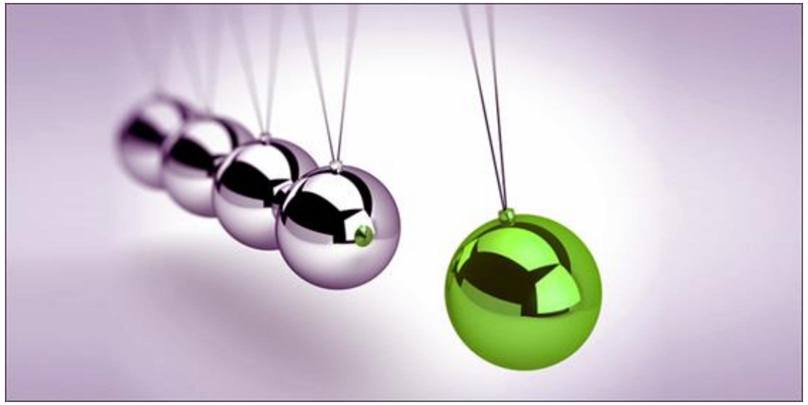
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Αεροδιαστημικής Επιστήμης και Τεχνολογίας



Εργαστήριο Φυσικής Ι
Μηχανική 2024

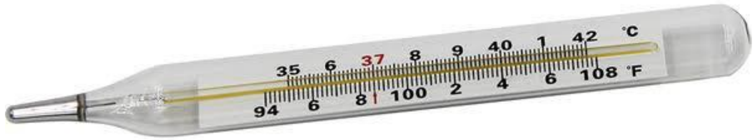
Μετρήσεις, θεωρία σφαλμάτων

Δρ. Χέλης Ιωάννης

2024

Όργανα μετρήσεων

- Αναλογικά όργανα:



- Ψηφιακά όργανα:

Σφάλματα

- Τι είναι το σφάλμα?
  - Η αναπόφευκτη έλλειψη ακρίβειας που συνοδεύει μία πειραματική μέτρηση.
- Ο μαθηματικός ορισμός του σφάλματος της *i*-οστής μέτρησης μιας σειράς μετρήσεων είναι: σφάλμα $e_i = x_i - x_0$
  - όπου x_i είναι η μετρούμενη και x_0 η πραγματική τιμή (συνήθως άγνωστη) ενός φυσικού μεγέθους.
  - μπορεί να είναι είτε αρνητικό είτε θετικό.
  - σκοπός της θεωρίας των σφαλμάτων είναι η ποσοτική εκτίμηση της αβεβαιότητας γύρω από την τιμή μιας μέτρησης ή μιας σειράς μετρήσεων.

Είδη σφαλμάτων

Κατηγοριοποίηση κατά τον τρόπο εμφάνισής τους:

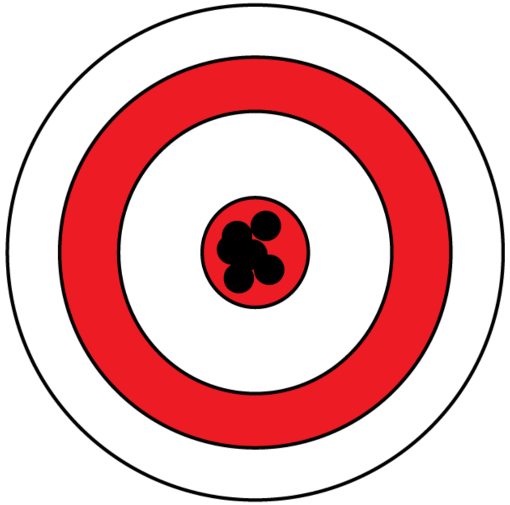
- Συστηματικά σφάλματα:
  - Προβλέψιμα και προς την ίδια κατεύθυνση (π.χ. είτε θετικά είτε αρνητικά).
  - π.χ σφάλμα οργάνου, σφάλμα παράλλαξης, σφάλμα προσεγγίσεων.
- Τυχαία σφάλματα:
  - Απρόβλεπτα, ακανόνιστα, χρονικά μεταβαλλόμενα.
  - Εξίσου πιθανό θετικά ή αρνητικά.
  - π.χ. θερμικός θόρυβος, σφάλμα ανάγνωσης.

