_4 = \frac{V_b - I_a R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \quad \text{επομένως}$$

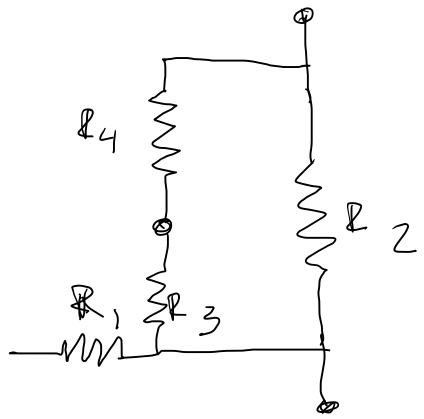
και $i_2 = \dfrac{I_a R_3 - V_b}{R_2 + R_3 + R_4}$, $V_{R2} = i_2 \cdot R_2 = (I_a R_3 - V_b) \dfrac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$

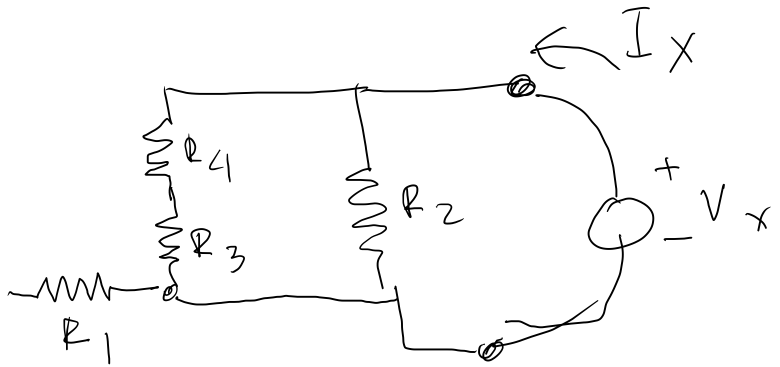
Τελικά $V_{TH} = V_b + (I_a R_3 - V_b) \cdot \dfrac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$.

Για να βρω το R_{TH} μηδενίζω τις πηγές:



δηλ. το κύκλωμα 1 γίνεται:





$$-\frac{V_x}{I_x} = R_2 \,\|\, (R_4+R_3)$$

$$= \frac{R_2(R_4+R_3)}{R_2+R_4+R_3} = R_{TH} = R_N$$

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \left[V_b + (I_a R_3 - V_b)\cdot\frac{R_2}{R_2+R_3+R_4}\right]\cdot\frac{R_2+R_3+R_4}{R_2R_4+R_2R_3}$$

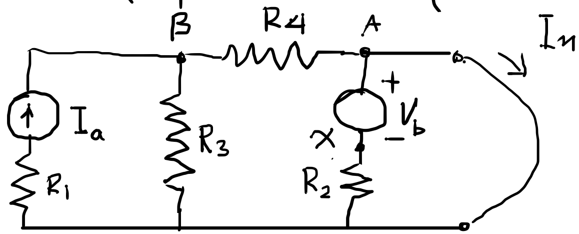
αν κάνω τις πράξεις έχω: $I_\eta = \frac{V_b(R_2+R_3+R_4)}{R_2(R_3+R_4)} + I_a R_3 \cdot \frac{\cancel{R_2}}{\cancel{R_2+R_3+R_4}} \cdot \frac{\cancel{R_2+R_3+R_4}}{\cancel{R_2}(R_3+R_4)} -$

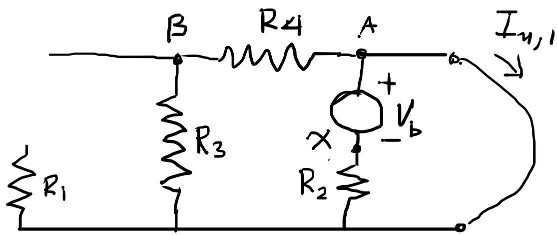
$$- V_b \cdot \frac{R_2}{\cancel{R_2+R_3+R_4}} \cdot \frac{\cancel{R_2+R_3+R_4}}{R_2(R_3+R_4)} \Longleftrightarrow$$

$$I_\eta = \frac{V_b(R_2+R_3+R_4) - V_b R_2}{R_2(R_3+R_4)} + I_a \cdot \frac{R_3}{R_4+R_3} = \frac{V_b}{R_2} + I_a \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \quad (1)$$

Αν πάω να βρω το I_η βραχυκυκλώνοντας τους ακροδέκτες εξόδου και εφαρμόζοντας το θεώρημα της υπέρθεσης θα έχω:

$I_\eta = I_{\eta,1} + I_{\eta,2}$

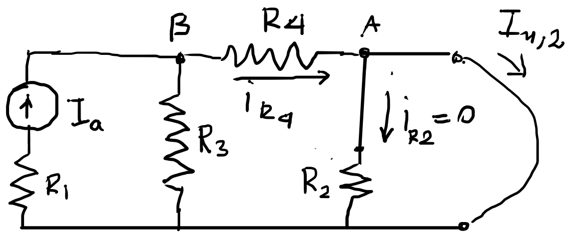




Ο ένας ακροδέκτης της R_2 συνδέεται στον κόμβο x και ο άλλος ακροδέκτης στον κόμβο A. Άρα

$$I_{\eta,1} = \frac{V_b}{R_2}$$

Άρα βρίσκουμε πάλι την σχέση (1)



Η R_2 έχει τάση 0 οπότε το $i_{R2}=0$. Επομένως $I_{\eta,2} = i_{R4}$. Όμως

$i_{R4} = I_a \cdot \frac{R_3}{R_4+R_3}$ (διαιρέτης ρεύματος)