ΔΙΑΛΕΞΗ No. 5:
ΟΡΜΗ
ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ
ΒΑΡΥΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

31.10.23

Καθ. Β. Λάππας

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΑΕΡΟΔΙΑΣΤΗΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Ομαλή Κυκλική Κίνηση

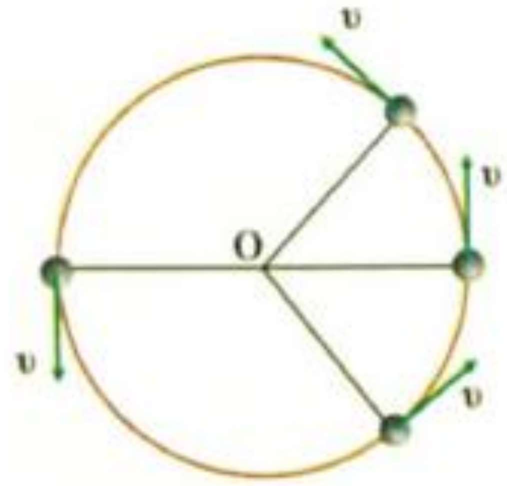
- Ομαλή χαρακτηρίζεται η κυκλική κίνηση ενός κινητού, όταν η τιμή της ταχύτητάς του παραμένει σταθερή.
- Ο χρόνος που χρειάζεται το κινητό για να κάνει μία περιφορά, λέγεται **περίοδος** της κυκλικής κίνησης και συμβολίζεται με Τ.
- Ο αριθμός των περιφορών που εκτελεί το κινητό στη μονάδα του χρόνου λέγεται **συχνότητα** της κυκλικής κίνησης και συμβολίζεται με f.
- **Από τον ορισμό της συχνότητας προκύπτει ότι η περίοδος και η συχνότητα συνδέονται με τη σχέση:**
- Μονάδα της συχνότητας είναι ο κύκλος ανά δευτερόλεπτο (c/s) που λέγεται **1Hz** (Χερτζ)

Το αυτοκίνητο κινείται στην κυκλική πλατεία με σταθερή ταχύτητα.

$$f = \frac{1}{T}$$

[Φυσική Β Λυκείου Κεφάλαιο 1.2]
Link: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B134/513/3336,13455/]

Γραμμική ταχύτητα



- Σύμφωνα με τον ορισμό της ομαλής κυκλικής κίνησης η τιμή της ταχύτητας του κινητού παραμένει σταθερή, ενώ η κατεύθυνσή της μεταβάλλεται συνεχώς, επειδή κάθε στιγμή είναι εφαπτόμενη στην τροχιά
- Άρα τα διανυόμενα τόξα είναι ανάλογα των χρόνων στους οποίους διανύονται. Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε:

$$s = \upsilon \cdot t$$

- Επομένως το μέτρο της ταχύτητάς του, που ονομάζεται **γραμμική ταχύτητα** θα είναι:

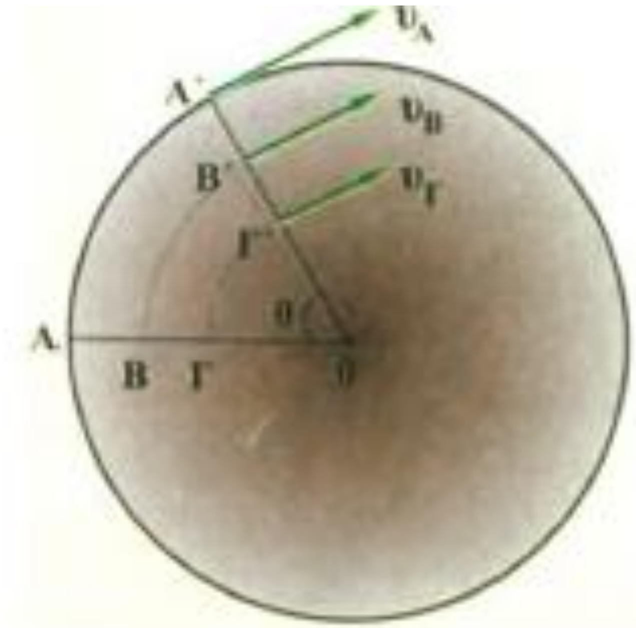
$$\upsilon = \frac{s}{t}$$

- Αν στον τελευταίο τύπο θέσουμε t = T, τότε το τόξο που θα διανύσει το κινητό θα έχει μήκος s = 2·π·R (το μήκος της περιφέρειας της κυκλικής τροχιάς), οπότε:

$$\upsilon = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

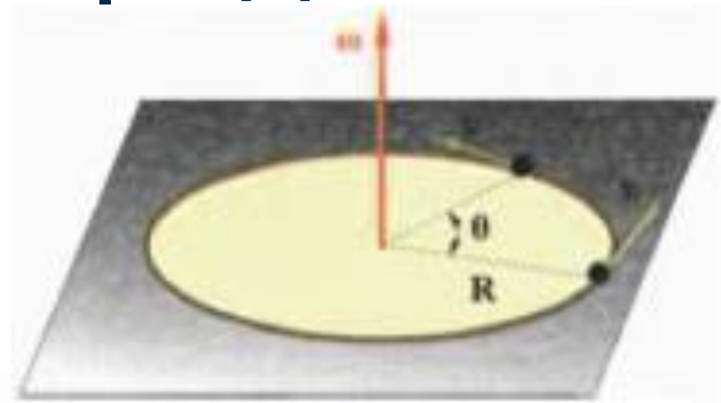
Γωνιακή ταχύτητα (Ι)

- Ας θεωρήσουμε το σχήμα της εικόνας όπου φαίνεται ένας δίσκος που περιστρέφεται και τα σημεία του κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση. Έστω τρία σημεία Α, Β και Γ του δίσκου που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα.
- Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, τα τρία σημεία βρίσκονται στις θέσεις Α′, Β′ και Γ′ αντίστοιχα και έχουν διαγράψει την ίδια γωνία θ.
- Ωστόσο τα μήκη των αντίστοιχων τόξων ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, γεγονός που σημαίνει ότι οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων Α, Β, Γ, διαφέρουν



Γωνιακή ταχύτητα (ΙΙ)

- Στην ομαλή κυκλική κίνηση λοιπόν, εκτός από την ταχύτητα (γραμμική) που δίνει το ρυθμό με τον οποίο διανύει το κινητό διαστήματα, χρειαζόμαστε και ένα άλλο μέγεθος που να δείχνει με τι ρυθμό η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνίες.
- Γι' αυτό ορίζουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος που λέγεται **γωνιακή ταχύτητα** και συμβολίζεται με **ω**.
- Γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση ενός κινητού, ονομάζουμε ένα διανυσματικό μέγεθος το οποίο:
- Η διεύθυνση είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς
- Η φορά καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως στην εικόνα.
- Επειδή f=1/T



$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T}$$

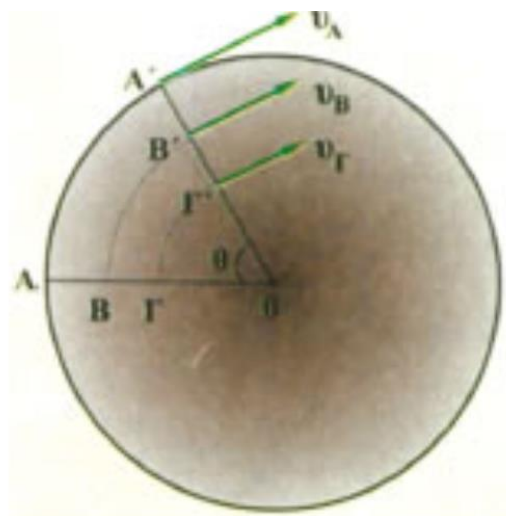
$$\omega = 2\cdot\pi\cdot f.$$

Σχέση μεταξύ της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας

- Για να βρούμε τη σχέση που συνδέει τη γραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα χρησιμοποιούμε την γραμμική ταχύτητα και αντικαθιστούμε το πηλίκο 2·π/T με το ω, οπότε προκύπτει:

