ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΑΕΡΟΔΙΑΣΤΗΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

AERO 101

ΔΙΑΛΕΞΗ No. 6

ΠΥΡΑΥΛΟΙ, ΑΔΟ, Ειδική Ώθηση

7.11.23

Καθ. Β. Λάππας

Email: valappas@aerospace.uoa.gr

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΧΟΡΗΓΟΙ:

ΧΟΡΗΓΟΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

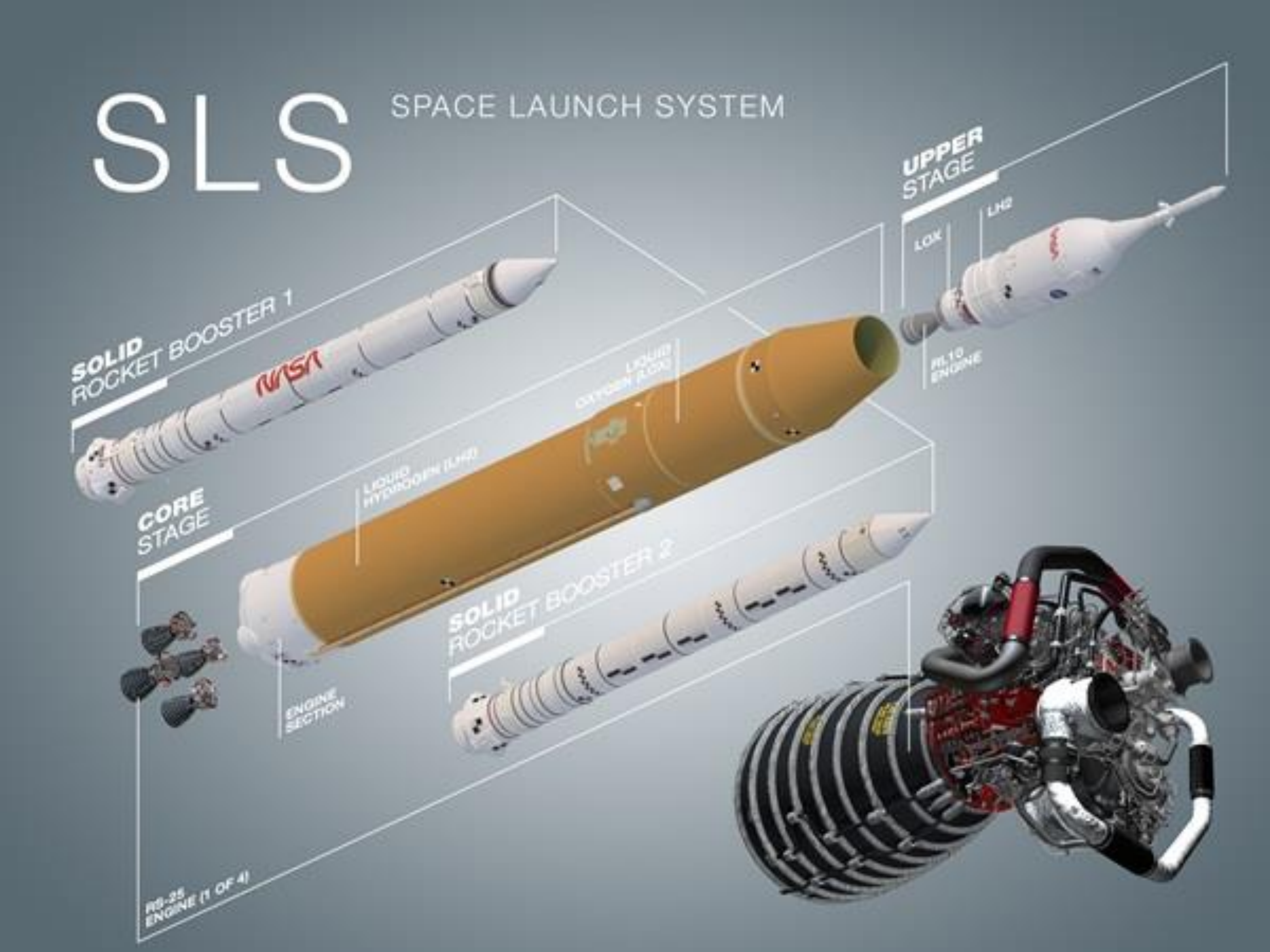
Νέα του Τμήματος

- Link: https://eclass.uoa.gr/modules/user/index.php?course=AEROSPACE152
- Διαλέξεις στο Youtube: https://www.youtube.com/@ees1vl/videos
- Πρακτική/Internships στην ESA: https://www.esa.int/About_Us/Careers_at_ESA/Student_Internships2
- ESA Education office: https://www.esa.int/Education

