Αριθμοί και Σχήματα

Στράτος Πρασίδης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

24 Ιανουαρίου 2023

Φυσικοί Αριθμοί

Ορίζουμε τους φυσικούς αριθμούς:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ιδιότητες:

- Δύο πράξεις ορίζονται και είναι κλειστές στους φυσικούς αριθμούς: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.
- Κάποιες φορές, η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται αλλά όχι πάντα:

$$3 - 2 = 1,\ 2 - 3 \notin \mathbb{N},\ 6 : 3 = 2,\ 5 : 2 \notin \mathbb{N}.$$

- Είναι αριθμοί όπου για κάθε έναν έχουμε τον επόμενό του. Ουσιαστικά ορίζονται από την πράξη $+1$ ξεκινώντας από το 0.

Από τον ορισμό τους, οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποιες, πιο τεχνικές, ιδιότητες:

1. (Αρχή της Καλής Διάταξης) Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
2. (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής) Έστω $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n. Υποθέτουμε ότι
    1. Για κάποιον φυσικό αριθμό n, η $P(k)$ αληθεύει.
    2. Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει.

    Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq k$.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Είναι πολύ χρήσιμες ιδιότητες στις αποδείξεις που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς ή που ανάγονται σε φυσικούς αριθμούς.

Παραστατικά:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη σκάλα και ξέρουμε δυο πράγματα:

1. Μπορούμε να ανεβούμε στο πρώτο σκαλοπάτι.
2. Εάν μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα σκαλοπάτι, τότε μπορούμε να ανεβούμε στο επόμενο.

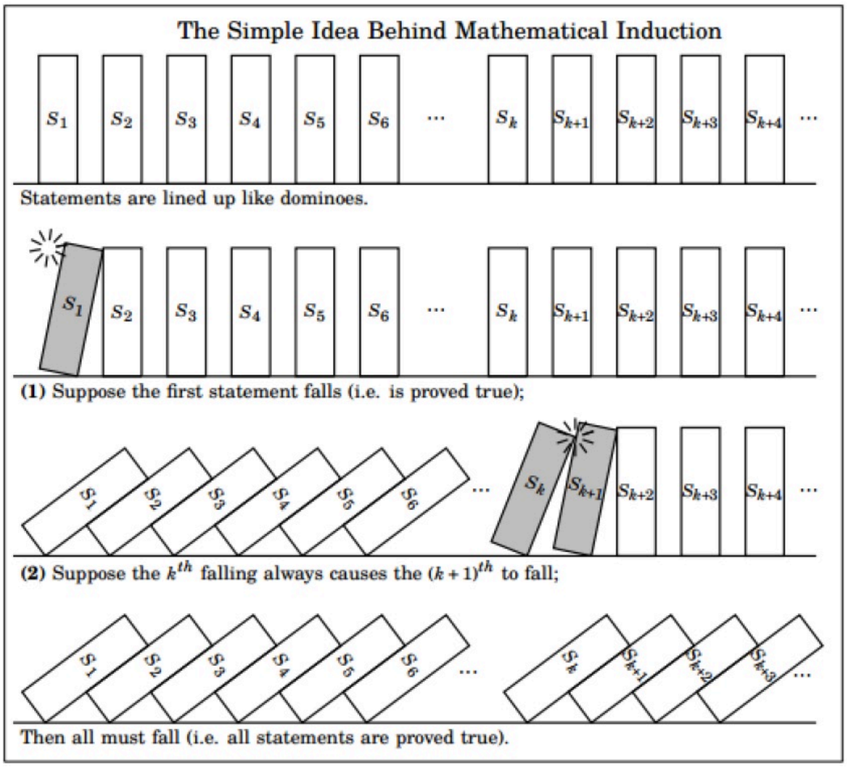
Απ' αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να φτάσουμε σε κάθε σκαλοπάτι της σκάλας.

Με άλλον τρόπο:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη συλλογή από ντόμινο και ξέρουμε δυο πράγματα:

1. Υποθέτουμε ότι πέφτει το πρώτο ντόμινο.
2. Εάν πέσει κάποιο ντόμινο τότε θα πέσει και το επόμενο.

Απ’ αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι όλα τα ντόμινο θα πέσουν.


The Simple Idea Behind Mathematical Induction
S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 ... S_k S_{k+1} S_{k+2} S_{k+3} S_{k+4} ...
Statements are lined up like dominoes.
(1) Suppose the first statement falls (i.e. is proved true);
(2) Suppose the k^{th} falling always causes the $(k+1)^{th}$ to fall;
Then all must fall (i.e. all statements are proved true).

Παραδείγματα Επαγωγής-1

(1) Μια ομάδα n πειρατών πρόκειται να μοιράσει έναν θησαυρό, από χρυσό, έτσι ώστε κάθε πειρατής θα πάρει ένα ίσο μερίδιο. Όμως οι πειρατές δεν είναι αντικειμενικοί, και κάθε πειρατής έχει την δικιά του άποψη του τι είναι το $\frac{1}{n}$ του θησαυρού. Να δώσετε μια στρατηγική μοιρασιάς του θησαυρού.

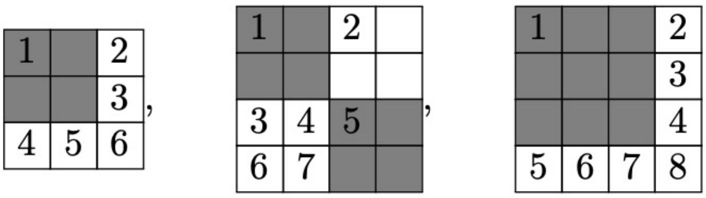
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μέθοδο να μοιραστούν $k - 1$ πειρατές τον θησαυρό. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από k-πειρατές.
Παίρνουμε ένα κομμάτι του θησαυρού και το βάζουμε σε έναν καινούργιο σωρό. Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρις ότου ένας πειρατής δηλώσει ότι αυτό είναι το δίκαιο μερίδιο του θησαυρού γι' αυτόν. Οι υπόλοιποι $k - 1$ πειρατές πιστεύουν ότι αυτό το μερίδιο δεν είναι δίκαιο γι' αυτούς, διαφορετικά θα είχαν επιλέξει τον καινούργιο σωρό νωρίτερα.
Από την υπόθεση της επαγωγής, οι υπόλοιποι πειρατές $k - 1$ μπορούν τώρα να μοιράσουν τον υπόλοιπο θησαυρό.

(2) Δείξτε ότι μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε n τετράγωνα, για κάθε $n \geq 6$.
Σ' αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα λίγο διαφορετικό. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο S με $n-3$ υποτετράγωνα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με n υποτετράγωνα:

$$S \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline S & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Τότε αν έχουμε 6 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις με 6, 9 , 12, 15 …υποτετράγωμα. Αν έχουμε 7 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 7, 10 , 13, 16 …, και αν έχουμε 8 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 8, 11 , 14, 17 …υποτετράγωνα.
Άρα πρέπει να υποδιαιρέσουμε ένα τετράγωνο σε 6, 7 και 8 τετράγωνα και τότε μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε οποιοδήποτε αριθμό υποτετραγώνων.

Γι΄αυτά τα υποτετράγωνα έχουμε



(3) Ένα ATM μηχάνημα έχει μόνο νομίσματα των €5 και κέρματα των €2. Δείξτε ότι το μηχάνημα μπορεί να δώσει οποιοδήποτε ακέραιο ποσό, μεγαλύτερο των €3, του ζητηθεί.
Έστω n είναι το πόσο για ανάληψη. Θα δώσουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για $n = 4$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι $2 + 2$. Τώρα υποθέτουμε ότι μπορούμε να κάνουμε ανάληψη το ποσό των €k. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε €$k + 1$.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

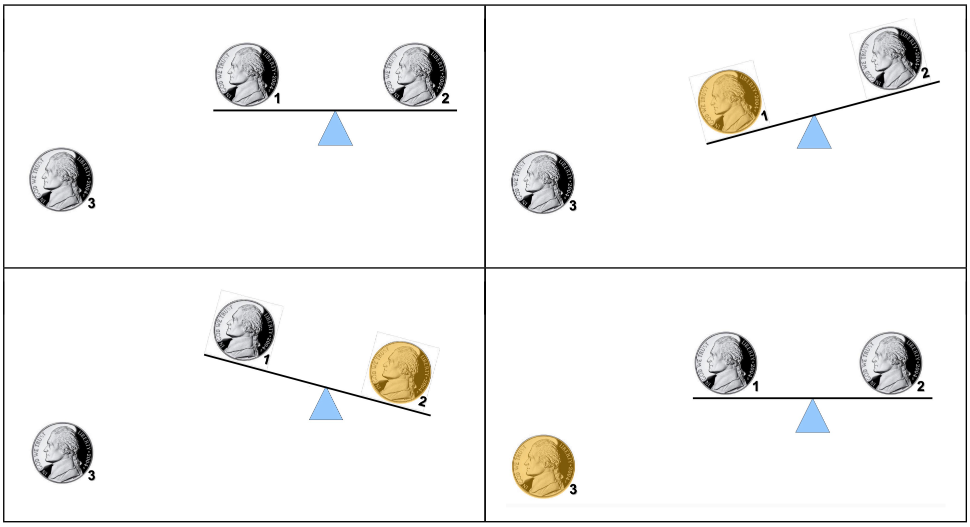
- Αν στο ποσό k υπάρχουν δυο δίευρα, τότε τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με ένα πεντάευρο
- Αν υπάρχει ένα πεντάευρο, τότε το αφαιρούμε και το αντικαθιστούμε με τρία δίευρα.
- Αν υπάρχουν ένα πεντάευρο και ένα δίευρο, τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με τέσσερα δίευρα.