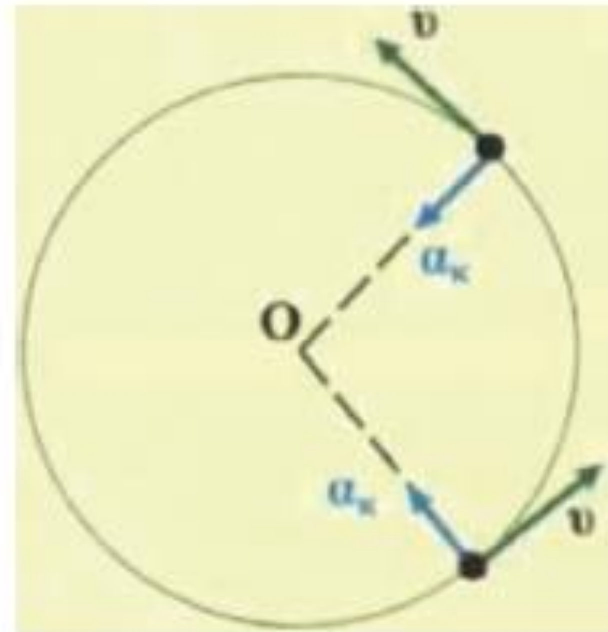
$$\upsilon = \omega \cdot R$$

- Η σχέση αυτή συνδέει τη γραμμική ταχύτητα με τη γωνιακή και με την ακτίνα της τροχιάς. Φαίνεται απ' αυτήν πως όλα τα σημεία ενός περιστρεφόμενου δίσκου, ενώ έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα (**ω**), έχουν γραμμικές ταχύτητες (**υ**) η τιμή των οποίων είναι ανάλογη με την απόστασή τους από τον άξονα (κέντρο) περιστροφής



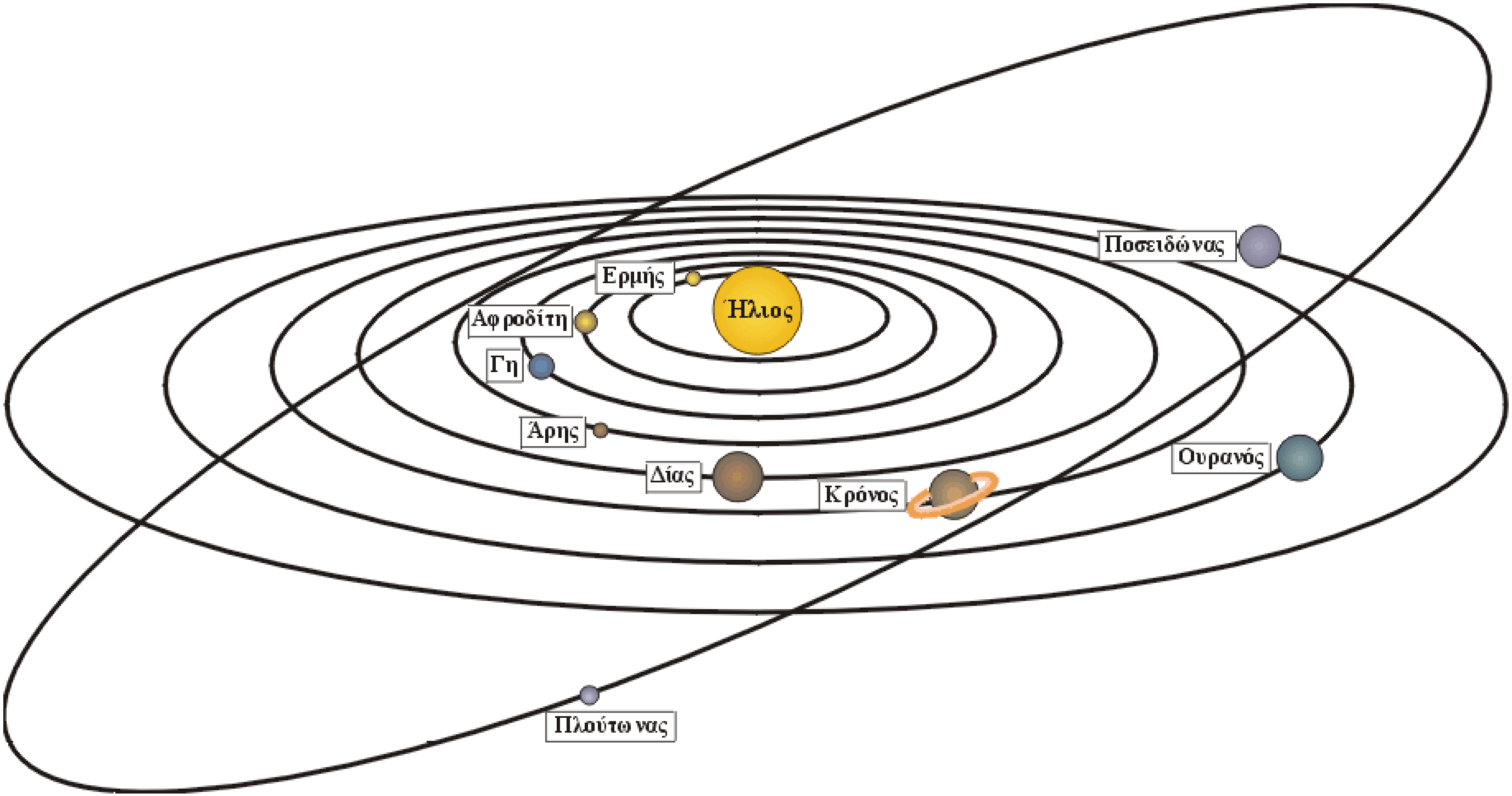
Κεντρομόλος επιτάχυνση

- Στην ομαλή κυκλική κίνηση η τιμή της ταχύτητας είναι σταθερή, όμως η διεύθυνση και η φορά αλλάζουν συνεχώς.
- Άρα το διάνυσμα της ταχύτητας αλλάζει με αποτέλεσμα να εμφανίζεται επιτάχυνση που έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και λέγεται **κεντρομόλος επιτάχυνση** $\boldsymbol{\alpha_\kappa}$.
- Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση:



$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Τροχιές Δορυφόρων – Κυκλική Κίνηση

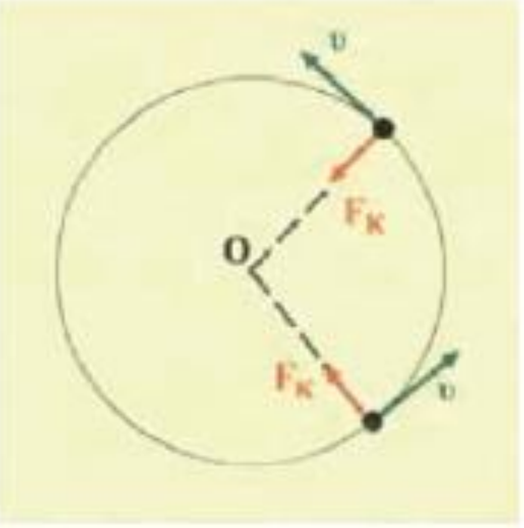


Κεντρομόλος δύναμη (Ι)

- Οι κυκλικές και γενικά οι καμπυλόγραμμες κινήσεις είναι μία μεγάλη κατηγορία κινήσεων. Έχετε αναρωτηθεί ποιο είναι το αίτιό τους;
- Ποια είναι παραδείγματος χάρη η αιτία που κρατά σε τροχιά ένα τεχνητό δορυφόρο γύρω από την Γη;
- Οι δύο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα μας επιτρέπουν να περιγράφουμε την κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν γνωρίζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν σ' αυτό, την αρχική θέση του καθώς και την αρχική του ταχύτητα.
- Έτσι αν σε ένα σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις, ή αν ασκούνται και έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα αυτό θα ηρεμεί ή θα κινείται με κίνηση ευθύγραμμη ομαλή.