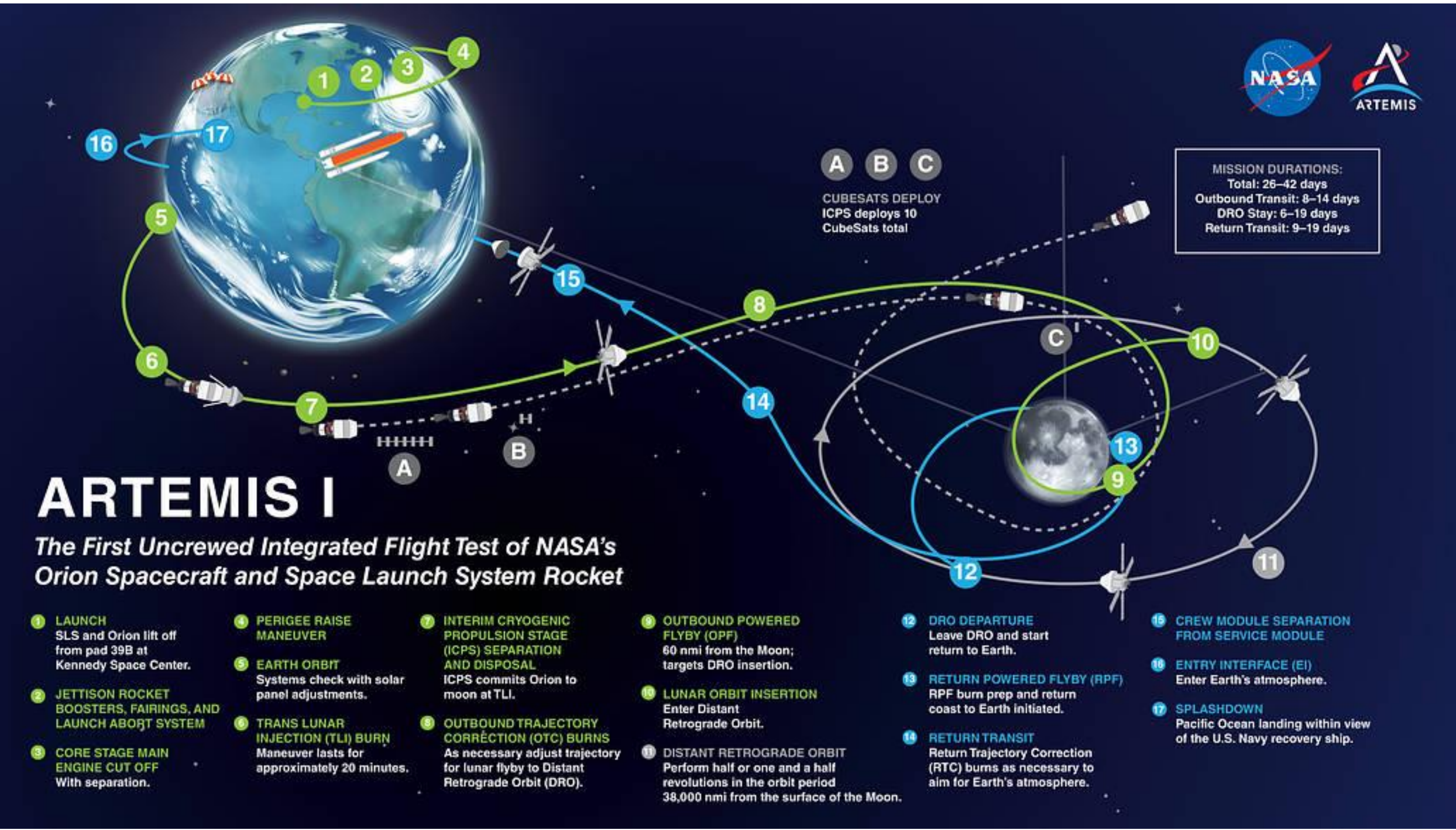
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΕΚΘΕΣΗ Life in Space!

https://www.more.com/theater/children/life-in-space/


SLS
SPACE LAUNCH SYSTEM
UPPER STAGE
LOX
LH2
RL10 ENGINE
SOLID ROCKET BOOSTER 1
NASA
LIQUID OXYGEN (LOX)
LIQUID HYDROGEN (LH2)
CORE STAGE
SOLID ROCKET BOOSTER 2
ENGINE SECTION
RS-25 ENGINE (1 OF 4)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837



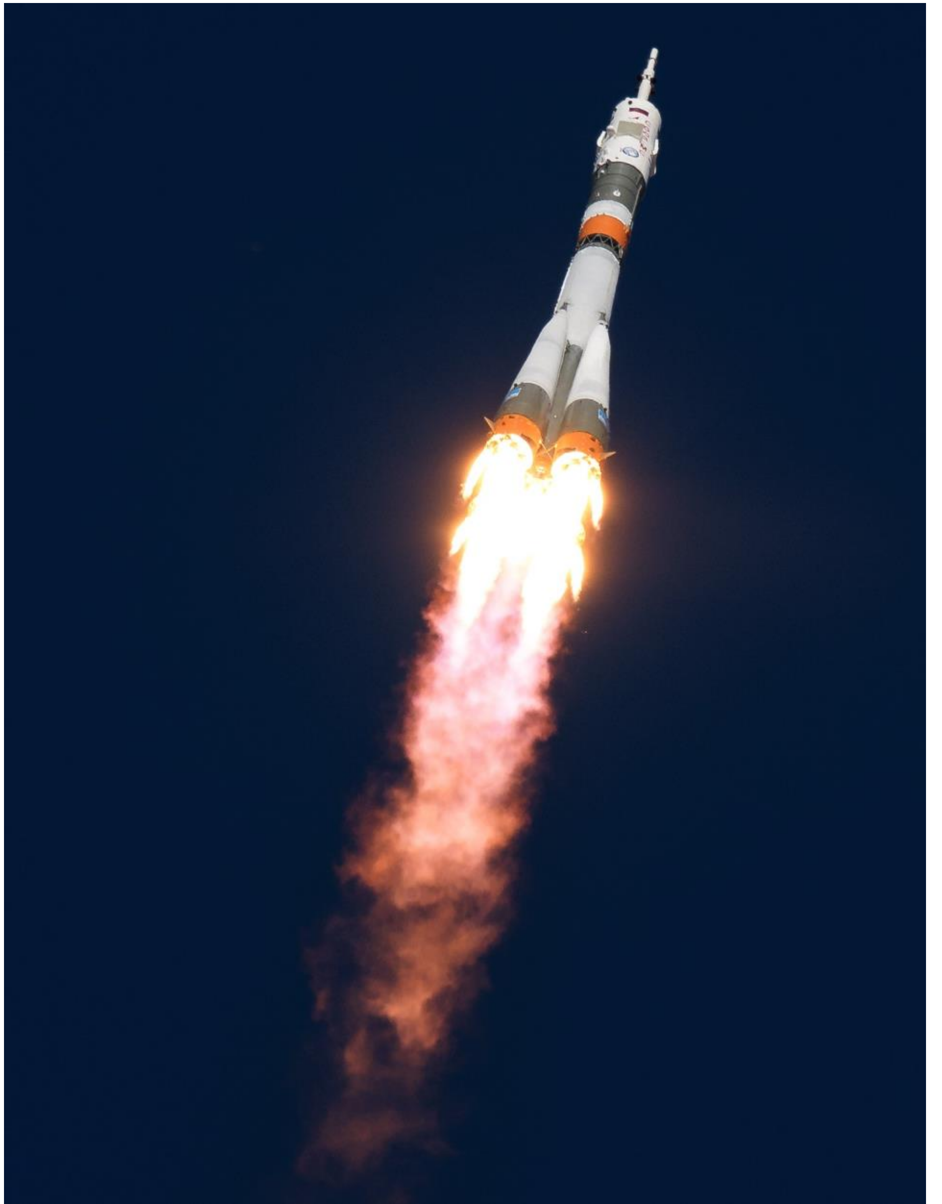

NASA

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

IRIS²: the new EU Secure Satellite Constellation
Infrastructure for Resilience, Interconnectivity and Security by Satellite