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ανάληψη €$k + 1$.

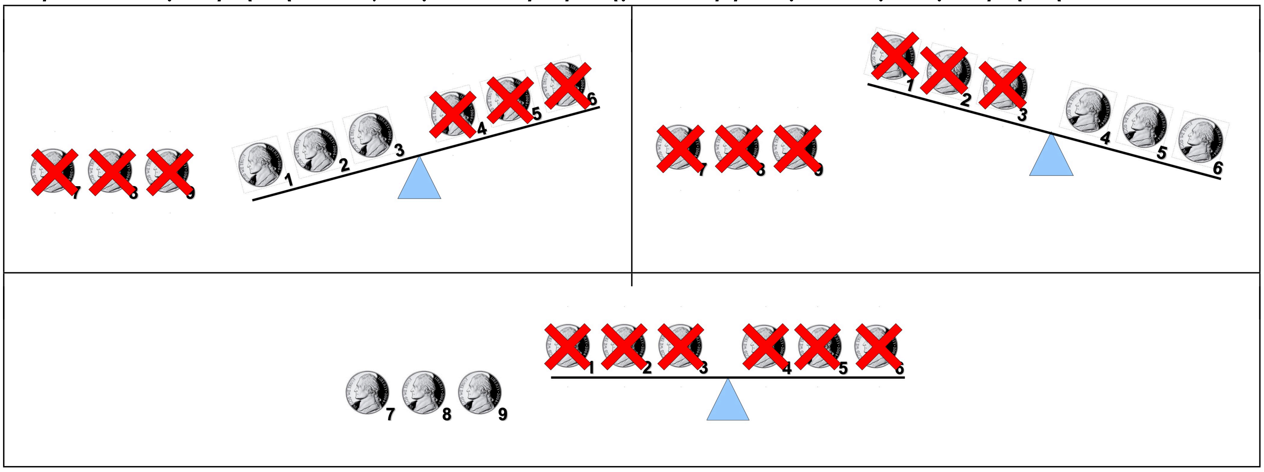
Το πρόβλημα έχει και μια άλλη διαφορετική λύση. Θέλουμε να πάρουμε €n.

- Αν το n είναι άρτιος, τότε μπορούμε να το πάρουμε μόνο με δίευρα.
- An to n είναι περιττός τότε, επειδή το $n-5$ είναι άρτιος, μπορούμε να το πάρουμε ως ένα πεντάευρο και τα υπόλοιπα δίευρα.

(4) Δίνονται τρία ίδια νομίσματα, δυο από τα οποία είναι γνήσια και ένα πλαστό. Το πλαστό νόμισμα ζυγίζει πιο πολύ από τα άλλα. Χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά μόνο μια φορά, να βρείτε το πλαστό νόμισμα.
Ο παρακάτω πίνακας δίνει την απάντηση:



Πιο δύσκολο πρόβλημα: Δίνονται εννιά όμοια νομίσματα έτσι ώστε οκτώ απ’ αυτά είναι όμοια και το άλλο πλαστό, που ζυγίζει περισσότερο. Να βρείτε το πλαστό νόμισμα με δυο ζυγίσματα.Με την παρακάτω μέτρηση, ανάγουμε το πρόβλημα να βρούμε σε μια μέτρηση το πλαστό νόμισμα.



Εδώ παρατηρούμε ένα μοτίβο:

1. Εάν δεν κάνουμε καμία μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή ενός νομίσματος, γιατί γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πλαστό.
2. Εάν κάνουμε μια μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή τριών νομισμάτων.
3. Εάν κάνουμε δυο μετρήσεις, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή εννιά νομισμάτων.

Παρατηρούμε ότι $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$.

Να δείξετε ότι με n μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή 3^n νομισμάτων.

Θα αποδείξουμε την πρόταση με μαθηματική επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για $n = 0$, όπως ήδη παρατηρήσαμε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για k.
Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι με $n = k$ μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό νόμισμα από μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Θα δείξουμε την πρόταση για $n = k + 1$.

Χωρίζουμε την συλλογή των 3^{k+1} νομισμάτων σε τρεις ομάδες των 3^k νομισμάτων. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε A, B και C. Τοποθετούμε τα νομίσματα των A και B στην ζυγαριά. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Η A είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην A.
2. Η B είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην B.
3. ΟΙ A και B έχουν το ίδιο βάρος. Τότε το πλαστό είναι στην C.

Σε κάθε περίπτωση το πλαστό βρίσκεται σε μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Από την υπόθεση της επαγωγής, με k μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό.
Με την αρχική μέτρηση, συνολικά κάναμε $k+1$ μετρήσεις, αποδεικνύοντας την πρόταση.

(5) Όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα (**βρείτε το λάθος**).

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε σε κάθε συλλογή k αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Θα δείξουμε ότι σε κάθε συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Παίρνουμε μια συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων. Από την υπόθεση τα πρώτα k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα τελευταία k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Άρα όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Παραδείγματα Επαγωγής-2

(1) Να δείξετε ότι

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, n\geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned}
1+2 &= 3=\frac{2.3}{2}\\
1+2+3 &= 6=\frac{3.4}{2}\\
1+2+3+4 &= 10=\frac{4.5}{2} \quad \text{(Αγία Τετράκτυς)}\\
1+2+3+4+5 &= 15=\frac{5.6}{2}
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2}{2} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$(1 + 2 + \cdots + m) + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να δειχτεί χωρίς την χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής, πολύ απλά. Η μέθοδος αυτή επινοήθηκε από τον Gauss όταν ήταν μαθητής δημοτικού. Το πρόβλημα που έβαλε ο δάσκαλος στους μαθητές τους ήταν οι μαθητές να βρουν το άθροισμα

$$1 + 2 + \cdots + 100.$$

Ο δάσκαλος παρατήρησε ότι ο Gauss τελείωσε πολύ γρήγορα. Ο Gauss παρατήρησε ότι

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 50 + 51 = 101.$$

και έχουμε 50 τέτοια ζευγάρια. Άρα το άθροισμα είναι

$$101.50 = 5050.$$

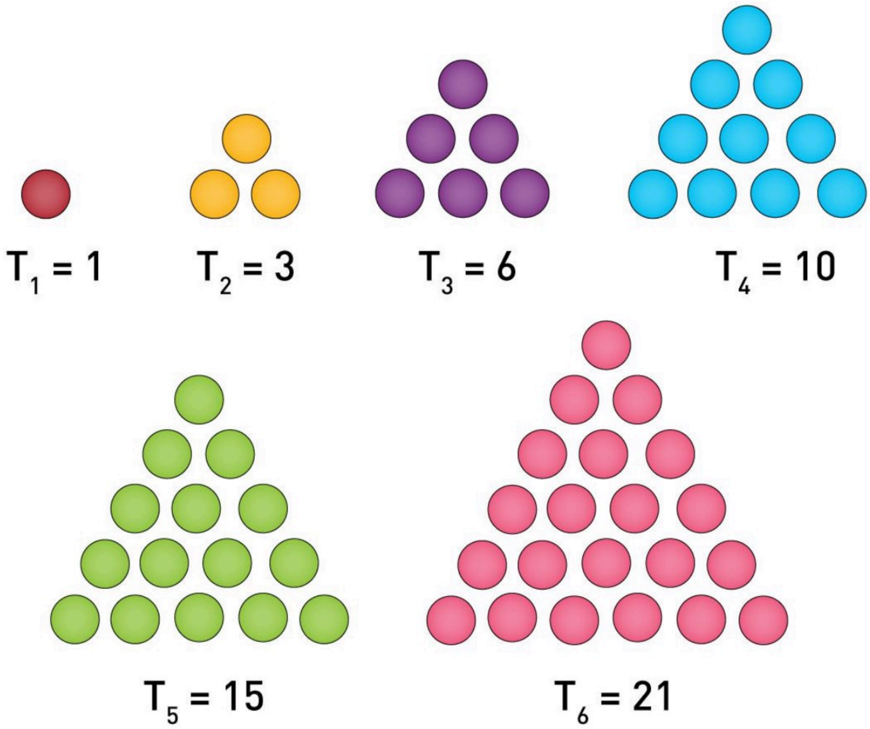
Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω πιο συστηματικά. Έστω