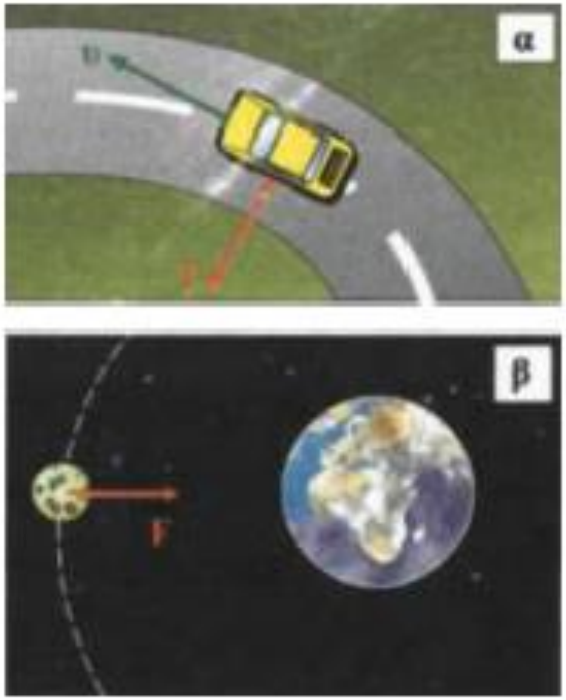
Κεντρομόλος δύναμη (ΙΙ)

- Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα δεν είναι μηδέν, τότε σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα αυτό έχει επιτάχυνση **α** ομόρροπη της δύναμης, που προσδιορίζεται από τη σχέση **F = m·α**, όπου **m** είναι η μάζα του σώματος.
- Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που ένα σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα σταθερής τιμής.
- Επειδή η κατεύθυνση της ταχύτητας συνεχώς μεταβάλλεται, άρα υπάρχει επιτάχυνση (κεντρομόλος) και σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στο σώμα ασκείται δύναμη. Η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και γι' αυτό λέγεται **κεντρομόλος δύναμη**



Κεντρομόλος δύναμη (ΙΙΙ)

- Η κεντρομόλος δύναμη είναι γενικά η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά τη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς με φορά προς το κέντρο του κύκλου. Δεν πρόκειται για μία ακόμα δύναμη πάνω στο σώμα.
- Λέμε συνήθως ότι η συνισταμένη των δυνάμεων (κατά τη διεύθυνση της ακτίνας) παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.
- **Γενικά κάθε δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση λέγεται κεντρομόλος δύναμη.**



Δυνάμεις που δρούν ως κεντρομόλες:
α) η τριβή,
β) η βαρυτική έλξη F.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεντρομόλος δύναμη (IV)

- Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με την κεντρομόλο δύναμη. Όπως είδαμε, η τιμή της κεντρομόλου επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$$

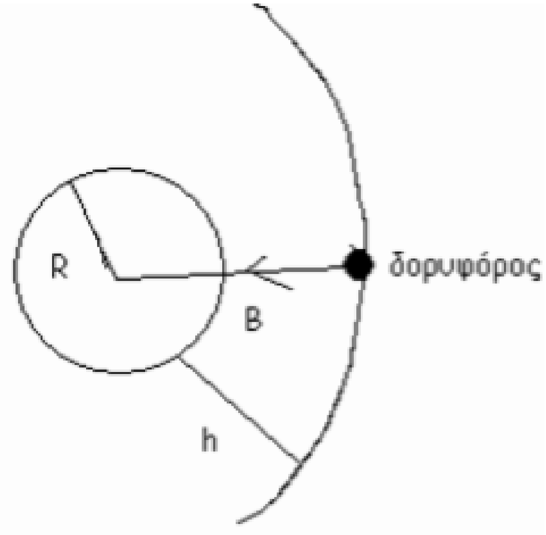
- όπου υ είναι το μέτρο της ταχύτητας και R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Έτσι η τιμή της κεντρομόλου δύναμης δίνεται από τη σχέση:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$

ʼΑσκηση

- Με ποιά ταχύτητα πρέπει να κινείται κάποιος δορυφόρος έτσι ώστε να διαγράφει κυκλική τροχιά από μικρό ύψος h από την επιφάνεια της ΓΗΣ;

Λύση



Το κέντρο της τροχιάς είναι το κέντρο της γης.
Ακτίνα τροχιάς r = R + h όπου R η ακτίνα της γης

$$F_{κεν} = B = mg = \frac{m\,U^2}{R+h} \Rightarrow U = \sqrt{g\,(R+h)}$$

Για μικρά ύψη σε σχέση με την ακτίνα της Γης $g = 9{,}8\ m/s^2$

Έστω h = 100 miles = 1/40 Rγης

$$\Rightarrow U = \sqrt{(9.8)m/s^2\,(6.4 \times 10^6\,m + \underbrace{1.6 \times 10^5\,m}_{h})} = 8 \times 10^3\ m/s = 8\ Km/s$$

Άσκηση 1 (Εργασία)

Δορυφόρος μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης. Η ακτίνα και η μάζα της Γης είναι $R_Γ$ και Μ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη σχέση που δίνει την γραμμική ταχύτητα του δορυφόρου.

β) Να υπολογίσετε τη σχέση που δίνει την κινητική ενέργεια του δορυφόρου.

γ) Να υπολογίσετε τη σχέση που δίνει την περίοδο περιστροφής του δορυφόρου.

Η ελκτική δύναμη που ασκείται μεταξύ δυο μαζών Μ και m που τα κέντρα τους απέχουν d δίνεται από τη σχέση $F = G\frac{M \cdot m}{d^2}$, όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

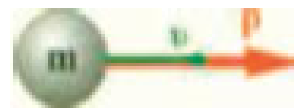
Άσκηση 2 (Εργασία)

- Θεωρούμε τη Γη σφαιρική με ακτίνα R=6400 km και με περίοδο περιστροφής T=24 h. Να υπολογιστούν: α. Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου του ισημερινού β. Το διάστημα που διανύει αυτό το σημείο σε μία μέρα γ. Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου σε γεωγραφικό πλάτος φ=60 μοίρες.

Η έννοια της ορμής

- Τι είναι ορμή; το *αποτέλεσμα της κρούσης επηρεάζεται τόσο από τη μάζα, όσο και από την ταχύτητα των συγκρουόμενων σωμάτων*.
- Έτσι ορίζουμε την ορμή p ενός σώματος ως το φυσικό μέγεθος που η τιμή του εξαρτάται από τη μάζα και την ταχύτητα του σώματος.
- Συγκεκριμένα είναι:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$$



- Ορμή: με αυτήν μπορούμε να μελετήσουμε φαινόμενα κρούσης.
- Ωστόσο, πολλές φορές χρησιμοποιούμε την έννοια της ορμής για να μελετήσουμε εξίσου καλά μία κίνηση.
- Η περιγραφή της κρούσης ή κίνησης με τη βοήθεια της έννοιας της ορμής, πλεονεκτεί της περιγραφής με τη βοήθεια της έννοιας της ταχύτητας, γιατί **η ορμή ως φυσικό μέγεθος διατηρείται**
- Μας επιτρέπει να κάνουμε προβλέψεις και να καταλήγουμε σε συμπεράσματα που αφορούν στην κίνηση ενός σώματος ή ενός συστήματος, χωρίς να χρειάζεται ο κουραστικός υπολογισμός όλων των λεπτομερειών της κίνησης