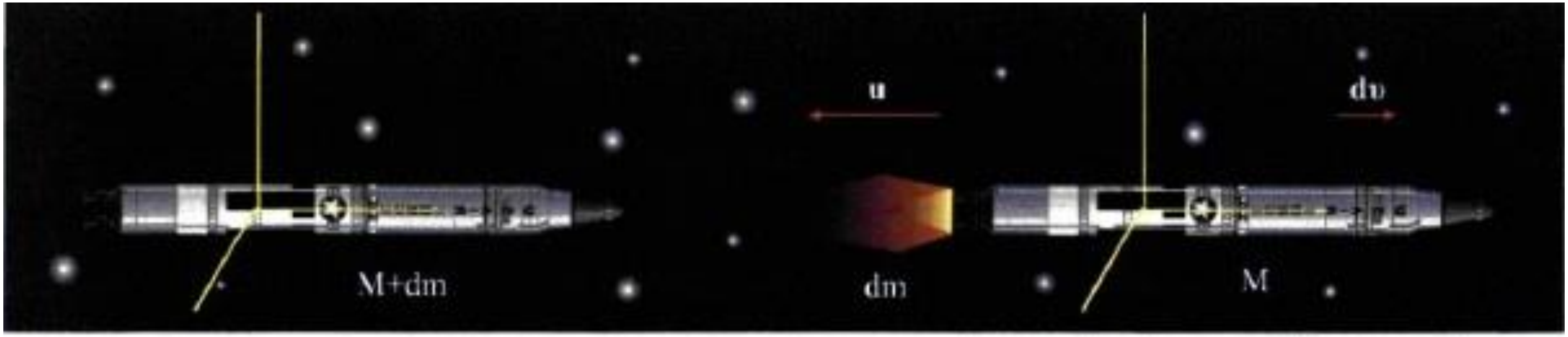
Προώθηση Πυραύλου (Ι)

- Στην περίπτωση των πυραύλων και των αεριωθούμενων αεροπλάνων τα καυσαέρια ωθούνται προς τα πίσω με δύναμη **F** που ασκείται σ' αυτά από τα τοιχώματα του χώρου καύσης.
- Σύμφωνα με την δράσης αντίδρασης και τα καυσαέρια ωθούν το πύραυλο ή το αεροπλάνο προς τα εμπρός με προωστική δύναμη **F'** αντίθετη της **F.** Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε έναν πύραυλο που κινείται στο διάστημα (μακριά από κάθε βαρυτική έλξη).
- Θα εφαρμόσουμε την ΑΔΟ ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.
- Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις το κέντρο μάζας (άρα και το σύστημα αναφοράς μας) δε θα μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση, ανεξάρτητα με οποιαδήποτε μεταβολή συμβεί στην κινητική κατάσταση των τμημάτων που απαρτίζουν το σύστημα.



Προώθηση Πυραύλου (II)

- Ο πύραυλος κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα **M+dm** και μηδενική ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε.
- Ο πύραυλος, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα **dt,** εκτοξεύει προς τα πίσω μια ποσότητα καυσαερίων **dm** με ταχύτητα **u** ως προς το κέντρο μάζας.
- Πρακτικά η ταχύτητα αυτή είναι και η ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο.
- Ο πύραυλος τώρα έχει αυξήσει την ταχύτητά του σε σχέση με πριν κατά **du** και η μάζα του έχει ελαττωθεί κατά **dm**
- Ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με **du** προς τα μπροστά.



Πύραυλοι - ΑΔΟ

- Κίνηση πυραύλων – Κλασικό πρόβλημα

Πύραυλος με αρχική μάζα M_Π

Εκτοξεύει μάζα με ταχύτητα $V_{εκτ}$ (σχετικά με τον πύραυλο).

Ποια είναι η ταχύτητα όταν η μάζα του είναι m

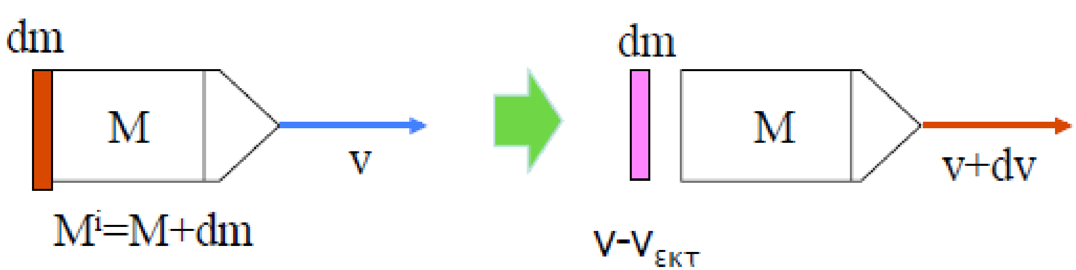
Λύση

Για ένα απομονωμένο σύστημα (πύραυλος-εξάτμιση) ξέρουμε ότι

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow p = σταθ.$$

Ας υποθέσουμε ότι η μάζα του πυραύλου αλλάζει από M+dm σε M

και η ταχύτητά του από v σε v+dv



Πύραυλοι - ΑΔΟ

Εφαρμόζοντας διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$p_i = p_f \Rightarrow \left(M + \Delta m\right)\mathrm{v} = M\left(\mathrm{v} + \Delta\mathrm{v}\right) + \Delta m\left(\mathrm{v} - \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\right)$$

$$\Rightarrow M\mathrm{v} + \mathrm{v}\Delta m = \left(M\mathrm{v} + M\Delta\mathrm{v} + \mathrm{v}\Delta m - \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\Delta m\right)$$

$$\Rightarrow M\Delta\mathrm{v} = \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\Delta m$$

Έστω τώρα ότι Δt → 0 τότε Δm →dm και ΔM →dM ενώ dm = -dM.