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

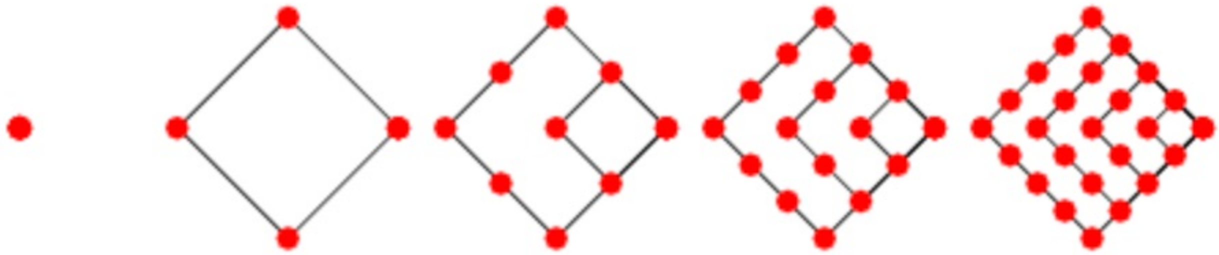
Γράφουμε το S με δυο τρόπους και προσθέτουμε

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + 2 + \cdots + n \\ S_n & = & n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \Rightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

Οι αριθμοί S_n ονομάζονται τριγωνικοί γιατί μπορούν να κατανεμηθούν σε τρίγωνο:



Συνεχίζοντας αυτήν ορολογία, ορίζουμε τους τετραγωνικούς αριθμούς, ως αριθμούς που μπορούν να αναπαρασταθούν σε τετράγωνα:



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots$$

Θέτουμε $Q_n = n^2$ για τον n-οστό τετράγωνο αριθμό. Παρατηρούμε

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n + 1.$$

Ξεκινάμε με το επόμενο σχήμα:

Παρατηρούμε ότι

1. Ο συνολικός αριθμός των τριγώνων είναι n^2.
2. Ο αριθμός των πράσινων τριγώνων είναι

$$1, 3, 6, 10, 15, 21$$

   δηλαδή S_n.
3. Ο αριθμός των άσπρων τριγώνων είναι

$$0, 1, 3, 6, 10$$

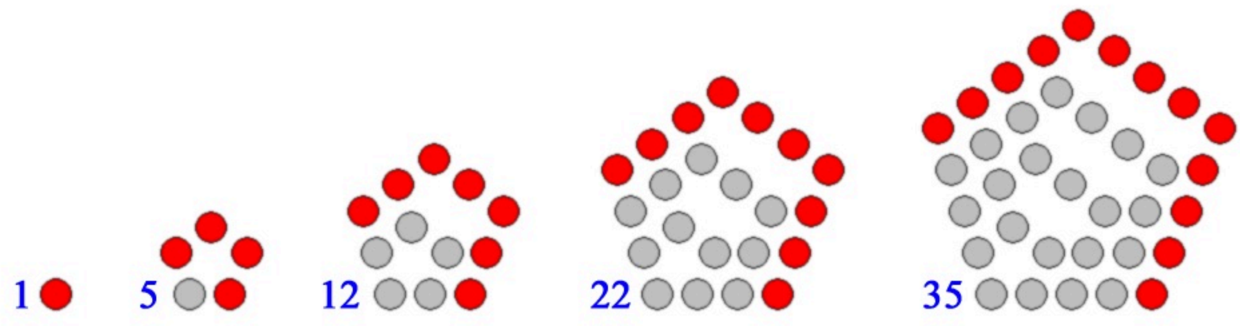
   δηλαδή S_{n-1}.

Άρα $S_n + S_{n-1} = n^2$.

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση:

$$
\begin{aligned}
S_n + S_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)+(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2
\end{aligned}
$$

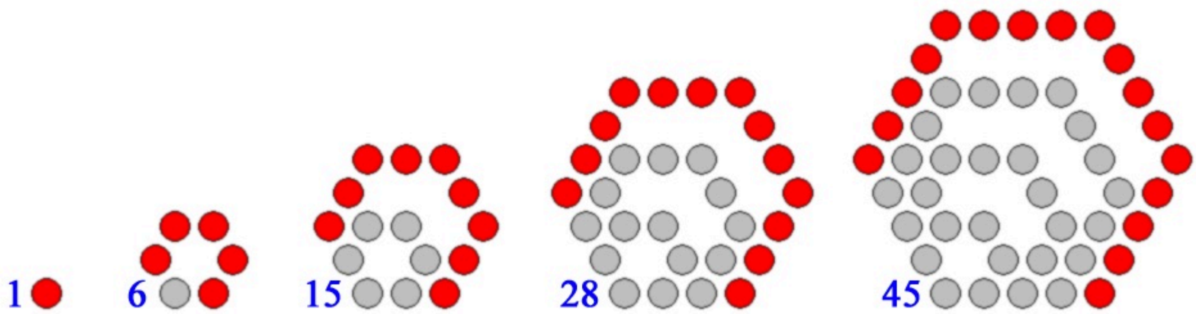
Επίσης υπάρχουν πεντάγωνοι αριθμοί:



με γενική φόρμουλα

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

και εξάγωνοι



με γενική φόρμουλα:

$$H_n = 2n^2 - n$$

.

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε s- γωνικούς αριθμούς αν μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα κανονικό s-γωνο. Ο τύπος για τον n-οστο τέτοιο αριθμό δίνεται:

$$P(s,n) = \frac{(s-2)n^2-(s-4)n}{2} = (s-2)\frac{n(n-1)}{2} + n.$$

Για $n=3$:

$$P(3,n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.$$

(2) Να δείξετε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 &= 5 = \frac{2.3.5}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 &= 14 = \frac{3.4.7}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 &= 30 = \frac{4.5.9}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 &= 55 = \frac{5.6.11}{6}
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}
(1^2 + 2^2 + \cdots + m^2) + (m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\
&= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} \\
&= \frac{(m+1)(2m^2 + m + 6m + 6)}{6} \\
&= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6}
\end{aligned}$$

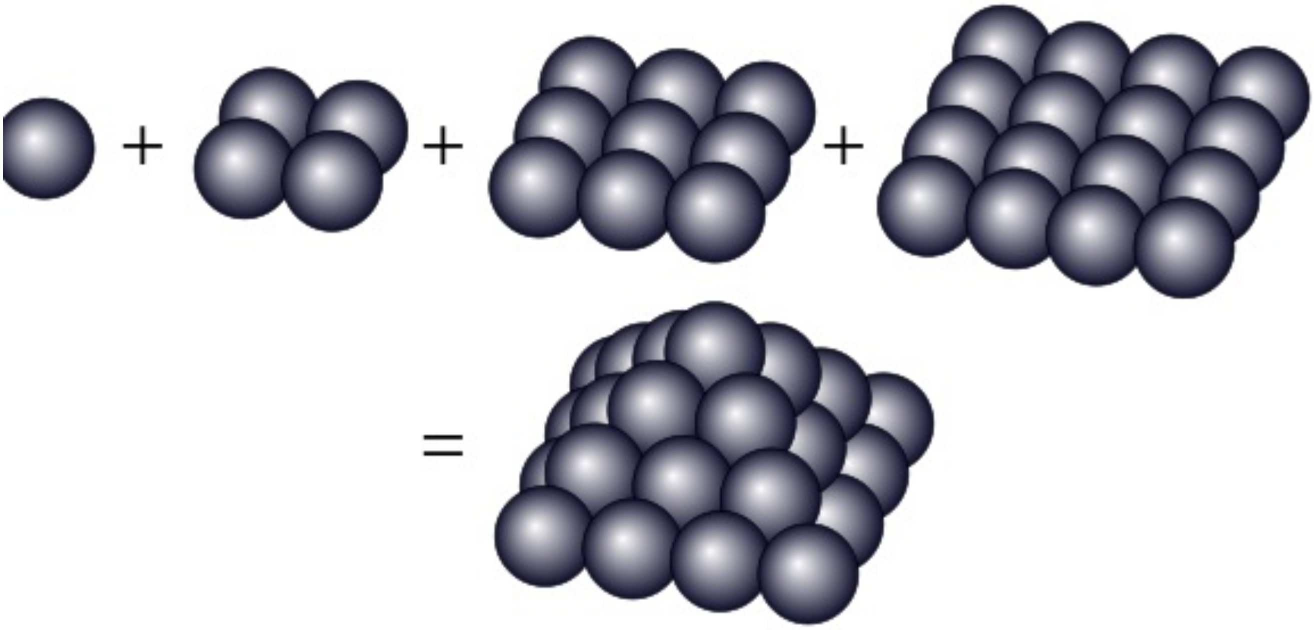
Παρατηρούμε ότι

$$(m+2)(2m+3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6.$$

Συνοψίζοντας

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Παραστατικά:



Γι' αυτό αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται τετράγωνοι πυραμοειδείς αριθμοί.