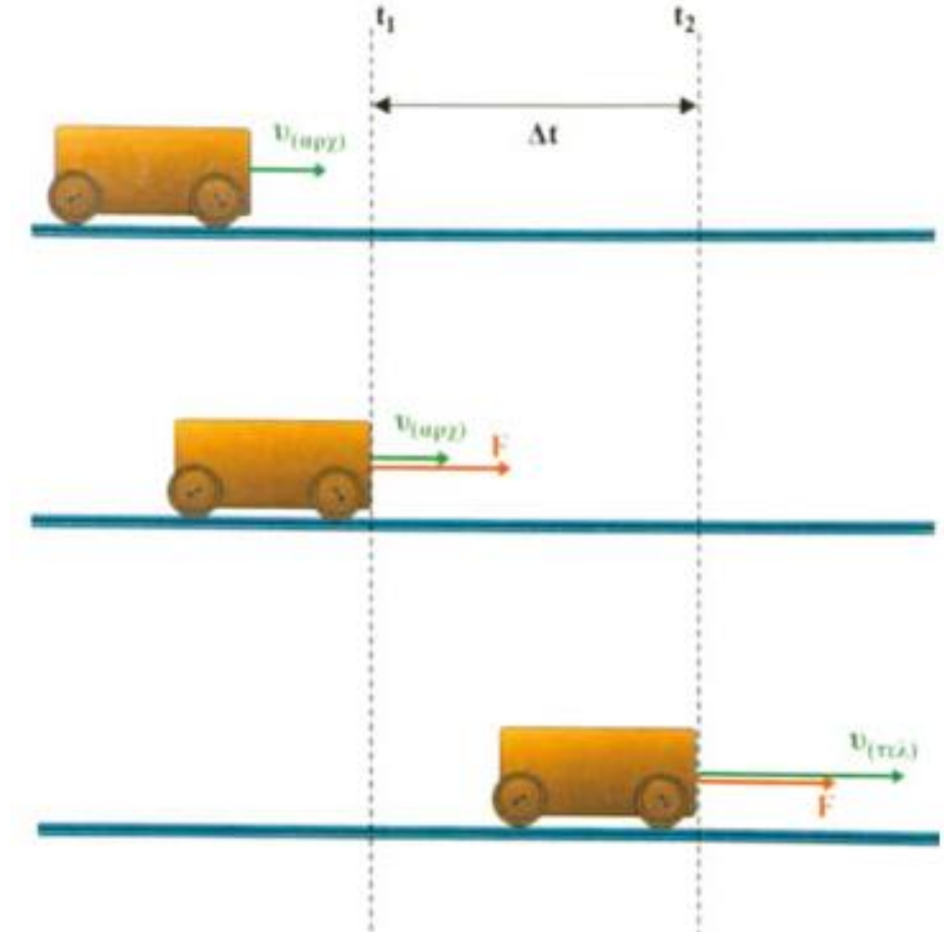
Η δύναμη και η μεταβολή της ορμής

- Κατά τη διάρκεια της κρούσης εμφανίζονται δυνάμεις μεγάλου μέτρου.
- Αυτές οι δυνάμεις προκαλούν τις αλλαγές στην ταχύτητα και την ορμή των σωμάτων που συγκρούονται
- Πρέπει να αναζητήσουμε σχέση μεταξύ δύναμης και ορμής
- Τη σχέση αυτή μπορούμε να τη βρούμε, αν συνδυάσουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$$

- Με επιτάχυνση:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t}$$



Μεταβολή της ορμής

Αντικαθιστώντας στην πρώτη την τιμή της επιτάχυνσης από τη δεύτερη προκύπτει ότι:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \vec{F} = \frac{m \cdot \vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda} - m \cdot \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το γινόμενο $m \cdot \vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι η τελική ορμή $\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ του σώματος και $m \cdot \vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$ η αρχική ορμή του $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}$.

Η παραπάνω σχέση γράφεται έτσι:

$$\vec{F} = \frac{\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \quad (2)$$

Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}$ και $\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$ είναι συγγραμικά, η σχέση (2) γράφεται:

$$F = \frac{p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η μεταβολή της ορμής $(\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi})$ διά του χρόνου Δt εντός του οποίου συμβαίνει αυτή, ισούται με τη δύναμη $\vec{F}$ που την προκαλεί.

Η αρχή διατήρησης της ορμής (Ι)

Η συνολική ορμή ενός μονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή.

Η πρόταση αυτή είναι άμεση συνέπεια του τρίτου νόμου του Νεύτωνα σύμφωνα με τον οποίο η δράση είναι ίση με την αντίδραση.

Ας θεωρήσουμε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν. Εφ' όσον οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτά είναι αντίθετες, θα ισχύει $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ή:

$$m_1 \cdot \frac{\Delta\vec{\upsilon}_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta\vec{\upsilon}_2}{\Delta t}$$

Όμως ο χρόνος αλληλεπίδρασης Δt είναι ίδιος και για τα δύο σώματα και κατά συνέπεια $m_1 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_1 = -m_2 \cdot \Delta\vec{\upsilon}_2$.

Συνεπώς για τις μεταβολές της ορμής θα ισχύει:

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \quad \text{ή} \quad \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0.$$

Η αρχή διατήρησης της ορμής (ΙΙ)

Εφ' όσον όμως το άθροισμα των μεταβολών των ορμών είναι μηδέν, έπεται ότι το άθροισμα των ορμών των σωμάτων του συστήματος δεν μεταβάλεται, διότι από την προηγούμενη σχέση προκύπτει:

$$\vec{p}_{1(\tau\varepsilon\lambda)} + \vec{p}_{2(\tau\varepsilon\lambda)} = \vec{p}_{1(\alpha\rho\chi)} + \vec{p}_{2(\alpha\rho\chi)} \quad \text{ή} \quad \vec{p}_{o\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} = \vec{p}_{o\lambda(\alpha\rho\chi)}$$

Δηλαδή η ορμή του συστήματος είναι σταθερή.

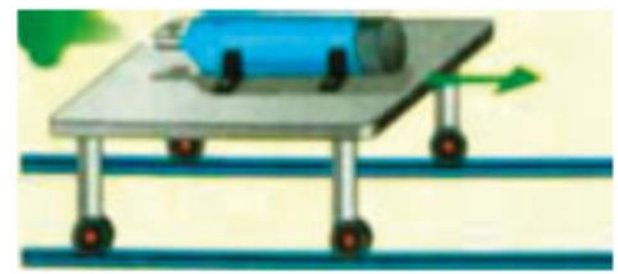
Τα πορίσματα που προκύπτουν αν εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ορμής για την κίνηση των σωμάτων που συγκρούονται, έχουν ελεγχθεί πειραματικά πάρα πολλές φορές, ώστε σήμερα δεν υπάρχει καμία αμφιβολία για την εγκυρότητά τους. Έτσι η διατήρηση της ορμής έχει αναβαθμιστεί στη σκέψη των επιστημόνων και ονομάζεται **Αρχή διατήρησης της ορμής.** Η αρχή αυτή δεν περιορίζεται σε απλές περιπτώσεις, όπως αυτή που εξετάσαμε στο παράδειγμα, αλλά επεκτείνεται και σε περιοχές όπως η Πυρηνική Φυσική, όπου πυρήνες βομβαρδίζονται με σωμάτια όπως τα πρωτόνια ή τα νετρόνια.

Εφαρμογές της διατήρησης της ορμής
Η αρχή της κίνησης των πυραύλων

- Την αρχή διατήρησης της ορμής μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στην κίνηση των πυραύλων.
- Ας θεωρήσουμε το αυτόματο όπλο που βρίσκεται πάνω σε ένα βαγόνι το οποίο μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιες σιδηροτροχιές
- Αν εκτοξευθεί ένα βλήμα, το όλο σύστημα θα κινηθεί σε αντίθετη κατεύθυνση, ώστε η αρχικά μηδενική ορμή του συστήματος να διατηρηθεί.
- Αν ενεργοποιήσουμε το μηχανισμό της συνεχούς εκτόξευσης βλημάτων το βαγόνι με το όπλο θα αρχίσει να κινείται με ταχύτητα που συνεχώς αυξάνεται.