$\Delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow M d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau} dM \Rightarrow d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\frac{dM}{M}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_f} d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M} \Rightarrow \mathrm{v}_f - \mathrm{v}_i = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\ln\left(M\right)\Big|_{M_i}^{M_f}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_f = \mathrm{v}_i - \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\left(\ln M_f - \ln M_i\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{v}_f = \mathrm{v}_i + \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\left(\ln\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

Απειρίζεται καθώς το $M_f \rightarrow 0$

Αν η αρχική μάζα του πυραύλου είναι M = 10 x m τότε $v = 2.3v_{\varepsilon\kappa\tau}$

Αν η μάζα είναι M = 100 x m τότε $v = 4.6v_{\varepsilon\kappa\tau}$

Το κέρδος σε ταχύτητα πολύ μικρό μεγαλώνοντας τη μάζα του πυραύλου

Πύραυλοι – ΑΔΟ – Πρόβλημα 1

- **1. Ένας πύραυλος έχει αρχικά μάζα $m_o=2x10^4$kg, ρυθμό αποβολής αερίων $\frac{dm}{dt}$ =-100Kg/s και ταχύτητα αποβολής αερίων ως προς τον πύραυλο σταθερή, με μέτρο 980m/s. Ο πύραυλος πυροδοτείται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης. Μετά πόσο χρόνο από την πυροδότησή του θα αφήσει το έδαφος; Αγνοήστε την δύναμη που ασκεί το έδαφος στον πύραυλο. ($g=9.8m/s^2$)**

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=m\vec{g}+\vec{\upsilon}_{exh}\frac{dm}{dt}$$

- Για να αφήσει το έδαφος πρέπει $m\frac{d\vec{V}}{dt}\geq 0$, $m\vec{g}+\vec{\upsilon}_{exh}\frac{dm}{dt}\geq 0$ ή

$m\vec{g}+\vec{\upsilon}_{exh}(-\alpha)\geq 0$, αλλά $m=m_o-at$ οπότε $(m_o-at\ )\vec{g}+\vec{\upsilon}_{exh}(-\alpha)\geq 0$

ή $-(m_o-at\ )g+\alpha\upsilon_{exh}\geq 0 \Rightarrow agt\geq m_og-a\upsilon_{exh}$

$$t\geq\frac{m_o}{a}-\frac{\upsilon_{exh}}{g}\Rightarrow t\geq 100s$$

Πύραυλοι – ΑΔΟ – Πρόβλημα 2

2. **Πύραυλος που βρίσκεται στο διάστημα, όπου η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα, αρχικά ηρεμεί ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Την χρονική στιγμή t_o=0 τίθεται σε λειτουργία το σύστημα πυροδότησης του.**

α) ποιο ποσοστό της αρχικής του μάζας αποτελούν τα αέρια που θα έχουν αποβληθεί όταν το μέτρο της ταχύτητας του πυραύλου γίνει ίσο με το μέτρο της ταχύτητας εκπομπής των αερίων ως προς τον πύραυλο; (Θεωρούμε ότι η ταχύτητα εκπομπής των αερίων ως προς τον πύραυλο παραμένει σταθερή)

β) Έστω ότι η αρχική μάζα των καυσίμων είναι $m_{ΟΚ}=49m_{ΟΠ}$, όπου $m_{ΟΠ}$ η μάζα του πυραύλου χωρίς καύσιμα και η ταχύτητα εκπομπής αερίων ως προς τον πύραυλο είναι $υ_{ex}=3x10^3$m/s. Ποιά η τελική ταχύτητα που θα αποκτήσει ο πύραυλος;

Πύραυλοι – ΑΔΟ – Πρόβλημα 2

α) $F_{ext} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt} - \vec{\upsilon}_{exh}\dfrac{dm}{dt}$

Εδώ $\vec{F}_{ext} = 0$

$$m\frac{dV}{dt} = \vec{\upsilon}_{exh}\frac{dm}{dt} \Rightarrow mdV = \vec{\upsilon}_{exh}dm \Rightarrow dV = \vec{\upsilon}_{exh}\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_0^{\vec{V}} dV = \upsilon_{exh}\int_{m_o}^{m}\frac{dm}{m} \Rightarrow V = \vec{\upsilon}_{exh}\ln\frac{m}{m_o}$$

και κατά τον x: $V = -\upsilon_{exh}\ln\dfrac{m}{m_o} = \upsilon_{exh}\ln\dfrac{m_o}{m}$

όταν $\quad V = \upsilon_{exh}, \; \upsilon_{exh} = \upsilon_{exh}\ln\dfrac{m_o}{m} \Rightarrow \ln\dfrac{m_o}{m} = 1 \Rightarrow e^1 = \dfrac{m_o}{m}$

Πύραυλοι – ΑΔΟ – Πρόβλημα 2

m_o: αρχική μάζα του πυραύλου, m η μάζα του πυραύλου τη χρονική στιγμή που $V=\upsilon_{exh}$. Επομένως το ποσοστό της αρχικής μάζας του πυραύλου που θα αποτελούν τα αέρια που έχουν αποβληθεί τότε θα είναι:

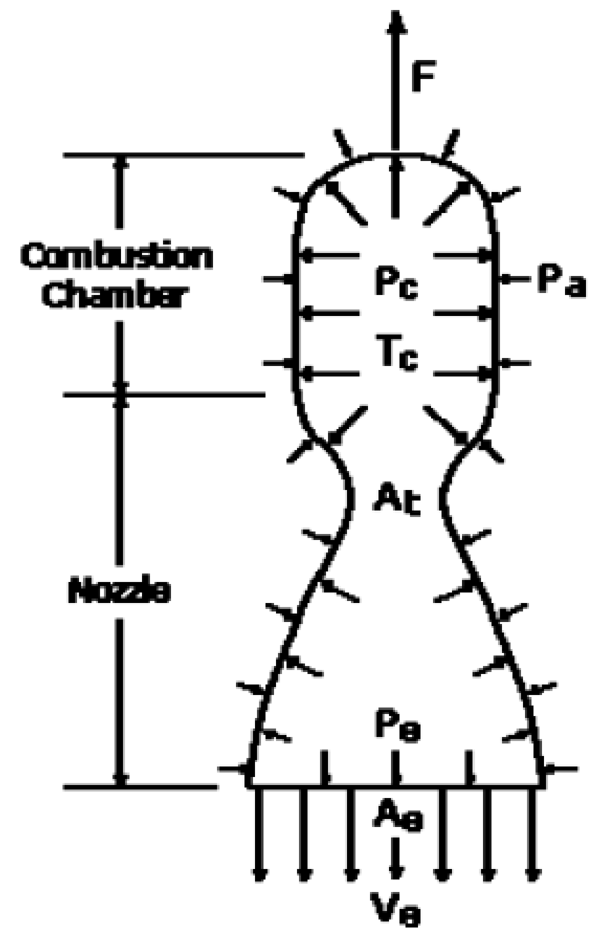
$$\frac{m_o-\frac{m}{e}}{m_o}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

β) $V_{\tau\varepsilon\lambda}=+\vec{\upsilon}_{exh}\ln\frac{m_{\tau\varepsilon\lambda}}{m_o}$, η $V_{\tau\varepsilon\lambda}$ αντιστοιχεί στην τελική ταχύτητα του πυραύλου όταν θα έχουν αδειάσει όλα τα καύσιμα και επομένως $m_{\tau\varepsilon\lambda}=m_{o\pi}$, $m_o=m_{o\pi}+m_{o\kappa}$

$$V_{\tau\varepsilon\lambda}=-\upsilon_{exh}\ln\frac{m_{\tau\varepsilon\lambda}}{m_o}=\upsilon_{exh}\ln\frac{m_o}{m_{\tau\varepsilon\lambda}}=\upsilon_{exh}\ln\frac{m_{o\pi}+m_{o\kappa}}{m_{o\pi}}=\upsilon_{exh}\ln\left(1+\frac{m_{o\kappa}}{m_{o\pi}}\right)$$

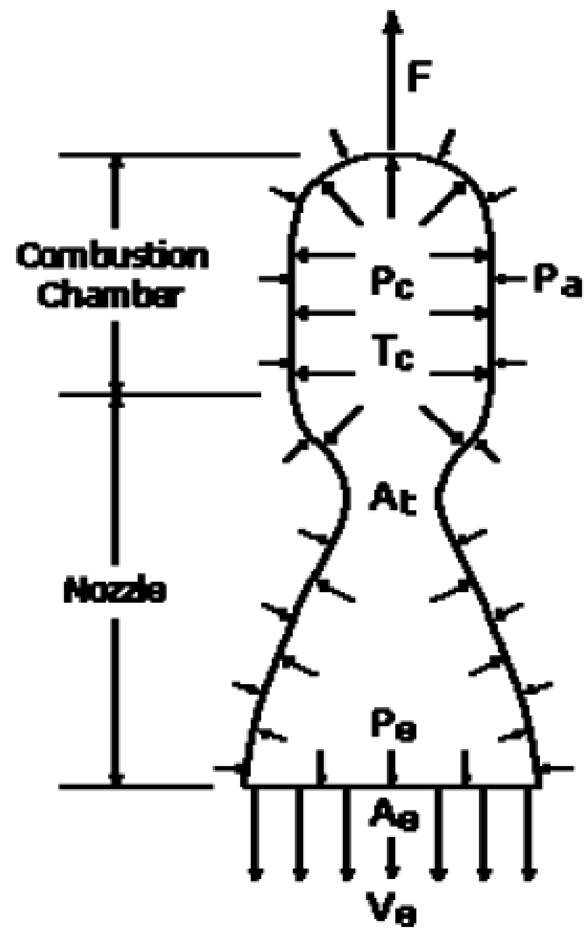
Αρχή Λειτουργίας Πυραύλου
Ειδική Ώθηση

- Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται γραφικά ο *θάλαμος καύσης* (combustion chamber) ενός πυραυλικού κινητήρα με κατάλληλα σχεδιαζόμενο άνοιγμα το οποίο καλείται *ακροφύσιο* (nozzle) για την διαφυγή των καυσαερίων.
- Ο σχεδιασμός του θαλάμου καύσης και του ακροφύσιου εξόδου είναι τέτοιος ώστε η κατανομή της πίεσης εντός του θαλάμου να είναι ασύμμετρη, δηλαδή η πίεση να μεταβάλλεται πολύ λίγο εντός του θαλάμου καύσης αλλά να μειώνεται ελαφρά στην περιοχή του ακροφύσιου.
- Η δύναμη που αναπτύσσεται ως αποτέλεσμα της διαφοράς πίεσης εσωτερικά και εξωτερικά του θαλάμου έχει αντίθετη φορά αυτής των απαερίων, με αποτέλεσμα να ωθεί το θάλαμο προς τα επάνω και γι΄ αυτό καλείται ώση (thrust).



Αρχή Λειτουργίας Πυραύλου
Ειδική Ώθηση

- Η δημιουργία πολύ υψηλής ταχύτητας καυσαερίων σε τέτοιες διατάξεις απαιτεί υψηλές θερμοκρασίες και πιέσεις που επιτυγχάνονται μόνον με την μείωση του Μοριακού Βάρους (ΜΒ) των καυσαερίων όσο το δυνατό περισσότερο και την καύση εξειδικευμένων καυσίμων υλών, τα οποία καλούνται *προωθητικά* ή *προωθητικές ουσίες* (propellants), όρος που καλύπτει όλη τη γκάμα καυσίμων για πυραύλους
- Επίσης απαιτείται να μειωθεί όσο το δυνατόν περισσότερο η πίεση των αερίων στην εσωτερική περιοχή του ακροφύσιου δημιουργώντας μεγάλο λόγο διατομής, ο οποίος ορίζεται ως το πηλίκο του εμβαδού της επιφάνειας εξόδου *Ae* προς το εμβαδό
- της επιφάνειας της στένωσης (λαιμός-throat) *At* που εμφανίζεται εντός της γεωμετρίας του θαλάμου καύσης.