Κατηγοριοποίηση κατά την αιτία που τα προκαλεί:

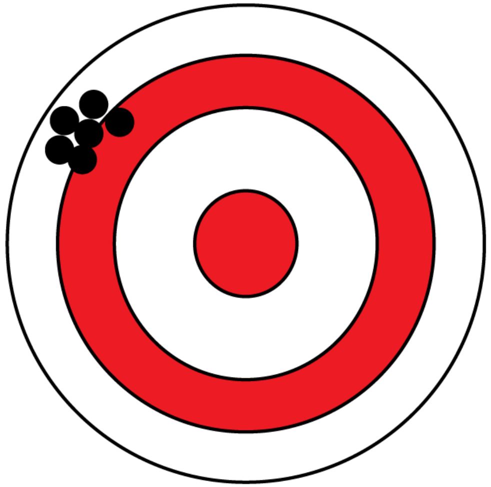
- Υποκειμενικά σφάλματα:
  - Οφείλονται κατά κύριο λόγο στον παρατηρητή.
  - π.χ. σφάλμα ανάγνωσης, σφάλμα παράλλαξης.
- Σφάλματα οργάνου:
  - Οφείλονται κατά κύριο λόγο στο όργανο.
  - π.χ. περιορισμός ακρίβειας οργάνου.

Ευστοχία (accuracy) και ακρίβεια (precision) μετρήσεων

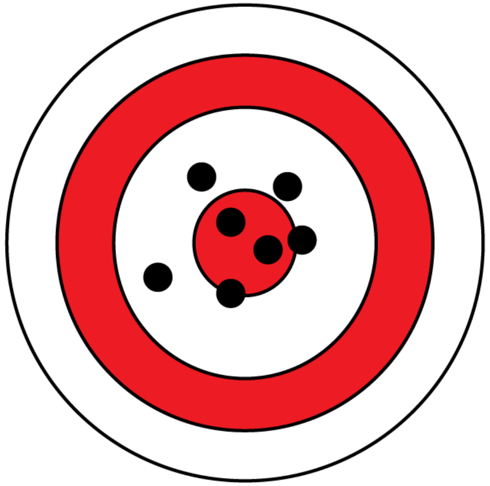
Εύστοχες και ακριβείς μετρήσεις



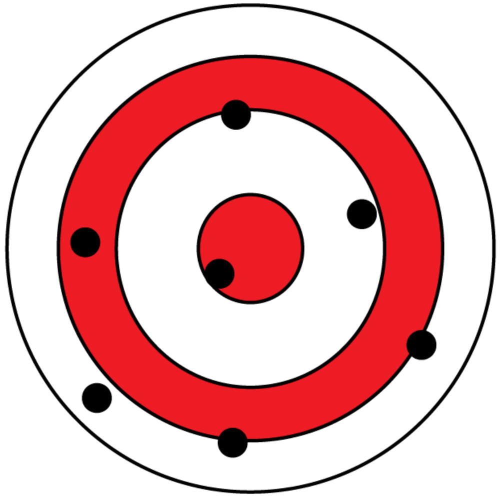
Μη εύστοχες αλλά ακριβείς μετρήσεις



Εύστοχες αλλά ανακριβείς μετρήσεις



Ούτε εύστοχες ούτε ακριβείς μετρήσεις



Χαρακτηριστικά μεγέθη σειράς μετρήσεων

- Έστω ότι πραγματοποιούμε *N* μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους.
- Η μέση τιμή μιας σειράς μετρήσεων ορίζεται ως:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