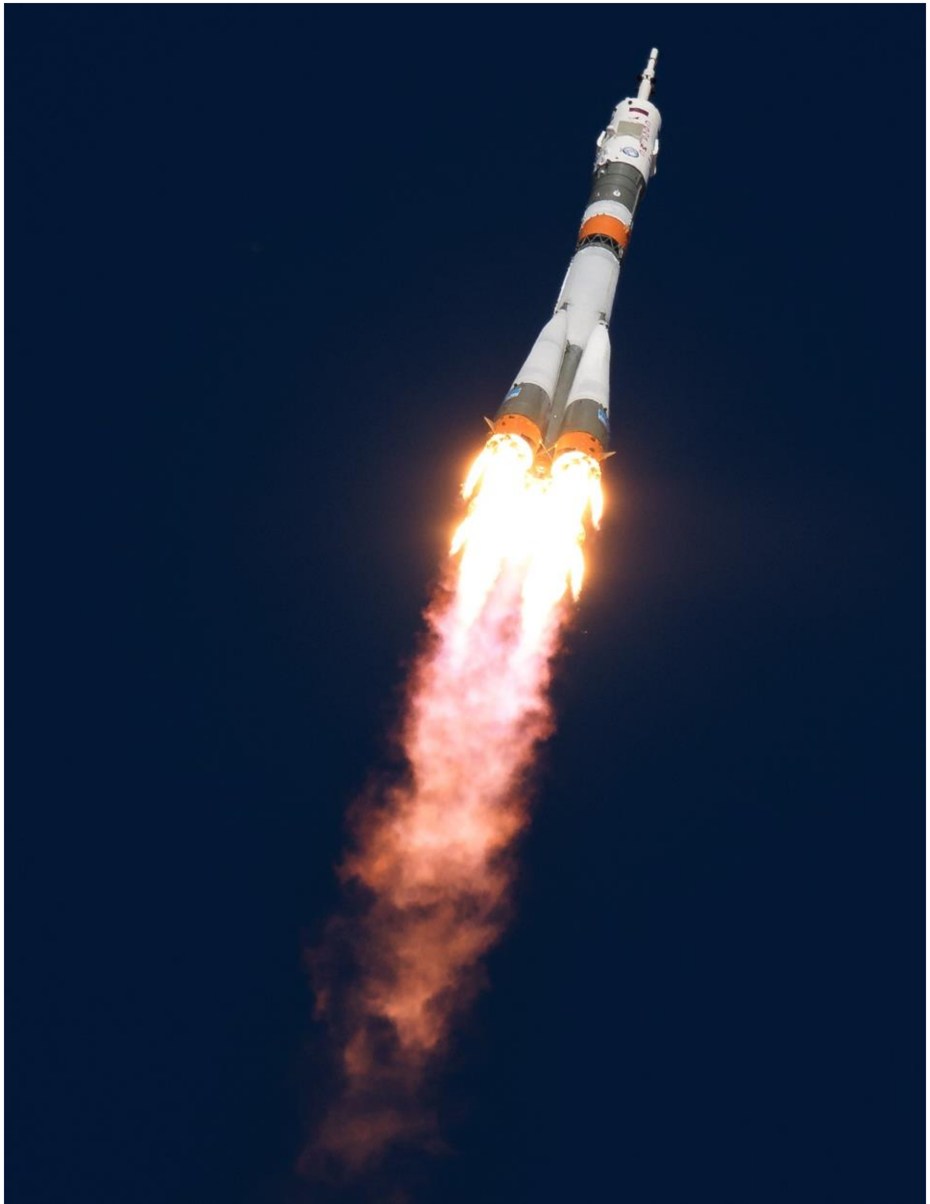
Εφαρμογές της διατήρησης της ορμής
Η αρχή της κίνησης των πυραύλων

- Τι νομίζετε ότι θα συμβεί αν πάνω στο βαγόνι, αντί για το όπλο τοποθετήσουμε μία φιάλη που περιέχει αέρα υπό πίεση και ανοίξουμε τη στρόφιγγα;
- Σε αναλογία με το πυροβόλο όπλο μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα βαγόνι - φιάλη επιταχύνεται επειδή “μοριακές σφαίρες” εκτοξεύονται σε αντίθετη κατεύθυνση
- Τα παραδείγματα αυτά μας βοηθούν να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κινούνται οι πύραυλοι.
- Πρέπει όμως να επισημάνουμε, ότι τα αέρια που εξέρχονται από το ακροφύσιο του πυραύλου δεν είναι αποθηκευμένα υπό πίεση μέσα σ' αυτόν αλλά προέρχονται από την καύση ειδικού μίγματος.



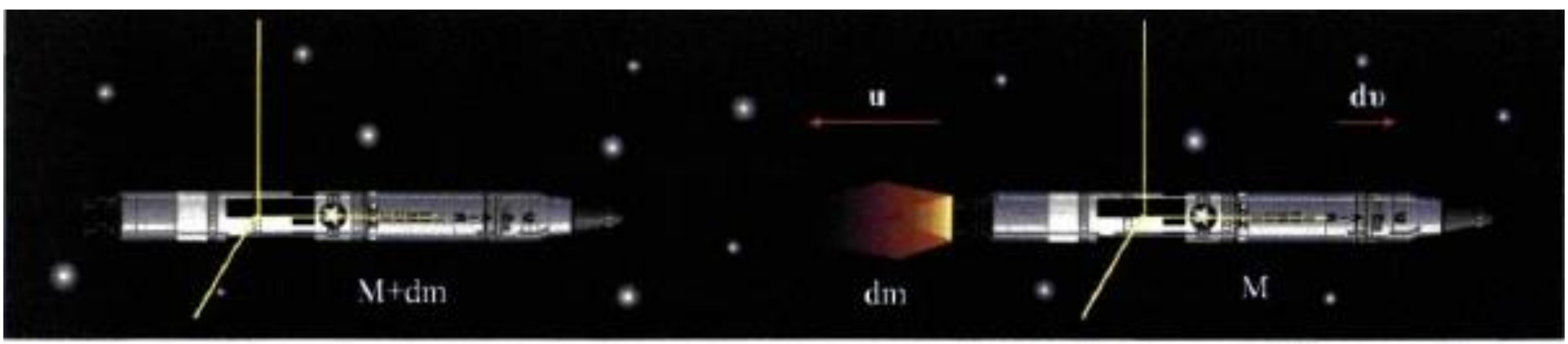
Προώθηση Πυραύλου (I)

- Στην περίπτωση των πυραύλων και των αεριωθούμενων αεροπλάνων τα καυσαέρια ωθούνται προς τα πίσω με δύναμη **F** που ασκείται σ' αυτά από τα τοιχώματα του χώρου καύσης.
- Σύμφωνα με την δράσης αντίδρασης και τα καυσαέρια ωθούν το πύραυλο ή το αεροπλάνο προς τα εμπρός με προωστική δύναμη **F'** αντίθετη της **F.** Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε έναν πύραυλο που κινείται στο διάστημα (μακριά από κάθε βαρυτική έλξη).
- Θα εφαρμόσουμε την ΑΔΟ ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.
- Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις το κέντρο μάζας (άρα και το σύστημα αναφοράς μας) δε θα μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση, ανεξάρτητα με οποιαδήποτε μεταβολή συμβεί στην κινητική κατάσταση των τμημάτων που απαρτίζουν το σύστημα.



Προώθηση Πυραύλου (ΙΙ)

- Ο πύραυλος κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα **M+dm** και μηδενική ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε.
- Ο πύραυλος, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα **dt,** εκτοξεύει προς τα πίσω μια ποσότητα καυσαερίων **dm** με ταχύτητα **u** ως προς το κέντρο μάζας.
- Πρακτικά η ταχύτητα αυτή είναι και η ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο.
- Ο πύραυλος τώρα έχει αυξήσει την ταχύτητά του σε σχέση με πριν κατά **du** και η μάζα του έχει ελαττωθεί κατά **dm**
- Ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με **du** προς τα μπροστά.



Προώθηση Πυραύλου (III)

Εφόσον το σύστημα είναι μονωμένο εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής με τις ταχύτητες να αναφέρονται όλες στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

$P_{πριν} = p_{μετά}$ άρα $0 = -dmu + Mdu$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την προωστική δύναμη που δέχεται ο πύραυλος . Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$Mdu = dmu$$

και $$M\frac{d\upsilon}{dt} = u\frac{dm}{dt}$$

δηλαδή $Ma = u\dfrac{dm}{dt}$

και τελικά $$\boxed{F = u\frac{dm}{dt}}$$

όπου $\dfrac{dm}{dt}$ ο ρυθμός με τον οποίο εκτοξεύονται τα καυσαέρια του πυραύλου.

Άσκηση 3

Ένας πύραυλος μάζας $M = 4 \cdot 10^4$ kg, κινείται ευθύγραμμα, σε περιοχή ασήμαντης βαρύτητας, με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 200$ m / s . Ξαφνικά, με μια έκρηξη ο πύραυλος χωρίζεται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 και m_2 για τις οποίες ισχύει $m_1 = 3 \cdot m_2$. Το πρώτο, κομμάτι μάζας m_1 , αμέσως μετά την έκρηξη έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 400$ m / s, στην ίδια κατεύθυνση με την αρχική ταχύτητα υ_0. Να προσδιορίσετε:

Δ_1. Την ταχύτητα υ_2 του δεύτερου κομματιού.