Αρχή Λειτουργίας Πυραύλου
Ειδική Ώθηση

Η ώση *F* υπολογιζόμενη από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ορμής για τον πυραυλικό κινητήρα του Σχήματος 1, δίνεται από τη Σχέση 1 [2-4]:

$$F = qV_e + (P_e - P_a)A_e \qquad (1)$$

όπου *q* είναι ο ρυθμός ροής μάζας των καυσαερίων στην έξοδο, P_a η πίεση της ατμόσφαιρας εξωτερικά του θαλάμου, P_e η πίεση των καυσαερίων, A_e το εμβαδόν διατομής στην έξοδο του ακροφύσιου και V_e η ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων. Όπως είναι φανερό, η μέγιστη παραγόμενη ώση προκύπτει όταν η πίεση των καυσαερίων είναι ίση με την πίεση της ατμόσφαιρας εξωτερικά του θαλάμου (P_e=P_a).

Αντίστοιχο χρήσιμο μέγεθος της ώσης είναι η *ειδική ώθηση* (specific impulse) I_{sp} ενός πυραυλικού συστήματος, η οποία ορίζεται από τη Σχέση 2 ως ο λόγος της ώσης δια τον ρυθμό ροής του εξερχόμενου βάρους των καυσαερίων [3]:

$$I_{sp} = \frac{F}{qg_o} \qquad (2)$$

όπου *F* η ώση, *q* είναι ο ρυθμός ροής μάζας των καυσαερίων στην έξοδο, και g_o η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας (9.80665 m/s^2).

Ρυθμός ροής μάζας (κατανάλωση καυσίμου) *q* ή dm/dt ή $\dot{m}$

Αρχή Λειτουργίας Πυραύλου
Ειδική Ώθηση

- **Η ειδική ώθηση έχει διαστάσεις χρόνου και εκφράζεται σε μονάδες s.**
- Εάν η ώση και ο ρυθμός ροής του εξερχόμενου βάρους των καυσαερίων παραμένουν σταθερές καθ' όλη την διάρκεια της καύσης του προωθητικού, **η ειδική ώθηση αντιστοιχεί στον χρόνο για τον οποίο ο πυραυλικός κινητήρας παρέχει ώση ίση με το βάρος του προωθητικού που καταναλώνει**
- Για δεδομένο κινητήρα, η ειδική ώθηση έχει διαφορετική τιμή στην επιφάνεια της θάλασσας στη Γη από ότι στο κενό στο Διάστημα, μιας και η πίεση της ατμόσφαιρας που χρησιμοποιείται στον ορισμό της ώσης λαμβάνει εντελώς διαφορετική τιμή στις δύο αυτές καταστάσεις
- Λόγω των απωλειών που εμφανίζονται σε κάθε πυραυλικός κινητήρα (μη αποτελεσματική καύση του προωθητικού, θερμικές απώλειες του ακροφύσιου, μηχανικές απώλειες των αντλητικών συστημάτων κλπ), οι πραγματικές τιμές της ειδικής ώθησης διαφέρουν από τις θεωρητικά υπολογιζόμενες σε ιδανικά ακροφύσια.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Χαρακτηριστική ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων

- Τέλος ένα ακόμα χρήσιμο μέγεθος για την αποτίμηση της απόδοσης ενός πυραυλικού κινητήρα είναι η *χαρακτηριστική ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων* (characteristic exhaust velocity), *C^* (ή V_{exit})*, η οποία είναι μέτρο της διαθέσιμης ενέργειας από την καύση του προωθητικού, η οποία δίνεται στη Σχέση 3:

$$C^* = \frac{P_c A_t}{q} \qquad (3)$$

- όπου P_c είναι η πίεση στο εσωτερικό του θαλάμου καύσης και A_t το εμβαδόν διατομής στο σημείο στένωσης (λαιμός) του ακροφύσιου, q ρυθμός ροής του εξερχόμενου βάρους των καυσαερίων.
- Ένα συνηθισμένο εύρος μετρούμενων τιμών για την χαρακτηριστική ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων C^* αναλόγως του χρησιμοποιούμενου προωθητικού μεταξύ 1333 m/s για την υδραζίνη ως μονοπροωθητικό και 2360 m/s για κρυογενικό μίγμα υδρογόνου/οξυγόνου.

Κρίσιμα Μεγέθη - Πύραυλοι

- Ώση (Thrust), $F = \dot{m}C$ ή $F = \dot{m}\,\mathrm{V}_{EKT}$
- Ειδική Ώθηση $\mathrm{I}_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g} = \frac{C}{g}$
- Ταχύτητα $\Delta V = \mathrm{C}\ln\left(\frac{m_{initial}}{m_{final}}\right)$

Εξίσωση TsiolkovskY/Rocket Equation

$m_{initial}, m_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta}, m_o$ = Αρχική μάζα πυραύλου πριν την πυροδότηση

$m_{final} m_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta}, m_\tau$ = Τελική μάζα πυραύλου μετά την πυροδότηση