(3) Να δείξετε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+2+\cdots+n)^2, n \geq 1.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2^2}{4} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 + (m+1)^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

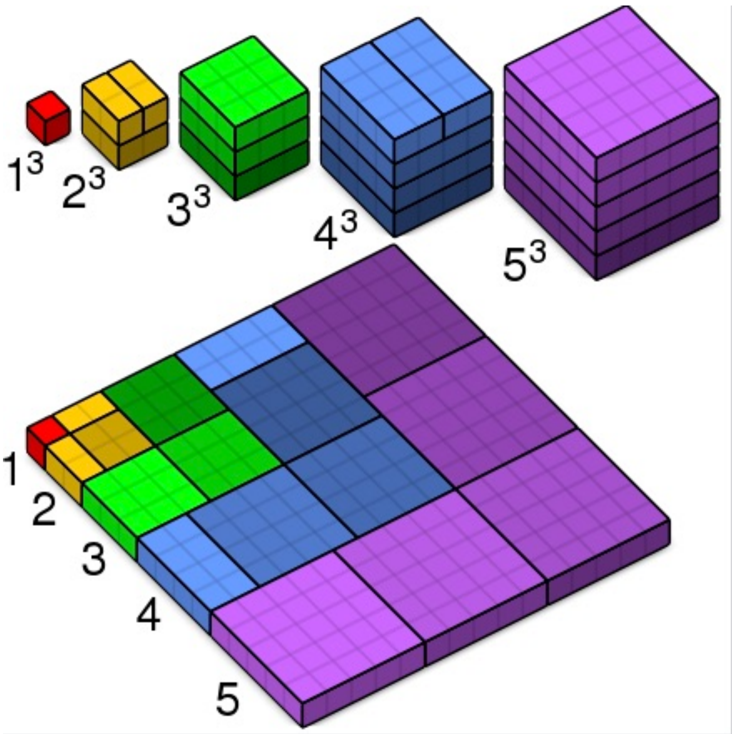
$$\begin{aligned}
(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3) + (m+1)^3 &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\
&= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2[m^2 + 4(m+1)]}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(m+2)^2 = m^2 + 2.2.m + 2^2 = m^2 + 4m + 4.$$

Οι υπόλοιπες ισότητες είναι συνέπεια του πρώτου παραδείγματος

Γεωμετρικά:

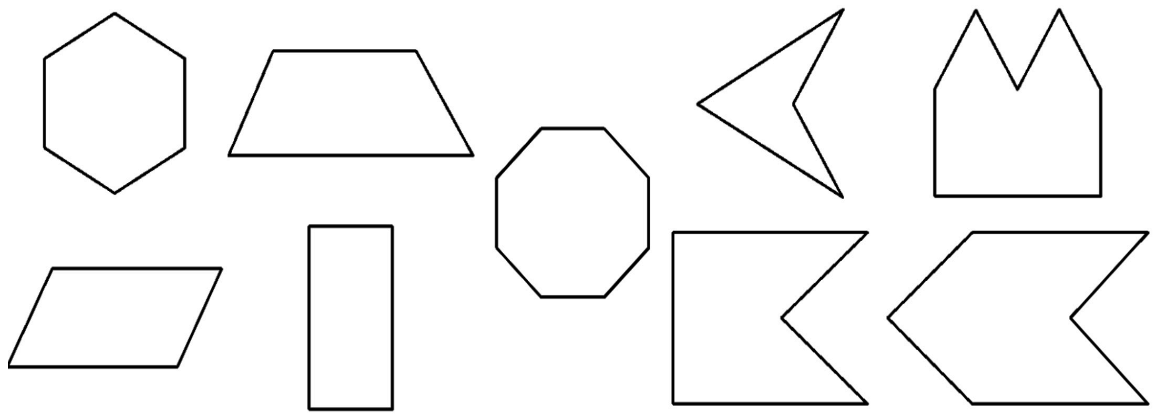


(4) Να δείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός κυρτού n-γώνου είναι $n(n-3)/2$, για $n \geq 4$.

Διαγώνιος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με μια μη-γειτονική κορυφή.

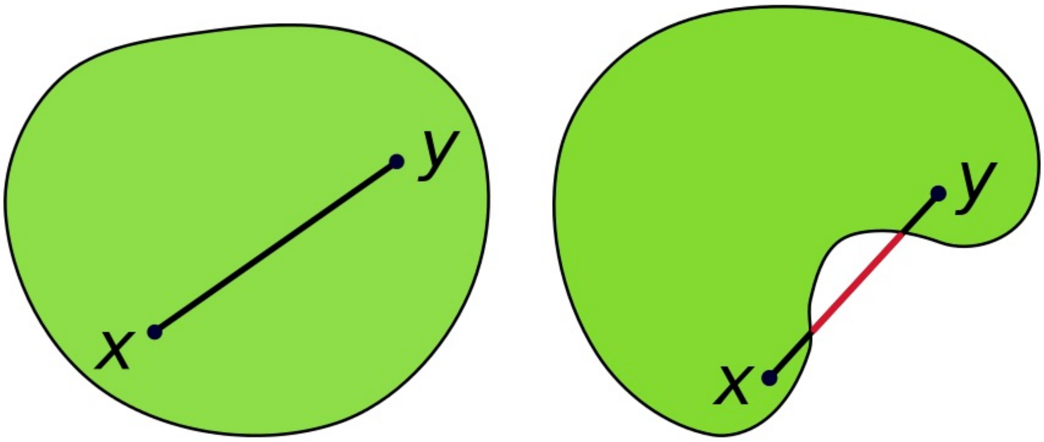
Ένα σχήμα (μια περιοχή) στο επίπεδο ή στον χώρο ονομάζεται **κυρτό** αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία του περιέχεται στο σχήμα.

Κάποια σχήματα

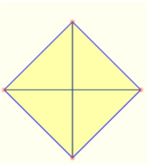
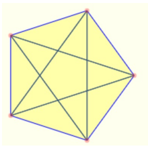
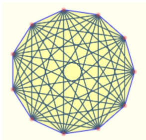
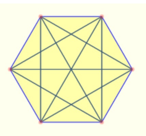
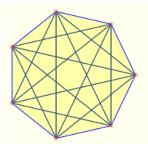
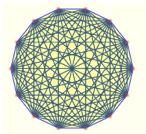
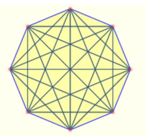
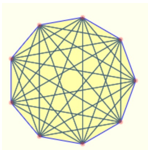
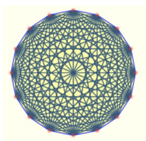


Τα πρώτα πέντε είναι κυρτά και τα άλλα τέσσερα δεν είναι

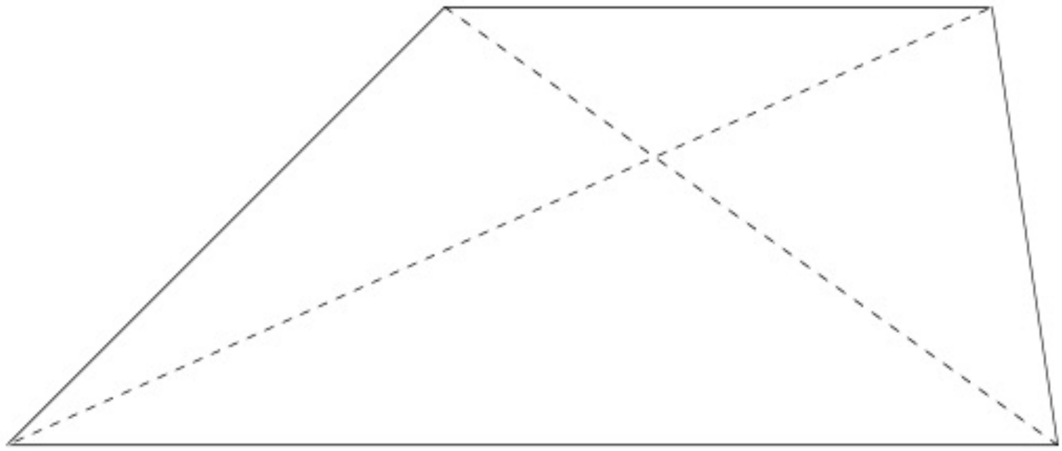
Και πιο παραστατικά:



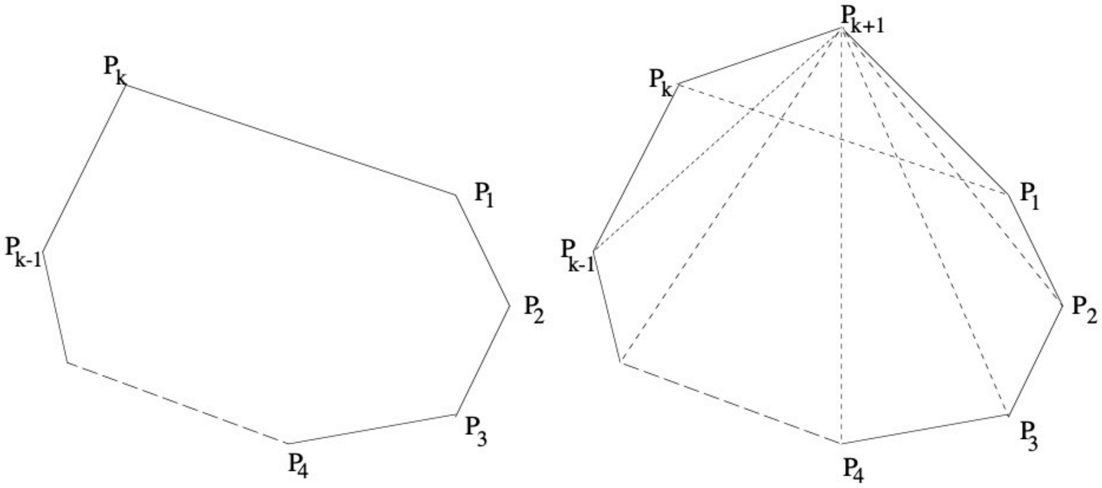
Πρώτα να δούμε κάποια παραδείγματα.