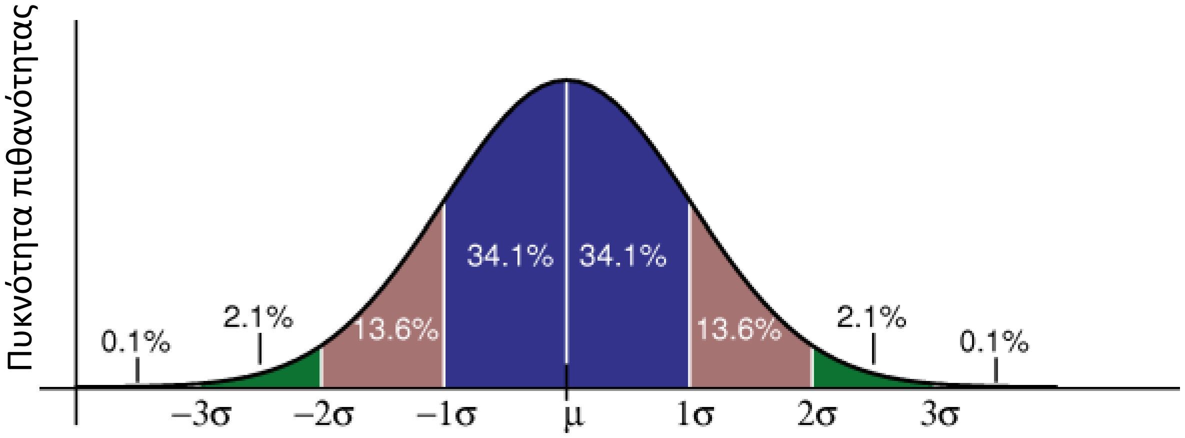
  - Πρόκειται για τον μέσο όρο μιας σειράς μετρήσεων.
  - Για μεγάλο αριθμό μετρήσεων ($\mathrm{N} \rightarrow = \infty$) τείνει να αναιρέσει τα τυχαία σφάλματα και να προσεγγίσει την πραγματική τιμή x_0:

    από τον ορισμό του σφάλματος έχουμε $e_i = x_i - x_0 \Rightarrow x_i = x_0 + e_i$

    αντικαθιστούμε στον ορισμό: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_0 + e_i) = x_0 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i \xrightarrow{\mathrm{N}\rightarrow\infty} x_0$

Κανονική κατανομή (κατανομή Gauss-γκαουσιανή)

- Έχει αποδειχτεί θεωρητικά ότι τα τυχαία σφάλματα μιας σειράς με μεγάλο αριθμό μετρήσεων ακολουθούν την κανονική κατανομή:



$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- ➢ η παράμετρος μ αντιστοιχεί στη μέση τιμή $\bar{x}$ της σειράς των μετρήσεων.
- ➢ η παράμετρος σ (τυπική απόκλιση της μίας μέτρησης) εκφράζει το εύρος της καμπύλης. Μεγάλη τιμή του σ σημαίνει μεγάλη διασπορά στις μετρήσεις (η καμπάνα ανοίγει).

Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής (σφάλμα μέσης τιμής)

- Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της μέσης τιμής μια σειράς μετρήσεων (τυπική απόκλιση της μέσης τιμής) δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}}$$

- Πολλές φορές το σφάλμα εκφράζεται και επί τοις εκατό (%) σύμφωνα με τη σχέση:

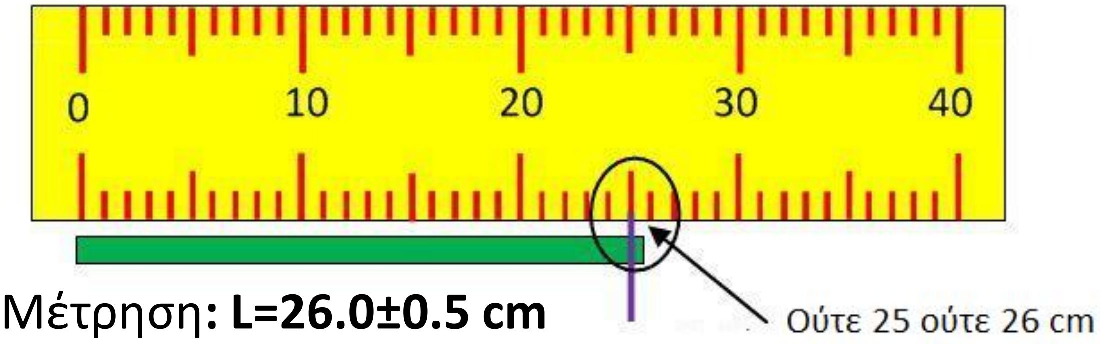
$$\text{σφάλμα επί τοις εκατό} = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}\,\%$$