K. Tsiolkovsky

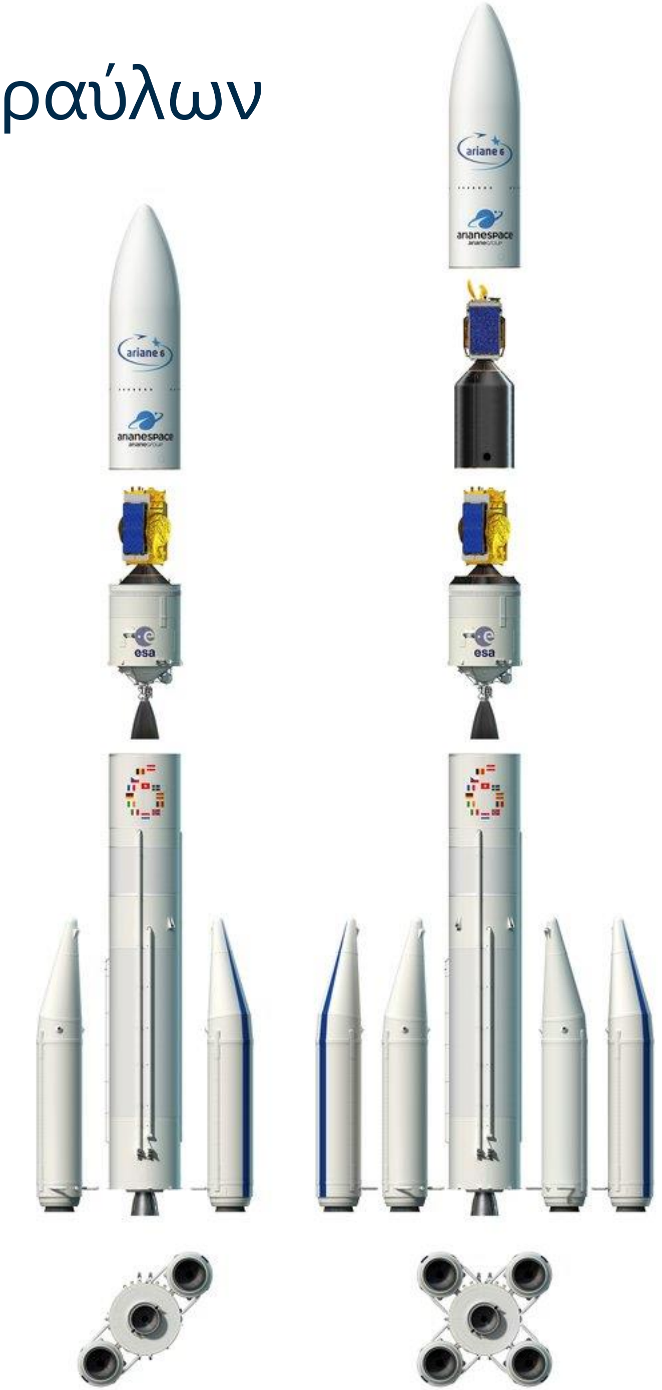
- Θεωρητικός «πατέρας» της σύγχρονης Διαστημικής επιστήμης είναι ο Ρώσος επιστήμονας Konstantin Tsiolkovsky (1857–1935), ο οποίος, παρότι ήταν ουσιαστικά αυτοδίδακτος, δημοσίευσε πολλές μελέτες σχετικές με την προώθηση των πυραύλων και τα ταξίδια στο Διάστημα
- Οι θεωρητικές του αναλύσεις τον οδήγησαν στην διατύπωση **του θεμελιώδους νόμου που περιγράφει την τελική ταχύτητα ενός πυραύλου**, με βάση το απόθεμα των καυσίμων του και την ταχύτητα εκτόνωσης των προϊόντων της καύσης.
- Παράλληλα, ήταν ο πρώτος που πρότεινε την κατασκευή πυραύλων πολλαπλών σταδίων, καθώς και την χρήση υγρού υδρογόνου και οξυγόνου θεωρώντας τα ιδεώδη προωθητικά καύσιμα.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Στάδια Πυραύλων

- Μείωση βάρους/μάζας
- Αύξηση ταχύτητας
- Πως υπολογίζουμε την συνολική ταχύτητα του πυραύλου με πολλαπλά στάδια;

$$\Delta V = \mathrm{C} \ln\left(\frac{m_{initial}}{m_{final}}\right)$$



Στάδια Πυραύλων

$$\Delta V = I_{sp} g_o \ln\left(\frac{m_{intial}}{m_{final}}\right)$$

- Κάθε στάδιο έχει αρχική/τελική μάζα
- Το I_{sp} για κάθε στάδιο μπορεί να διαφέρει
- Συνολικό ΔV: άθροισμα του ΔV του κάθε σταδίου

$$\Delta V_{total} = \Delta V_{stage\ 1} + \Delta V_{stage\ 2} + \ldots + \Delta V_{stage\ n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V_{total} &= I_{sp\ stage\ 1}\ g_o \ln\left(\frac{m_{initial\ stage\ 1}}{m_{final\ stage\ 1}}\right) \\ &+ I_{sp\ stage\ 2}\ g_o \ln\left(\frac{m_{initial\ stage\ 2}}{m_{final\ stage\ 2}}\right) + \ldots \\ &+ I_{sp\ stage\ n}\ g_o \ln\left(\frac{m_{initial\ stage\ n}}{m_{final\ stage\ n}}\right) \end{aligned}}$$

Στάδια Πυραύλων

- Τι χρησιμοποιούμε για αρχική και τελική μάζα των σταδίων ενός πυραύλου:
- Αρχική μάζα: συνολική μάζα (βάρος) πριν την εκτόξευση
- Τελική μάζα; Η αρχική μάζα κάθε σταδίου (συμπεριλαμβανομένου των επόμενων σταδίων) μείον την μάζα των καυσίμων που έχουν καταναλωθεί στο συγκεκριμένο στάδιο (π.χ. στάδιο 1):

$$m_{\text{final stage 1}} = m_{\text{initial vehicle}} - m_{\text{propellant stage 1}}$$

- Στάδιο 2, 3:

$$m_{\text{initial stage 2}} = m_{\text{final stage 1}} - m_{\text{structure stage 1}}$$

$$m_{\text{final stage 2}} = m_{\text{initial stage 2}} - m_{\text{propellant stage 2}}$$

Πλεονεκτήματα/Μειονεκτήματα

- Πλεονεκτήματα:
  - Αύξηση φορτίου σε τροχιά για το ίδιο μέγεθος πυραύλου
  - Αύξηση ταχύτητας με το ίδιο μέγεθος πυραύλου
  - Μείωση της απόδοσης (I_{sp}) για την μεταφορά φορτίων σε τροχιά
- Μειονεκτήματα
  - Αύξηση πολυπλοκότητας (μηχανών, μηχανισμών)
  - Μείωση της αξιοπιστίας του συστήματος (μεγαλύτερος αριθμός μηχανών κλπ)
  - Αύξηση κόστους
- Πόσα στάδια πρέπει να έχει ένας πύραυλος;;;;

Παράδειγμα - Άσκηση

- Ένας πύραυλος 2 σταδίων έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά: 1ο στάδιο – μάζα καυσίμων 120,000kg, μάζα δομής 9,000kg, 2ο στάδιο - μάζα καυσίμων 30,000kg, μάζα δομής 3,000kg και μάζα φορτίου 3,000 kg. Η ειδική ώθηση 1ου και 2ου σταδίου είναι 260s και 320s αντίστοιχα. Βρείτε την ταχύτητα του πυραύλου ΔV.