Δ_2. Τη μεταβολή ορμής ΔP_1 και ΔP_2 του κάθε κομματιού εξαιτίας της έκρηξης. Τι παρατηρείτε;

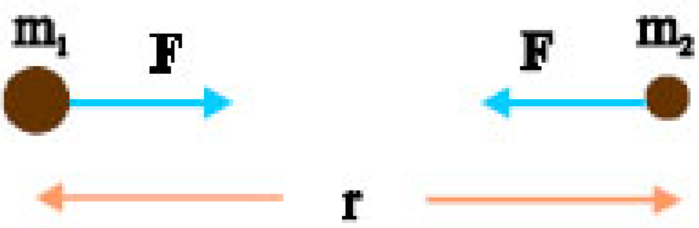
Δ_3. Την ενέργεια που ελευθερώθηκε λόγω της έκρηξης.

Δ_4. Αν υποθέσετε ότι η έκρηξη, δηλαδή η διάσπαση του πυραύλου στα δύο κομμάτια του διαρκεί χρονικά $\Delta t = 0{,}2$ s, να προσδιορίσετε τη μέση δύναμη που δέχτηκε κάθε ένα από τα δύο κομμάτια στα οποία χωρίστηκε ο πύραυλος κατά τη διάρκεια της κρούσης.

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

- Δύο σώματα με πολύ μικρές διαστάσεις (σημειακές μάζες), που έχουν μάζες m_1 και m_2 και βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους, έλκονται με δύναμη που έχει μέτρο

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



- όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, $G = 6{,}673 \times 10^{-13} N{\cdot}m^2 / kg^2$. Η δύναμη αυτή, είναι **διατηρητική και κεντρική**.
- Η παραπάνω σχέση δίνει και τη δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο ομογενών σφαιρικών μαζών m_1 και m_2.
- Στην περίπτωση αυτή απόσταση r είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των σφαιρών και οι ελκτικές δυνάμεις έχουν σημεία εφαρμογής τα κέντρα των σφαιρών.

- Φυσική Β Λυκείου Κεφάλαιο 5-12

  Link: http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B101/541/4996,14685/

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

- Η έλξη ανάμεσα σε δύο σώματα, με αίτιο το ότι έχουν μάζα, είναι δύναμη από απόσταση.
- Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαζών περιγράφεται με την έννοια του πεδίου.
- Κάθε μάζα δημιουργεί γύρω της πεδίο. Αν κάποια μάζα βρεθεί μέσα στο πεδίο, το πεδίο τής ασκεί δύναμη.
- Το πεδίο που δημιουργείται από μάζες ονομάζεται βαρυτικό πεδίο ή πεδίο βαρύτητας.
- **Βαρυτικό πεδίο ονομάζεται ο χώρος εκείνος στον οποίο κάθε μάζα δέχεται δύναμη.**

Η ένταση βαρυτικού πεδίου

- Έστω μια σημειακή μάζα Μ. Για να βρούμε την ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η μάζα Μ σε σημείο Α που απέχει απόσταση r απ΄ αυτήν, τοποθετούμε στο σημείο αυτό μάζα m.
- Η μάζα m δέχεται από την μάζα Μ δύναμη

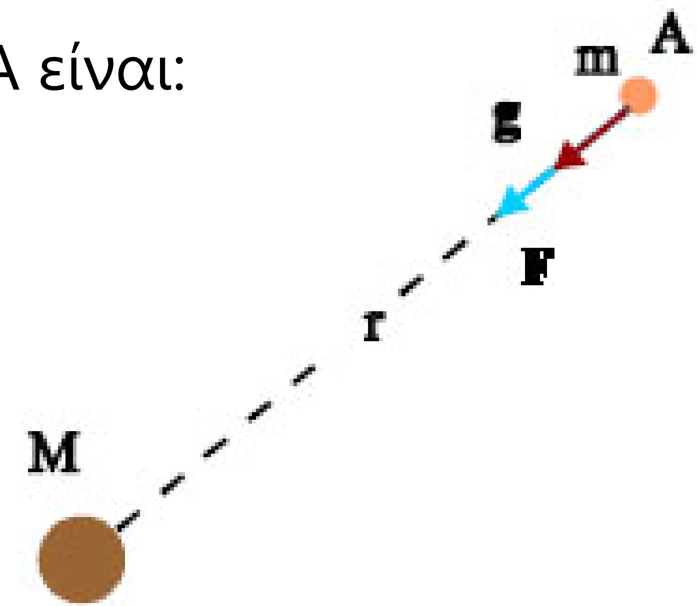
$$F = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

- Η ένταση του πεδίου στο σημείο Α είναι:

$$g = \frac{F}{m}$$

- Αντικαθιστώντας:

$$\boxed{g = G\,\frac{M}{r^2}}$$



Δυναμικό του βαρυτικού πεδίου

- **Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου** που δημιουργεί η σημειακή μάζα Μ σε σημείο Α, που απέχει απόσταση r από το υλικό σημείο, έχει τιμή:

$$V_A = -G\frac{M}{r}$$

- **Η δυναμική ενέργεια** συστήματος δύο υλικών σημείων με μάζες m_1, m_2, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r, είναι ίση με το έργο που απαιτείται για να μεταφερθούν οι μάζες από πολύ μακριά και να τοποθετηθούν στις θέσεις τους και είναι:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Σύστημα Γη - Σελήνη

ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

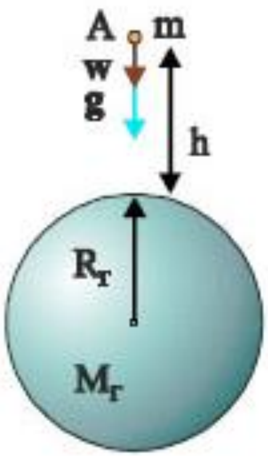
- Με ικανοποιητική προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε τη Γη σαν μια ομογενή σφαίρα ακτίνας $R_Γ = 6{,}38 \times 10^6 m$ και μάζας $M_Γ = 5{,}98 \times 10^{24} kg$.
- Το βαρυτικό πεδίο της Γης σε ένα σημείο Α, στο εξωτερικό της θα περιγράφεται από τις σχέσεις που αναφέραμε πριν
- Επειδή συνήθως η θέση ενός σημείου στο πεδίο βαρύτητας της Γης προσδιορίζεται από το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σημείο, είναι σκόπιμο στις σχέσεις αυτές να αντικαταστήσουμε την απόσταση r από το κέντρο της Γης με το άθροισμα $R_Γ + h$ όπου h το ύψος του σημείου που μας ενδιαφέρει από την επιφάνεια της Γης.
- Έτσι οι σχέσεις που δίνουν την ένταση και το δυναμικό στο πεδίο βαρύτητας της Γης -πάντα αναφερόμαστε στον εξωτερικό της χώρο- είναι

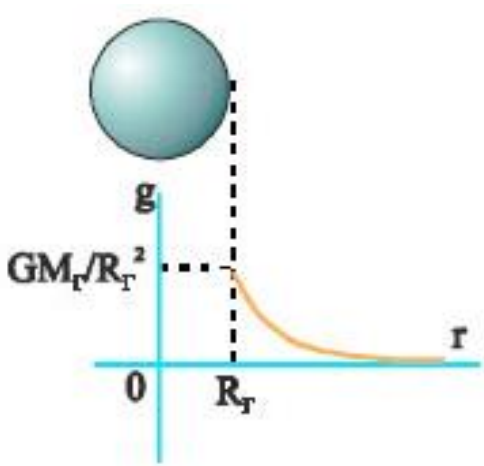
ΤΟ ΒΑΡΥΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΓΗΣ

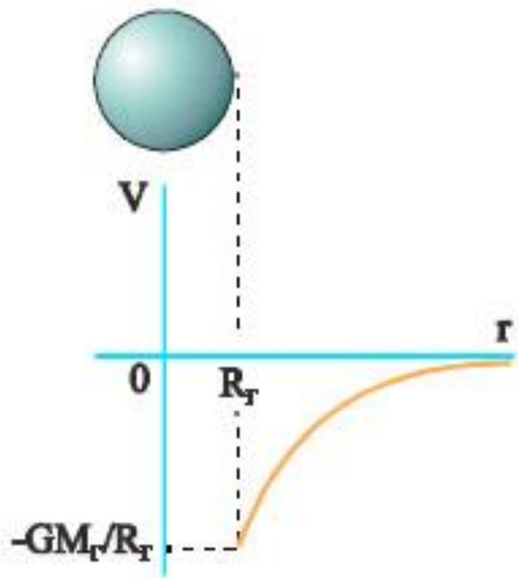
- Έτσι οι σχέσεις που δίνουν την ένταση και το δυναμικό στο πεδίο βαρύτητας της Γης -πάντα αναφερόμαστε στον εξωτερικό της χώρο- είναι:

$$g = G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$$

$$V = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}$$







Γραφικές παραστάσεις του μέτρου της έντασης και του δυναμικού σε συνάρτηση με την απόσταση από το κέντρο της Γης, για σημεία που βρίσκονται έξω από αυτή.