	2		5		44
	9		14		77
	20		27		104

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$. Τότε, έχουμε δυο διαγώνιους. Αλλά και $4(4-3)/2 = 2$ και η πρόταση ισχύει.



Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$, δηλαδή υποθέτουμε ότι ένα κυρτό k-γώνο έχει $k(k-3)/2$ διαγώνιους. Θα δείξουμε ότι ένα κυρτό $(k+1)$-γώνο έχει $(k+1)(k-2)/2$ διαγώνιους.



Όταν προσθέσουμε μια ακόμη κορυφή σε ένα κυρτό k-γώνο, οι διαγώνιοι που είχαμε πριν παραμένουν. Από την υπόθεση έχουμε ήδη $k(k-3)/2$ διαγώνιους.
Επίσης, έχουμε τις διαγώνιους από την κορυφή P_{k+1} στις όλες τις κορυφές, εκτόςτων γειτονικών, P_1 και P_k, δηλαδή επιπλέον $(k-2)$-διαγώνιους. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το P_1 με το P_k, που ήταν πλευρά, τώρα είναι διαγώνιος. Άρα ο αριθμός των διαγώνιων συνολικά είναι:

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k^2 - 3k}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

(5) Δείξτε ότι $n^2 \geq 2n+1$, $n \geq 3$.
Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι εκθετική ως προς το n και η δεξιά γραμμική. Σε γενικές γραμμές, εκθετικές συναρτήσεις είναι μεγαλύτερες των γραμμικών, για **μεγάλες τιμές** του n.
Παρατηρούμε ότι η υπόθεση $n \geq 3$ είναι απαραίτητη:
$n = 0: \ 0 < 1.$
$n = 1: \ 1 < 3.$
$n = 2: 4 < 5.$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 3$, $3^2 = 9 > 7 = 2.3 + 1$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Δηλαδή $k^2 \geq 2k + 1$, όπου $k \geq 3$.
Θα δείξουμε ότι $(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Ξεκινάμε αναλύοντας την αριστερή πλευρά της σχέσης:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 2(k+1) + 2k > 2(k+1) + 1,$$

γιατί $2k \geq 6 > 1$.

(6) Να δείξετε ότι

$$n^2 \leq 2^n, \;\; n \geq 4.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι δυνάμεις του n ενώ η δεξιά πλευρά είναι δύναμη κάποιου σταθερού αριθμού. Και πάλι, για μεγάλες δυνάμεις, η αριστερή πλευρά γίνεται μικρότερη από την δεξιά:

$n = 0 : \;\; 0 < 1.$
$n = 1 : \;\; 1 < 2.$
$n = 2 : 4 = 4.$
$n = 3 : 9 > 8.$
$n = 4 : 16 = 16.$
$n = 5 : 25 < 32$
Γι' αυτό ξεκινάμε από το $n \geq 4$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$, γιατί η σχέση ξεκινάει από το 4:

$$4^2 = 16 = 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι $k^2 \leq 2^k$.
Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(k + 1)^2 \leq 2^{k+1}$. Οπότε

$$2^{k+1} = 2.2^k \geq 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο παράδειγμα στο τέταρτο βήμα.

(7) Δείξτε ότι $(2n)!(n+1) > 4^n(n!)^2$ για $n > 1$.
(Υπενθυμίζουμε ότι $n! = 1.2.\ldots.n$).
Η σχέση αυτή είναι πιο πολύπλοκη. Απλά, τα παραγωγικά μεγαλώνουν πολύ γρήγορα σε σχέση με τις δυνάμεις.
$n = 0: \;\; 1 = 1.$
$n = 1: \;\; 2.2 = 4.1.$
$n = 2: 4!.3 = 1.2.3.4.3 = 72 > 4^2.(2!)^2 = 16.4 = 64.$
Για $n = 3$, ας συγκρίνουμε το $6!.4 = 1.2.3.4.5.6.4$ και το $4^3.(3!)^2 = 4.4.4.1.2.3.1.2.3$ χωρίς την χρήση υπολογιστών:

$$1.\cancel{2.3}.\cancel{4}.{\color{red}5}.\cancel{6}.\cancel{4} \sim \cancel{4.4}.{\color{red}4}.1.\cancel{2.3}.1.\cancel{2.3}.$$

και τελικά η αριστερή πλευρά είναι μεγαλύτερη της δεξιάς.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 2$, $4!.3 = 72 > 4^2.(2!)^2 = 64$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, $(2k)!(k+1) > 4^k(k!)^2$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$ δηλαδή $(2k+2)!(k+2) > 4^{k+1}((k+1)!)^2$. Ξεκινάμε από την αριστερή πλευρά της σχέσης προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε ώστε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση της επαγωγής:

$$(2k+2)!(k+2) = (2k)!(2k+1)(2k+2)(k+2) = (2k)!(2k+1)2(k+1)(k+2)$$

Εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής,

$$(2k+2)!(k+2) > 2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης είναι μεγαλύτερο του δεξιού μέρους της αρχικής σχέσης

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2$$

Άρα

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2 = 4.4^k(k!)^2(k+1)^2 \Leftrightarrow (2k+1)(k+2) > 2(k+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2k^2+4k+k+2 > 2k^2+4k+2 \Leftrightarrow 5k > 4k.$$

Η τελευταία σχέση προφανώς ισχύει για $k \geq 2$.

(8) Να δείξετε ότι $n! > 3^n$, $n \geq 7$.
Η ιδέα και πάλι είναι ότι, γενικά, τα παραγοντικά είναι μεγαλύτερα από τις δυνάμεις σταθερού αριθμού γιατί στα παραγοντικά πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς που αυξάνουν ενώ στις δυνάμεις πολλαπλασιάζουμε με έναν σταθερό αριθμό.
Αρχικά ελέγχουμε κάποιες τιμές:
$n = 0: \; 1 = 1, \quad n = 1: \; 1 < 3, \quad n = 2: \; 2 < 9 \quad n = 3: \; 1.2.3 = 6 < 3.3.3 = 27.$
$n = 4: \; 1.2.3.4 = 24 < 3.3.3.3 = 81, \quad n = 5: \; 1.2.3.4.5 = 120 < 3.3.3.3.3 = 243.$
$n = 6 : 1.2.3.4.5.6 = 720 < 3.3.3.3.3.3 = 729 \quad n = 7 : 1.2.3.4.5.6.7 = 5040 > 2187.$Από δω και πέρα, η ανισότητα διατηρείται γιατί στο επόμενο βήμα, πολλαπλασιάζουμε την αριστερή πλευρά με έναν αριθμό μεγαλύτερο του 3 και την δεξιά επί 3.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 7$, κάτι που το κάναμε ήδη:

$$7! = 1.2.3.4..5.6.7 = 5040 > 2187 = 3^7.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 7$, δηλαδή $m! > 3^m$. Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(m+1)! > 3^{m+1}$.
Υπολογίζουμε

$$(m+1)! = (m+1).m! > (m+1)3^m > 3.3^m = 3^{m+1}$$

κι αυτό γιατί $m > 7$ και επομένως $m + 1 > 3$.

(9) Μπορεί να δειχτεί ότι $(2+\sqrt{3})^n$ μπορεί να γραφτεί ως $a_n + b_n\sqrt{3}$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ισχύει $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
Αυτή η σχέση βγαίνει ουσιαστικά από την ανάπτυξη της δεξιάς πλευράς, κάνοντας όλους τους πολλαπλασιασμούς και χρησιμοποιώντας ότι $(\sqrt{3})^2 = 3$.
Και πάλι ας κάνουμε κάποιους υπολογισμούς για να δούμε πως δουλεύει η διαδικασία:

$$\begin{aligned}
n=0: &\quad (2+\sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1, b_0 = 0 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1.\\
n=1: &\quad (2+\sqrt{3})^1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1 \Rightarrow 2^2 - 3.1^2 = 1.\\
n=2: &\quad (2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2.2.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow\\
&\quad a_2 = 7, b_2 = 4 \Rightarrow 7^2 - 3.4^2 = 49 - 3.16 = 1.\\
n=3: &\quad (2+\sqrt{3})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{3} + 3.2.(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 3.2.3 + 3\sqrt{3} =\\
&\quad 26 + 15\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 26, b_3 = 15 \Rightarrow 26^2 - 3.15^2 = 676 - 3.225 = 1.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}.(\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$.

Μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς διαφορετικά για $n = 3$:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^3 &= (2+\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3}) = (7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \\ &= 14 + 7\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 4.3 = 26 + 15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

όπως παραπάνω.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Οπότε

$$a_0^2 - 3b_0^2 = 1^2 - 3.0^2 = 1,$$

οπότε ισχύει. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$(2+\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}, \quad a_m^2 - 3b_m^2 = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 = 1$.

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^{m+1} &= (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m = (2+\sqrt{3})(a_m + b_m\sqrt{3}) \\
&= 2a_m + 2b_m\sqrt{3} + a_m\sqrt{3} + 3b_m \\
&= (2a_m + 3b_m) + (a_m + 2b_m)\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Άρα, $a_{m+1} = 2a_m + 3b_m$ και $b_{m+1} = a_m + 2b_m$. Τότε

$$
\begin{aligned}
a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 &= (2a_m + 3b_m)^2 - 3(a_m + 2b_m)^2 \\
&= 4a_m^2 + 12a_m b_m + 9b_m^2 - 3(a_m^2 + 4a_m b_m + 4b_m^2) \\
&= 4a_m^2 + \cancel{12a_m b_m} + 9b_m^2 - 3a_m^2 - \cancel{12a_m b_m} - 12b_m^2 \\
&= a_m^2 - 3b_m^2 = 1.
\end{aligned}
$$

(10) (Ανισότητα του Bernoulli) Δείξτε ότι $(1+x)^n \geq 1+nx$ για $n \geq 1$ και $x \geq -1$.

Αν ελέγξουμε την σχέση για κάποιες τιμές του x:
$x=-1$: $0 \geq 1-n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$.
$x=0$: $1^n \geq 1$.
$x=1$: $2^n \geq 1+n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική.
$x=2$: $3^n \geq 1+2n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική, όπως και πριν.

Τώρα ελέγχουμε ως προς τις τιμές του n:
$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$, προφανές.
$n = 2$: $(1 + x)^2 = \cancel{1 + 2x} + x^2 \geq \cancel{1 + 2x}$, προφανές γιατί $x^2 \geq 0$, για κάθε x.
$n = 3$: $(1 + x)^3 = \cancel{1 + 3x} + 3x^2 + x^3 \geq \cancel{1 + 3x}$. Για να δούμε ότι ισχύει, πρέπει να δείξουμε ότι

$$0 \leq 3x^2 + x^3 = x^2(3 + x)$$

Το $x^2 \geq 0$ και $3 + x > 0$ γιατί $x \geq -1 \Rightarrow 3 + x \geq 3 - 1 = 2 > 0$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$, $1 + x = 1 + x$. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, για $x \geq -1$. Θα δείξουμε $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)\underbrace{(1 + x)^k \geq (1 + kx)}_{\text{από την υπόθεση}}(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

Κι αυτό γιατί $kx^2 \geq 0$.

Είναι μια ενδιαφέρουσα ανισότητα. Για παράδειγμα:

- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1+n.\dfrac{1}{n}=2.$
- $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n \geq 1+n.\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2n+1}{n+1}.$

(11) Δείξτε ότι ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Και πάλι ας κάνουμε κάποια παραδείγματα:
$n = 0$: Το σύνολο με κανένα στοιχείο είναι το κενό $\emptyset$ και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό του.
$n = 1$: Το σύνολο έχει ένα στοιχείο $S = \{a\}$ και έχει δυο υποσύνολο, το $\emptyset$ και το $\{a\}$.
$n = 2$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} = S.$$

$n = 3$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S.$$

$n = 4$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c, d\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\begin{aligned}&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},\\ &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} = S.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο στην παραπάνω κατασκευή:

- Πάντα εμφανίζονται το $\emptyset$ και το σύνολο S.
- Τα υποσύνολα ενός συνόλου είναι επίσης και υποσύνολα κάθε υπερσυνόλου του.
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε τα υποσύνολα ενός συνόλου προσθέτοντας στοιχεία στα υποσύνολα υποσυνόλων του.
- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός υποσυνόλων εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των στοιχείων και όχι από την φύση τους.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύνολο είναι κενό και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό. Άρα η σχέση ισχύει. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για ένα σύνολο με k στοιχεία. Δηλαδή ένα τέτοιο σύνολο έχει 2^k υποσύνολα. Θα δείξουμε ότι ένα σύνολο με $k+1$-στοιχεία, $S = \{x_1, \dots x_{k+1}\}$ έχει 2^{k+1} υποσύνολα.
Από την υπόθεση, το σύνολο $\{x_1, \dots x_k\}$ έχει 2^k υποσύνολα. Για κάθε ένα απ' αυτά τα υποσύνολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμη με την πρόσθεση του x_{k+1} σ' αυτό. Άρα έχουμε ακόμη 2^k υποσύνολα. Συνολικά λοιπόν έχουμε $2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$ υποσύνολα.
Θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη αυτού του παραδείγματος χρησιμοποιώντας το Διώνυμο του Νεύτωνα.

12) Για $n \geq 3$, να δείξετε ότι υπάρχουν n φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Για $n = 3$, έχουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{3}{2.3} + \frac{2}{2.3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1 \right).$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή υπάρχουν k φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υπάρχουν $k + 1$ φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} = 1.$$

Ξεκινάμε με την υπόθεση, δηλαδή υπάρχουν k φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Διαιρούμε δια 2 την παραπάνω σχέση:

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2}.$$

Τώρα προσθέτουμε το $1/2$ και στις δυο πλευρές της εξίσωσης

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Παρατηρούμε

- Επειδή $a_i \neq a_j \Rightarrow 2a_i \neq 2a_j$, $i \neq j$.
- Επίσης, επειδή $a_i \neq 1$, $2a_i \neq 2$, για όλα τα i.

Άρα έχουμε εκφράσει το 1 ως άθροισμα $k+1$ κλασμάτων με αριθμητή 1.

(13) Να βρεθεί ο τύπος για το άθροισμα

$$S_n = 2 + 5 + \cdots + (3n - 1)$$

και να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Υπολογίζουμε το άθροισμα για κάποιες τιμές του n:
$n = 1$: $S_1 = 2$.
$n = 2$: $S_2 = 2 + 5 = 7$.
$n = 3$: $S_3 = 2 + 5 + 8 = 15$.
$n = 4$: $S_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$.
$n = 5$: $S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$.
$n = 6$: $S_6 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 57$.

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα με το άθροισμα $1 + 2 + \cdots + n$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο όρος $n/2$ θα βρίσκεται στο S_n. Έτσι υπολογίζουμε το $2/n.S_n$:

$$\frac{2}{1}S_1 = 2,\ \frac{2}{2}S_2 = 7,\ \frac{2}{3}S_3 = 10,\ \frac{2}{4}S_4 = 13,\ \frac{2}{5}S_5 = 16,\ \frac{2}{6}S_6 = 19.$$

$$\boxed{\frac{2}{n}S_n = 3n + 1 \Rightarrow S_n = \frac{n(3n+1)}{2}.}$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$

$$S_1 = 2 = \frac{1(3.1 + 1)}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$S_k = \frac{k(3k + 1)}{2}.$$

Θέλουμε να δείξουμε την εξίσωση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$S_{k+1} = \frac{(k + 1)(3(k + 1) + 1}{2} = \frac{(k + 1)(3k + 3 + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(3k + 4)}{2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(k + 1)(3k + 4) = 3k^2 + 4k + 3k + 4 = 3k^2 + 7k + 4$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$S_{k+1} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}.$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + (3(k+1)+1) = S_k + (3k+2) = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 \\
&= \frac{k(3k+1) + 2(3k+2)}{2} = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}
\end{aligned}
$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(14) Να βρεθεί ο τύπος για το άθροισμα

$$P_n = 1.2 + 2.3 + \cdots + n.(n+1)$$

και να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Υπολογίζουμε το άθροισμα για κάποιες τιμές του n:
$n = 1$: $P_1 = 2$.
$n = 2$: $P_2 = 2 + 6 = 8$.
$n = 3$: $P_3 = 2 + 6 + 12 = 20$.
$n = 4$: $P_4 = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$.
$n = 5$: $P_5 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70$.
$n = 6$: $P_4 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 = 112$.

$$\boxed{P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$$

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα με το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο όρος $n(n+1)/6$ θα βρίσκεται στο S_n. Έτσι υπολογίζουμε το $6/n(n+1).P_n$:

$$\frac{6}{1.2}P_1 = 6,\ \frac{6}{2.3}P_2 = 8,\ \frac{6}{3.4}P_3 = 10,\ \frac{6}{4.5}P_4 = 12,\ \frac{6}{5.6}P_5 = 14,\ \frac{6}{6.7}P_6 = 16.$$

$$\boxed{\frac{6}{n(n+1)}P_n = 2n+4 \Rightarrow P_n = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$

$$P_1 = 1.2\frac{1.2.3}{3}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$P_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Θέλουμε να δείξουμε την εξίσωση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$P_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(15) Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1, \quad n\geq 1.$$

Φυσικά ισχύει για $n=1$ $(1/2<1)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}<1,$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<1.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση άμεσα έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}<1+\frac{1}{2^{k+1}}$$

που δεν οδηγεί πουθενά. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε άλλη μέθοδο.