- Το αποτέλεσμα μιας σειράς μετρήσεων δίνεται πάντα στη μορφή:

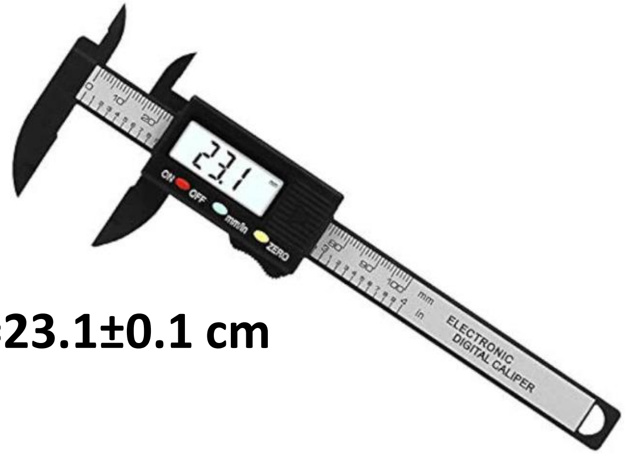
$$x = \overline{x} \pm \delta\overline{x} \text{ (μονάδες)}$$

Σφάλμα ανάγνωσης μίας μέτρησης

- Σφάλμα ανάγνωσης: η αβεβαιότητα με την οποία διαβάζουμε την ένδειξη ενός οργάνου. Διαφορετικής φύσης στα αναλογικά ή ψηφιακά όργανα:
  - Στα αναλογικά: υποκειμενικό σφάλμα ανάγνωσης ανάλογα τον παρατηρητή.
  - Στα ψηφιακά όργανα: αβεβαιότητα αν στο τελευταίο ψηφίο γίνεται στρογγυλοποίηση ή αποκοπή.



Μέτρηση: **L=26.0±0.5 cm**



Μέτρηση: **L=23.1±0.1 cm**

- Κατά σύμβαση στο εργαστήριο θα θεωρούμε ότι το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου θα είναι **το μισό της ελάχιστης υποδιαίρεσης** για αναλογική κλίμακα και η **ελάχιστη δυνατή ένδειξη** για ψηφιακή κλίμακα.

Σημαντικά ψηφία – Στρογγυλοποίηση

- Σημαντικά ψηφία είναι ο αριθμός των ψηφίων τα οποία χρησιμοποιούμε για να δώσουμε το αποτέλεσμα μιας μέτρησης. Παραδείγματα:

Ένα σημαντικό ψηφίο	Δύο σημαντικά ψηφία	Τρία σημαντικά ψηφία	Τέσσερα σημαντικά ψηφία
3	3,0	3,00	3,001
5×10^{3}	$6,7 \times 10^{8}$	0,00400	0,1010
0,004	0,038	4,28	2025
5×10^{-7}	28×10^{-3}	$1,76 \times 10^{4}$	$4,360 \times 10^{-3}$

- Αν θέλουμε να μειώσουμε κατά ένα τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων στρογγυλοποιούμε κατά τα γνωστά:
  - αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 1, 2, 3, 4, απλώς το παραλείπουμε π.χ. $4{,}31 \cong 4{,}3$
  - αν το τελευταίο ψηφίο είναι 5, 6, 7, 8, 9, αυξάνουμε το αμέσως επόμενο ψηφίο κατά ένα π.χ. $4{,}36 \cong 4{,}4$

Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων

- Σύνηθες λάθος είναι η παρουσίαση ενός αριθμητικού αποτελέσματος που βασίζεται σε μια μέτρηση με αδικαιολόγητα πολλά αριθμητικά ψηφία.
- Π.χ. αν η ακτίνα ενός κύκλου έχει μετρηθεί 24,30 cm, η περίμετρος του κύκλου είναι: $2{\cdot}\pi{\cdot}R$= ~~152,68140296446 cm~~. ΛΑΘΟΣ!
- Δεν έχει νόημα μια τέτοια παρουσίαση του αποτελέσματος γιατί την ακτίνα την γνωρίζουμε με ένα σφάλμα (π.χ. 0,10 cm): R=24,30 ± 0,10 cm.
- Η περίμετρος (και κάθε παράγωγο μέγεθος) επομένως θα πρέπει να δοθεί με την ίδια ακρίβεια με την οποία δίνεται το σφάλμα του ($\delta\Pi=2\pi\delta R$=0,63 cm, δες επόμενη διαφάνεια): επομένως $2{\cdot}\pi{\cdot}R$=152,68 cm.
- Για τις ανάγκες του εκπαιδευτικού μας εργαστηρίου συνήθως τα δύο σημαντικά ψηφία για το σφάλμα είναι αρκετά.

Διάδοση σφαλμάτων

- Έστω έχουμε να υπολογίσουμε ένα παράγωγο μέγεθος από μία μέτρηση (π.χ. το εμβαδόν ενός δίσκου: $S=\pi R^2$ έχοντας μετρήσει την ακτίνα R).
- Ποιο είναι το σφάλμα του παράγωγου μεγέθους;;;;;
- Την απάντηση δίνει ο τύπος για τη διάδοση των σφαλμάτων:
- Έστω $f(x)$ ένα παράγωγο μέγεθος το οποίο εξαρτάται από το μετρούμενο μέγεθος x που έχει γνωστό σφάλμα δx. Το σφάλμα δf δίνεται από:

$$\delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x$$

- Στο παράδειγμα: $\delta S=2\cdot\pi\cdot R\cdot\delta R$. Αν $R=23{,}10\pm0{,}20$ cm τότε $S=1676 \pm 29$ cm^2.

Διάδοση σφαλμάτων

- Έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $f(x, y, z)$ που εξαρτάται από πολλές μετρούμενες μεταβλητές (έστω x, y, z) με γνωστό σφάλμα δx, δy, δz. Το δf δίνεται από:

$$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \delta z$$

- Εφαρμογή: Έστω η $A = f(x, y) = Cx^{\mu} y^{\nu}$. Με εφαρμογή του τύπου της διάδοσης των σφαλμάτων έχουμε:

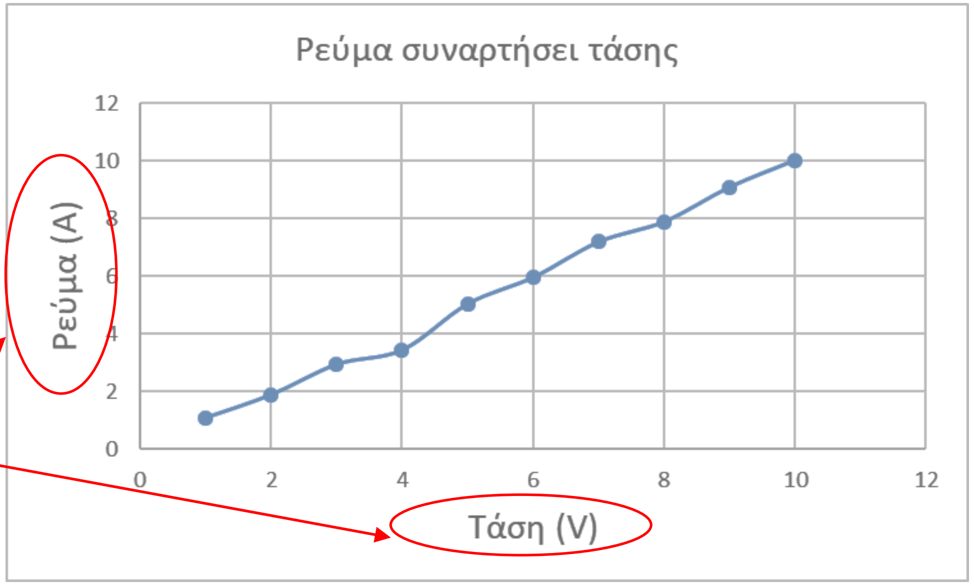
$$\frac{\delta A}{A} = |\mu| \frac{\delta x}{x} + |\nu| \frac{\delta y}{y}$$

- Πολλές φορές για την διάδοση των σφαλμάτων μέσης τιμής χρησιμοποιείται ο πιο ακριβής γενικός τύπος:

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right)^2}$$

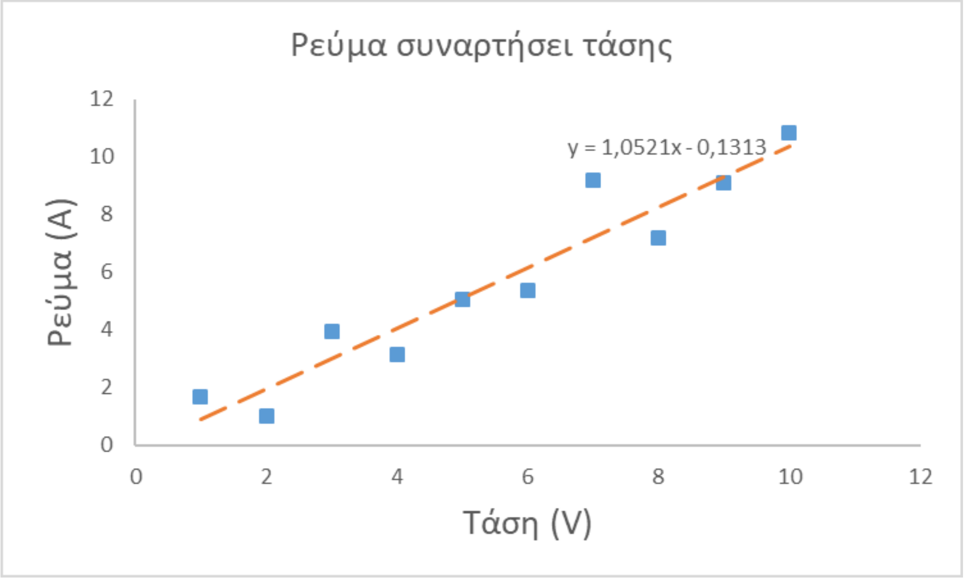
Γραφικές παραστάσεις

- Πολύ χρήσιμες για να παρουσιάζουμε εποπτικά τα πειραματικά μετρούμενα μεγέθη.
- Φαίνεται αμέσως ο νόμος που ακολουθούν οι σχετιζόμενες ποσότητες (π.χ. γραμμικός, εκθετικός, πολυωνυμικός κλπ).
- Η ανεξάρτητη μεταβλητή πηγαίνει συνήθως στον άξονα *x* και η εξαρτημένη στον κάθετο άξονα *y*.
- Δεν ξεχνάμε να βάλουμε τίτλους στους άξονες **και σε παρένθεση τις μονάδες!**



Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

- Έστω ότι έχουμε μια σειρά μετρήσεων που ξέρουμε ότι ακολουθούν μια γραμμική σχέση (έστω $y = \alpha x + \beta$).
- Λόγω σφαλμάτων οι μετρήσεις δεν βρίσκονται πάνω σε μια ιδανική ευθεία αλλά είναι διασπαρμένες και σχηματίζουν αδρά μια ευθεία.
- Για να βρούμε τη βέλτιστη ευθεία που περιγράφεται καλύτερα από τις διαθέσιμες μετρήσεις χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων**.
- Δηλαδή υπολογίζουμε εκείνη την ευθεία που έχει το ελάχιστο άθροισμα των τετραγώνων της απόστασης από τα πειραματικά σημεία.



Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

- Η μέθοδος μας δίνει τους αγνώστους *α* (κλίση) και *β* (τεταγμένη επί της αρχής) της βέλτιστης ευθείας *y=αx+β* σύμφωνα με τους τύπους:

$$\alpha = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad \beta = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

- και τα αντίστοιχα σφάλματα *δα*, *δβ* είναι:

$$\delta\beta = \sqrt{\frac{1}{N-2}\cdot\frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - \alpha x_i - \beta)^2}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad \delta\alpha = \delta\beta\sqrt{\frac{N}{\sum x_i^2}}$$

- Οι παραπάνω συντελεστές και τα σφάλματά τους μπορούν να υπολογιστούν εύκολα και στο excel με τη βοήθεια της συνάρτησης LINEST.