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ

- Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί ένα αντικείμενο μάζας m, από την επιφάνεια της Γης ώστε να διαφύγει οριστικά από το πεδίο βαρύτητας της Γης;
- Για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ότι η Γη δεν κινείται, θα αγνοήσουμε τις βαρυτικές επιδράσεις από τα άλλα ουράνια σώματα και θα αγνοήσουμε την αντίσταση του ατμοσφαιρικού αέρα.
- Εφόσον το βαρυτικό πεδίο είναι διατηρητικό η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων (Γη και σώμα) διατηρείται. Επομένως κατά την κίνηση του σώματος μεταξύ δύο θέσεων θα ισχύει:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ

- Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια της Γης και για το άπειρο (εκεί όπου δεν υπάρχει πλέον βαρυτική επίδραση και η δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη είναι μηδέν $U_2 = 0$).
- Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα είναι εκείνη για την οποία το σώμα θα φτάνει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, άρα $K_2=0$

$$K_1 + U_1 = 0 + 0 \qquad \text{οπότε} \qquad \frac{1}{2} m \upsilon_\delta^2 + \left(-G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \right) = 0$$

- Λύνοντας ως προς υ_δ βρίσκουμε:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}} = 11{,}2\, km/s = 40\,320\, km/h$$

- Την ταχύτητα υ_δ την ονομάζουμε **ταχύτητα διαφυγής** από την επιφάνεια της Γης.

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ - ΙΙ

- Εάν το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}$$

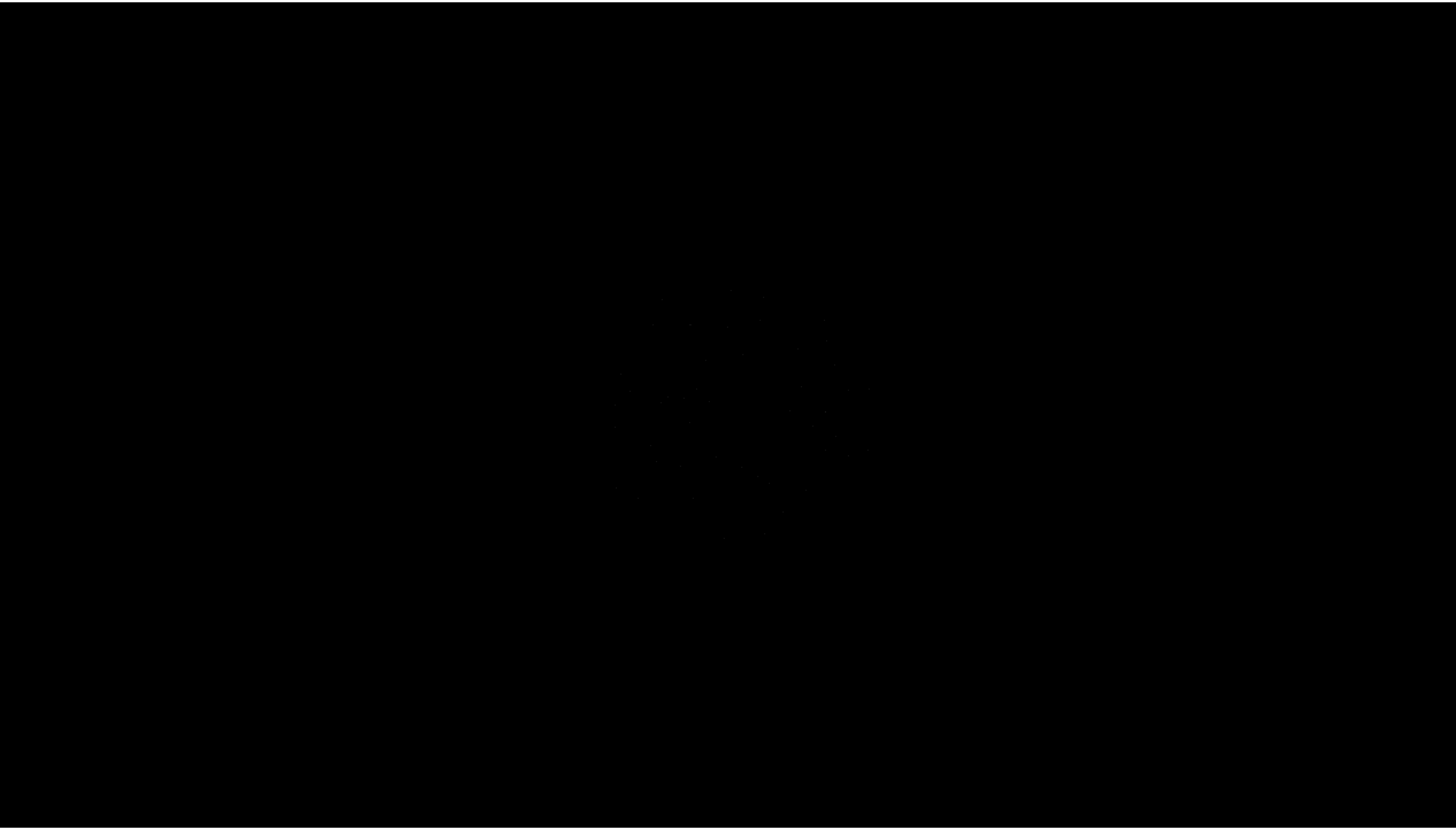
ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ - ΙΙΙ

- Προς το παρόν είναι αδύνατο να προσδώσουμε σε ένα σώμα αρχική κατακόρυφη ταχύτητα ίση με **11,2 Km/s**.
- Μπορούμε όμως με έναν πύραυλο να προσδώσουμε στο σώμα σταθερή επιτάχυνση **α** λίγο μεγαλύτερη από την επιτάχυνση **g** της βαρύτητας.
- Έτσι, η κατακόρυφη ταχύτητα του σώματος συνεχώς αυξάνεται, μέχρις ότου το σώμα αποκτήσει την ταχύτητα διαφυγής.
- Τότε καταργείται η προωστική δύναμη του πυραύλου και το σώμα κινείται στο αστρικό διάστημα με την ταχύτητα διαφυγής, σύμφωνα με την αρχή της αδράνειας.
- Το σώμα ελευθερώθηκε από την έλξη της **Γης**, αλλά κινείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας του **Ήλιου** και των άλλων πλανητών.
- Έτσι, η τροχιά του θα είναι <u>ευθύγραμμη</u>