Αρχικά, κάνουμε κάποιες πράξεις:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\ &< \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\end{aligned}$$

και η ανισότητα ισχύει από την υπόθεση.

(16) Εξετάστε αν ισχύει ο τύπος:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Θα δείξουμε την σχέση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(k^2 + 2.k.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(k^2 + 3k + \frac{9}{4}\right).$$

και τελικά

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}.\frac{4k^2 + 12k + 9}{4} = \frac{4k^2 + 12k + 9}{8}.$$

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + k + 1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + k + 1.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + k + 1 = \frac{1}{2}\left(k^2 + 2.k.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + k + 1 = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{1}{8} + k + 1$$
$$\frac{4k^2 + 4k}{8} + \frac{1}{8} + \frac{8k + 8}{8} = \frac{4k^2 + 12k + 9}{8}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

ΒΡΕΙΤΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ

Δεν ισχύει για $n = 1$:

$$1 \neq \frac{9}{8}.$$

Το Διώνυμο του Νεύτωνα

Ήδη χρησιμοποιήσαμε τον διώνυμο του Νεύτωνα για $n = 2, 3$. Το διώνυμο μας δίνει το ανάπτυγμα του $(a+b)^n$ ως προς τις δυνάμεις του a και του b. Ειδικότερα ισχύει

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^{n-s} b^s, \quad C_s^n = \binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{s!}}$$

Οι συντελεστές C_s^n δίνουν των αριθμό των επιλογών s αντικειμένων από μια συλλογή n αντικειμένων, χωρίς επανάθεση και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους.

Θα το εξετάσουμε αυτό πιο αναλυτικά. Ξεκινάμε με μια συλλογή n αντικειμένων. Έχουμε n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, $n-1$ επιλογές για το δεύτερο και $n-s+1$ για το s αντικείμενο. Μ' αυτόν τον τρόπο επιλέξαμε s αντικείμενα αλλά με δεδομένη σειρά.

Η ερώτηση τώρα είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε s αντικείμενα.Και πάλι χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο. Για το πρώτο έχουμε s επιλογές, για το δεύτερο $s-1$ επιλογές, και τελικά για το τελευταίο 1 επιλογή. Δηλαδή έχουμε $s(s-1)\ldots 1 = s!$ επιλογές.

Άρα τελικά έχουμε

$$\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \binom{n}{s} = C_s^n.$$

Κάποιες βασικές ιδιότητές τους είναι:

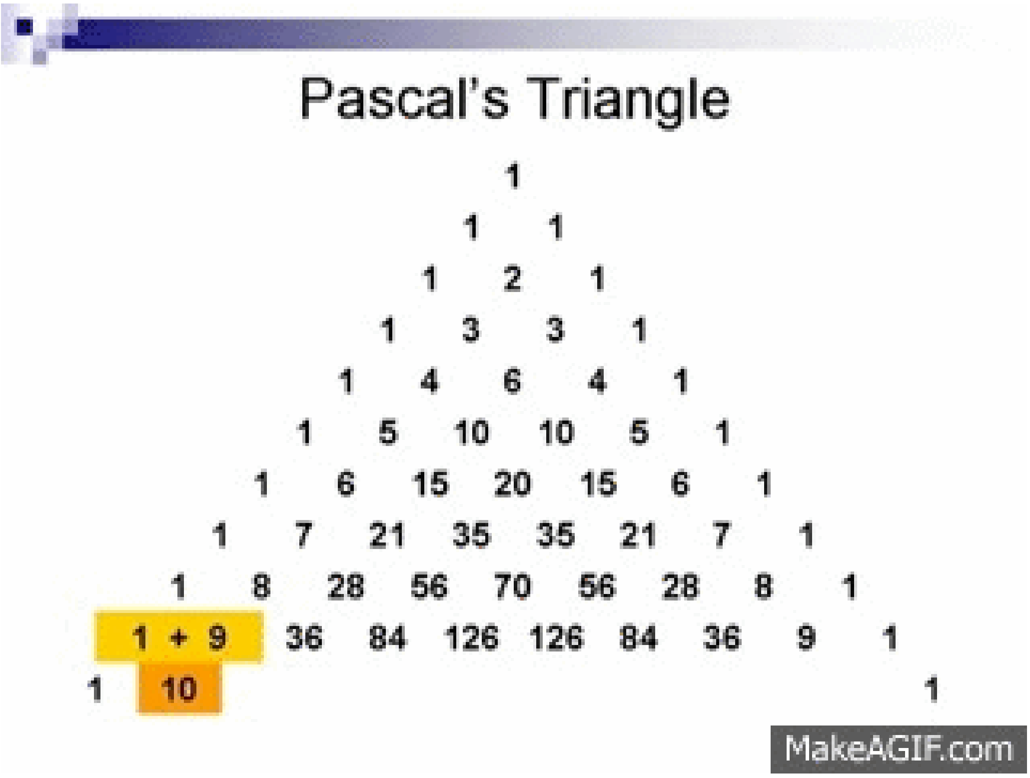
1. $C_0^n = 1 = C_n^n$. Κι αυτό γιατί υπάρχει μόνο ένας τρόπος να επιλέξουμε 0 ή n αντικείμενα από μια συλλογή n αντικειμένων.
2. $C_s^n = C_{n-s}^n$. Αυτό ισχύει γιατί η επιλογή s αντικειμένων ισοδυναμεί με την επιλογή των υπόλοιπων $n-s$ αντικειμένων.
3. $C_1^n = C_{n-1}^n = n$. Επειδή υπάρχουν n διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε ένα αντικείμενο από μια συλλογή n αντικειμένων.

Οι συντελεστές του διωνύμου δίνονται από το τρίγωνο του Pascal:

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Κάθε γραμμή αρχίζει και τελειώνει με το 1. Οι όροι της γραμμής δημιουργούνται από την προηγούμενη προσθέτοντας δυο διαδοχικούς όρους. Έτσι έχουμε

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$


Pascal's Triangle
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 + 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 1
MakeAGIF.com

Στο τρίγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & \color{red}{1} & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & \color{red}{3} & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & \color{red}{6} & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & \color{red}{10} & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \color{red}{15} & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & \color{red}{21} & & 7 & & 1
\end{array}
$$

- Οι κόκκινοι αριθμοί είναι οι τριγωνικοί αριθμοί.
- Το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι τετράγωνο.

Η επόμενη είναι μια χρήσιμη σχέση μεταξύ των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n+1}{s} = \binom{n}{s-1} + \binom{n}{s}.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{s-1} + \binom{n}{s} &= \frac{n!}{(n-s+1)!(s-1)!} + \frac{n!}{(n-s)!s!} = \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!}\left(\frac{1}{n-s+1} + \frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!}\,\frac{s+n-s+1}{s(n-s+1)} = \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!}\,\frac{n+1}{s(n-s+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-s)!s!} = \binom{n+1}{s}
\end{aligned}$$

Στο τρίγωνο του Pascal, αυτό σημαίνει ότι ένα στοιχείο (εκτός του 1) είναι το άθροισμα των δυο επάνω διαγώνιων όρων:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & \color{red}{5} & & \color{red}{10} & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & \color{red}{15} & & \color{blue}{20} & & \color{blue}{15} & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \color{blue}{35} & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Διώνυμο του Νεύτωνα

Για κάθε a και b ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^{n-s} b^s, \quad n \geq 1.$$

Θα δώσουμε μια απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$(a+b)^k = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^{k-s} b^s$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^{k+1-s} b^s.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s}b^s = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s}b^{s+1}$$

$$= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=1}^{k+1}\binom{k}{s-1}a^{k-(s-1)}b^{(s-1)+1}$$

όπου αντικαθιστούμε, στο δεύτερο άθροισμα, το s με το $s-1$.

$$= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=1}^{k+1}\binom{k}{s-1}a^{k-s+1}b^s$$

$$= a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s-1}a^{k-s+1}b^s + b^{k+1}$$

$$= a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \left[\binom{k}{s} + \binom{k}{s-1} \right] a^{k-s+1} b^s + b^{k+1}$$

$$= a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k+1}{s} + b^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^{k+1-s} b^s$$

Παραδείγματα

(1) Να αναπτύξετε το άθροισμα $(2a-1)^4$.

Τους συντελεστές τους παίρνουμε από το τρίγωνο του Pascal:

$$(2a-1)^4 = (2a)^4+4(2a)^3(-1)+6(2a)^2(-1)^2+4(2a)(-1)^3+(-1)^4 = 16a^4-32a^3+24a^2-8a+1.$$

(2) Να απλοποιήσετε το άθροισμα $(1-\sqrt{2})^5$.