Παράδειγμα – Άσκηση - Δεδομένα

$$Mo_1 = 120{,}000 + 9{,}000 + 30{,}000 + 3{,}000 + 3{,}000 = 165{,}000 \text{ kg}$$

$$Mf_1 = 9{,}000 + 30{,}000 + 3{,}000 + 3{,}000 = 45{,}000 \text{ kg}$$

$$Isp_1 = 260 \text{ s}$$

$$Mo_2 = 30{,}000 + 3{,}000 + 3{,}000 = 36{,}000 \text{ kg}$$

$$Mf_2 = 3{,}000 + 3{,}000 = 6{,}000 \text{ kg}$$

$$Isp_2 = 320 \text{ s}$$

Παράδειγμα – Άσκηση – Υπολογισμός Χαρακτηριστικής Ταχύτητας C

$$C_1 = Isp_1 g$$

$$C_1 = 260 \times 9.80665 = 2{,}550 \text{ m/s}$$

$$C_2 = Isp_2 g$$

$$C_2 = 320 \times 9.80665 = 3{,}138 \text{ m/s}$$

Παράδειγμα – Άσκηση – Υπολογισμός Ταχύτητας Πυραύλου ΔV

$$\Delta V_1 = C_1 \times LN[\, Mo_1 / Mf_1 \,]$$

$$\Delta V_1 = 2{,}550 \times LN[\, 165{,}000 / 45{,}000 \,]$$

$$\Delta V_1 = 3{,}313 \text{ m/s}$$

$$\Delta V_2 = C_2 \times LN[\, Mo_2 / Mf_2 \,]$$

$$\Delta V_2 = 3{,}138 \times LN[\, 36{,}000 / 6{,}000 \,]$$

$$\Delta V_2 = 5{,}623 \text{ m/s}$$

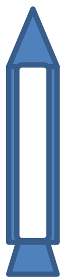
$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\Delta V_{Total} = 3{,}313 + 5{,}623$$

$$\Delta V_{Total} = 8{,}936 \text{ m/s}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Άσκηση 1

Πύραυλος	Παράμετροι	Φορτίο
	ΔV = 8000 m/s I_{SP} = 480 s $m_{\text{δομής}}$=250 kg $m_{\text{καύσιμα}}$=1500kg	$m_{\text{φορτίο}}$;
	ΔV = 8000 m/s Στάδιο 2 I_{SP} = 480 s $m_{\text{δομής}}$=140 kg $m_{\text{καύσιμα}}$=750kg Στάδιο 1 I_{SP} = 480 s $m_{\text{δομής}}$=140 kg $m_{\text{καύσιμα}}$=750kg	$m_{\text{φορτίο}}$;

Υπολογίστε την ανυψωτική ικανότητα του κάθε πυραύλου. Ποιος είναι καλύτερος;

Άσκηση 2

Ένας πύραυλος ενός σταδίου είναι σε τροχιά με ταχύτητα 7.91 km/s. Υπολογίστε την μάζα των καυσίμων που χρειάζεται για να εκτοξεύσει έναν μικροδορυφόροι των 50kg αν ο κινητήρας του εκτοξεύει καυσαέρια με ταχύτητα 3000 km/s

Λύση

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} \qquad u = 3000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad m_0 = m + m_p$$

$$v = u \ln \frac{m + m_p}{m}, \quad \Rightarrow \frac{v}{u} = \ln\left(1 + \frac{m_p}{m}\right), \quad \Rightarrow 1 + \frac{m_p}{m} = e^{\frac{v}{u}},$$

$$\Rightarrow m_p = m\left(e^{\frac{v}{u}} - 1\right) = 50\left(e^{\frac{7910}{3000}} - 1\right) \approx 50\,(13.97 - 1) \approx 700\,[\mathrm{kg}]$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε την επιτάχυνση ενός πυραύλου την στιγμή που ο πύραυλος μπαίνει σε τροχιά (V=7.91 km/s), αν ο κινητήρας του εκτοξεύει καυσαέρια με ταχύτητα 3000 m/s, η μάζα του δορυφόρου είναι 5000 kg και ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμων είναι μ=100 kg/s

Λύση

- Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} v &= u\ln\frac{m_0}{m} \\ m(t) &= m_0 - \mu t. \end{aligned}\right\} \; v(t) = u\ln\frac{m_0}{m_0-\mu t}$$

- Παίρνουμε την παράγωγο της ταχύτητας για να βρούμε την επιτάχυνση

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = u\frac{1}{\frac{m_0}{m_0-\mu t}}\cdot\frac{(-m_0)(-\mu)}{(m_0-\mu t)^2} = \frac{u\,\cancel{(m_0-\mu t)}\,\cancel{m_0}\,\mu}{\cancel{m_0}\,(m_0-\mu t)^{\cancel{2}}} = \frac{u\mu}{m_0-\mu t}$$

- Η επιτάχυνση είναι:

$$a = \frac{u\mu}{m_0-\mu t} = \frac{u\mu}{m} = \frac{3000\cdot 100}{5000} = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 6\,g.$$

- **Ποια μεγέθη αυξάνουν την επιτάχυνση του πυραύλου**; <u>*u*, *t* και *μ*.</u> Απόδειξη:

i. Βρίσκω την μερική παράγωγο ως προς το *t*

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{u\mu}{(m_0-\mu t)^2}\cdot(-\mu) = \frac{u\mu^2}{(m_0-\mu t)^2} > 0.$$

ii. Βρίσκω την μερική παράγωγο ως προς το *μ*

$$\frac{\partial a}{\partial \mu} = \frac{u(m_0-\mu t) - u\mu(-t)}{(m_0-\mu t)^2} = \frac{um_0 - \cancel{u\mu t} + \cancel{u\mu t}}{(m_0-\mu t)^2} = \frac{um_0}{(m_0-\mu t)^2} > 0.$$