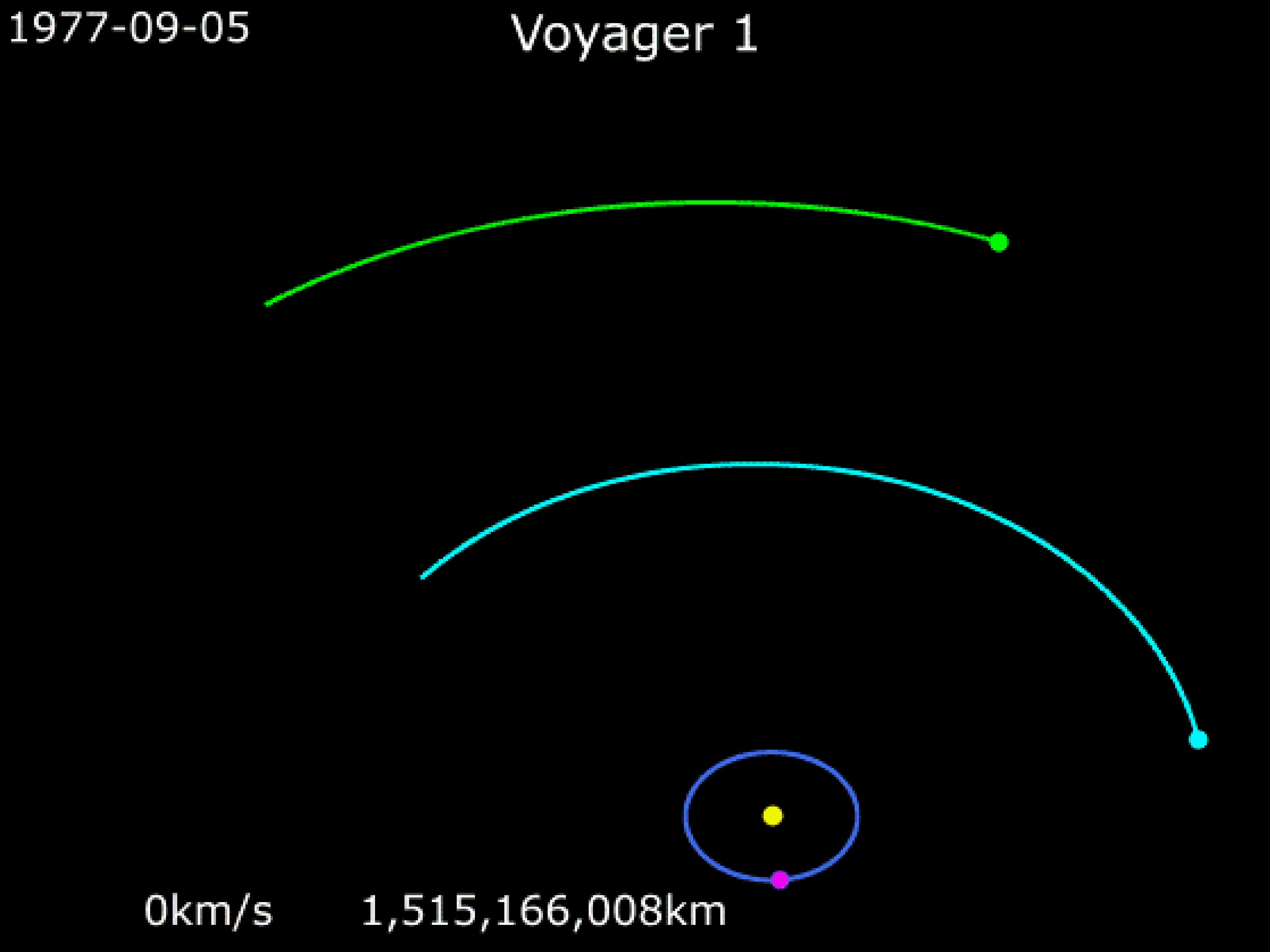
ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ – Άσκηση 4

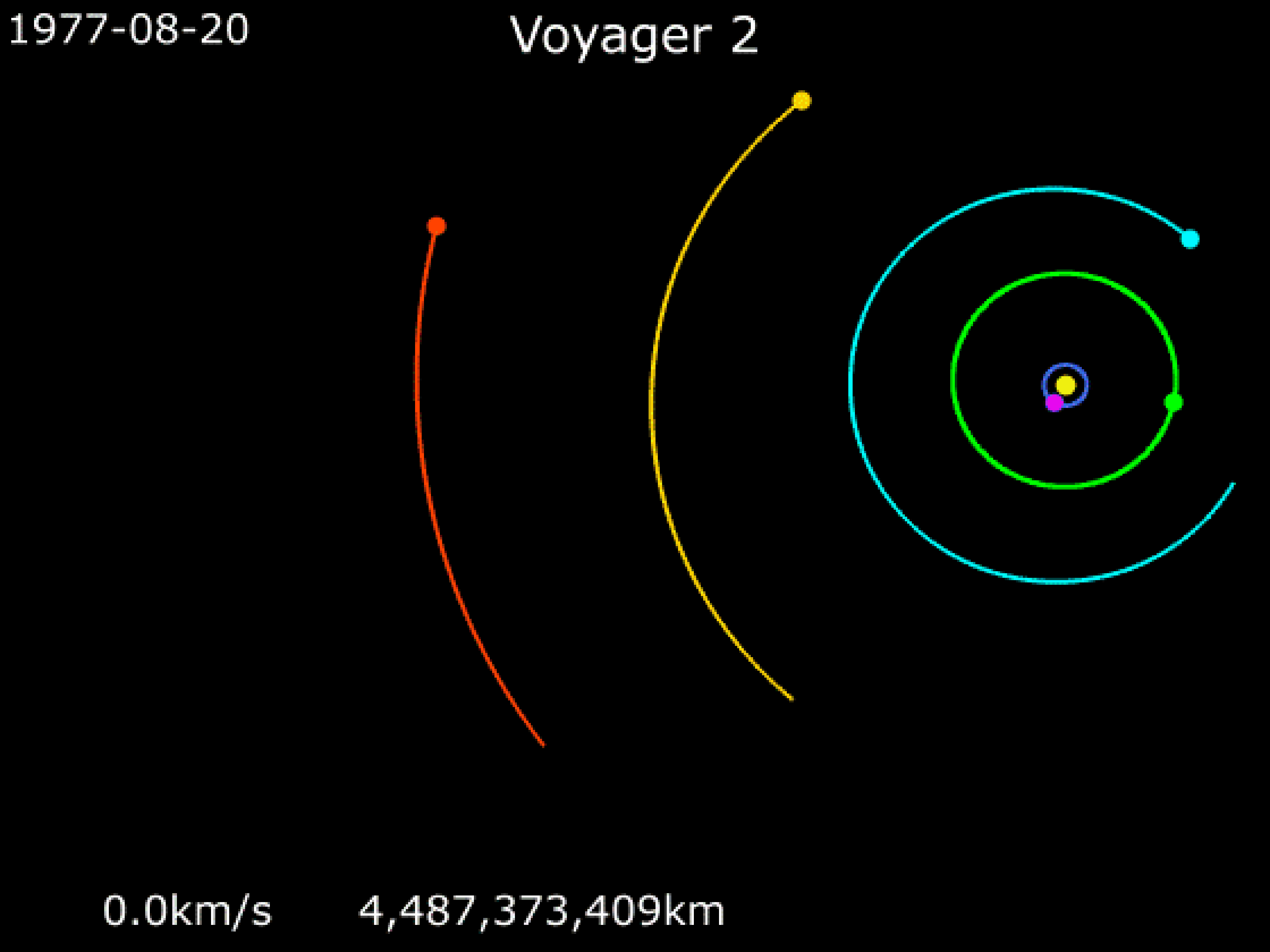
- Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία βρείτε την ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια άλλων ουράνιων σωμάτων: Σελήνη, Άρη, Δία και για τον Ήλιο
- Τι επιτάχυνση (g) αισθάνονται οι αστροναύτες στην Σελήνη και στον Άρη και γιατί? Μπορούν να περπατάνε όπως στην Γή;

Μανούβρες με την Βοήθεια Βαρυτικών Πεδίων



- https://www.youtube.com/watch?v=0iAGrdITIiE


1977-09-05
Voyager 1
0km/s
1,515,166,008km


1977-08-20
Voyager 2
0.0km/s
4,487,373,409km

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ – Άσκηση 5

Ένας πύραυλος εκτοξεύεται προς τα πάνω με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{g_o R_\Gamma}$
κοντά στην επιφάνεια της γης. Ο πύραυλος θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της γης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΦΥΓΗΣ – Άσκηση 6

1. Από το σημείο Α του πεδίου βαρύτητας της Γης, που βρίσκεται σε ύψος $h=R_Γ$ από την επιφάνεια της Γης ($R_Γ$ η ακτίνα της Γης), βάλλεται προς το Διάστημα ένα σώμα με ταχύτητα $υ_o=16 \times 10^3$ m/s. Να εξετάσετε αν το σώμα θα διαφύγει από τη βαρυτική έλξη της Γης. Αν θα διαφύγει να βρείτε την ταχύτητά του όταν φτάσει σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη Γη. Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_Γ=6400$ km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της $g_o=10$ m/s^2.
2. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $υ_o=103$ m/s. Υπολογίστε πόσο ψηλά θα φτάσει το σώμα. Δίνεται η ακτίνα της Γης $R_Γ = 6400$ km και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_o=10$m/s^2. Η αντίσταση του αέρα δε λαμβάνεται υπόψη.