Τους συντελεστές τους παίρνουμε από το τρίγωνο του Pascal:

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^5 &= 1-5\sqrt{2}+10(\sqrt{2})^2-10(\sqrt{2})^3+5(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^5 \\ &= 1-5\sqrt{2}+20-20\sqrt{2}+20-4\sqrt{2}=41-29\sqrt{2}\end{aligned}$$

Να θυμηθούμε:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{2})^2\sqrt{2}=2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2})^4 &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2=2.2=4 \\ (\sqrt{2})^5 &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2\sqrt{2}=2.2,\sqrt{2}=4.\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Στο διώνυμο του Νεύτωνα θέτουμε $a = b = 1$ και έχουμε

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι το C_s^n είναι ο αριθμός των υποσυνόλων με s στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων, γιατί ένα υποσύνολο s στοιχείων είναι η επιλογή s στοιχείων από μια συλλογή n στοιχείων, χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την σειρά. Άρα ο παραπάνω τύπος μας δίνει τον συνολικό αριθμό των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, όπως δείξαμε πριν με επαγωγή.

(4) Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

(η κατάληξη των αθροισμάτων εξαρτάται από το αν ο n είναι περιττός ή άρτιος).

Στο διώνυμο του Νεύτωνα θέτουμε $a = 1$, $b = -1$ και έχουμε

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

(5) Να δείξετε ότι

$$\binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 .$$

Ξεκινάμε από μια βασική ισότητα $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ και εφαρμόζουμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$\sum_{s=0}^{2n} \binom{2n}{s} x^s = \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s\right) \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s\right) .$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει για κάθε x. Άρα οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων στις δυο πλευρές είναι ίσοι. Εξετάζουμε τους συντελεστές του x^n.
Στην δεξιά πλευρά το x^n το έχουμε ως x^0x^n, xx^{n-1}, $\ldots x^nx^0$. Άρα

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι

$$\binom{n}{s} = \binom{n}{n-s}$$

Επομένως

$$\binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2.$$

Και στο τρίγωνο του Pascal

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & \color{red}{1} & & \color{red}{3} & & \color{red}{3} & & \color{red}{1} & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & \color{blue}{20} & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Το μπλε είναι το άθροισμα των κόκκινων τετραγώνων.

(6) Να δείξετε ότι

$$\sum_{s=0}^{n} s\binom{n}{s} = n2^{n-1}.$$

Διαφορίζουμε το παρακάτω διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s \quad \Rightarrow \quad ((1+x)^n)' = \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s\right)'$$

$$\Rightarrow \quad n(1+x)^{n-1} = \sum_{s=1}^{n} s\binom{n}{s} x^{s-1}$$

Στην παραπάνω εξίσωση θέτουμε $x = 1$:

$$n2^{n-1} = \sum_{s=1}^{n} s\binom{n}{s} = \sum_{s=0}^{n} s\binom{n}{s}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να αποδειχθούν με μαθηματική επαγωγή αν και η απόδειξη είναι πιο πολύπλοκη. Γενικά μ’ αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε πολλές σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των διωνύμων του Νεύτωνα.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε εξισώσεις από το διώνυμο του Νεύτωνα επιλέγοντας διάφορες τιμές για το a και το b.

- $a = 1$, $b = 2$:
$$3^n = (1+2)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 2^s.$$
- $a = 1$, $b = -2$ ή $a = 2$, $b = -3$:
$$\begin{aligned}(-1)^n &= (1-2)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-2)^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^s 2^s \\ &= (2-3)^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 2^s (-3)^{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^{n-s} 2^s 3^{n-s}\end{aligned}$$
- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$:
$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (\sqrt{2})^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 2^{\frac{s}{2}}.$$

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc|l}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & 11^1 = 11 \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & 11^2 = 121 \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & 11^3 = 1331 \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & 11^4 = 14641 \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & 11^5 = 161051 \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & 11^6 = 1771561 \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & 11^7 = 19487171
\end{array}
$$

Τα πρώτα ψηφία φαίνονται άμεσα. Για τα υπόλοιπα, τα προσθέτουμε ανά δυο αν έχουμε δεκάδες:

$n = 5$: $15 + 10 + 10 + 51 = 161051$.

$n = 6$: $16 + 15 + 20 + 1561 = 1771561$.

Αυτό είναι συνέπεια του

$$11^n = (10+1)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 10^s.$$

Ακέραιοι Αριθμοί

Το σύνολο των ακεραίων ορίζεται ως

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Δηλαδή είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αρνητικούς τους. Στο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, επεκτείνοντας τον ορισμό από τους φυσικούς.
Επίσης και η αφαίρεση είναι κλειστή πράξη στους ακέραιους, κάτι που δεν ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς. Όμως, δεν είναι κλειστό ως προς την διαίρεση, όπως κανείς εύκολα μπορεί να δει ($2/3$ δεν είναι ακέραιος). Για την διαίρεση ισχύει:

Αλγόριθμος Διαίρεσης

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά q (πηλίκο) και r (υπόλοιπο) έτσι ώστε

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Δεν θα δώσουμε την απόδειξη που είναι συνέπεια της Καλής Διάταξης των φυσικών αριθμών. Είναι η κλασική διαίρεση των ακεραίων.

Παραδείγματα

(1) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = 354$, $b = 17$.

Απλά εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 354 & 17 \\ \cline{2-2} 34 & 20 \\ \hline 14 & \end{array}$$

Άρα $354 = 17.20 + 14$.

(2) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = 423$, $b = -19$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 423 & 19 \\ \cline{2-2} 38 & 22 \\ \cline{1-1} 43 & \\ 38 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Άρα $423 = 19.22 + 5 = (-19)(-22) + 5$.

(3) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -5476$, $b = 25$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$
\begin{array}{r|l}
5476 & 25 \\ \cline{2-2}
50 & 219 \\ \cline{1-1}
47 & \\
25 & \\ \cline{1-1}
226 & \\
225 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

Άρα $5476 = 25.219 + 1 \Rightarrow -5476 = -25.219 - 1 = 25(-219) - 1$. Πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-5476 = 25(-219) + (24 - 25) = 25(-219) - 25 + 24 = 25(-220) + 24.$$

Άρα $q = -220$, $r = 24$.

(4) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -23457$, $b = 37$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 23457 & 37 \\ \cline{2-2} f222 & 633 \\ \cline{1-1} 125 & \\ 111 & \\ \cline{1-1} 147 & \\ 111 & \\ \cline{1-1} 36 & \end{array}$$

Άρα $23457 = 37.633 + 36 \Rightarrow -23457 = -37.633 - 36 = 37(-633) - 36$. Όπως και πριν, πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-23457 = 37(-633) + (1 - 37) = 37(-633) - 37 + 1 = 37(-634) + 1.$$

Άρα $q = -634$, $r = 1$.

(5) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -32478$, $b = -41$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l}
32478 & 41 \\ \cline{2-2}
287 & 792 \\ \cline{1-1}
377 & \\
369 & \\ \cline{1-1}
88 & \\
82 & \\ \cline{1-1}
6 &
\end{array}$$

Άρα $32478 = 41.792 + 6 \Rightarrow -32478 = -41.792 - 6 = (-41).792 - 6$. Όπως και πριν, πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-32478 = (-41).792 + (35 - 41) = (-41).793 + 35.$$

Άρα $q = 793$, $r = 35$.

Η έννοια της διαιρετότητας είναι βασική στην θεωρία των ακεραίων:

1. Για $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, το b διαιρεί το a, b/a αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a = kb$. Το b ονομάζεται και παράγοντας ή διαιρέτης του a.
2. Ένας θετικός ακέραιος p ονομάζεται πρώτος αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το p.

Τα πολλαπλάσια του 2 ονομάζονται **άρτιοι** και αν δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ονομάζονται περιττοί.

Ιδιότητες Διαιρετότητας

1. $\pm 1/a$, για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.
2. $a/\pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$.
3. $\pm a/a$, για κάθε $a \neq 0$.
4. $a/b \Rightarrow \pm a/\pm b$.
5. Αν b/a, τότε b/na, για $n \in \mathbb{Z}$:

$$b/a \Rightarrow a = kb \Rightarrow na = (nk)b \Rightarrow b/na.$$

6. Αν b/a_1 και b/a_2 τότε $b/a_1 \pm a_2$:Θα το δείξουμε για το άθροισμα. Η απόδειξη για την διαφορά είναι όμοια:

$$\left.\begin{array}{l} b/a_1 \Rightarrow a_1 = k_1 b, k_1 \in \mathbb{Z} \\ b/a_2 \Rightarrow a_2 = k_2 b, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + a_2 = k_1 b + k_2 b = (k_1 + k_2)b \Rightarrow b/a_1 + a_2.$$

7. Ο b/a αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια b είναι 0.

Η τελευταία παρατήρηση επάγει το ακόλουθο:

- Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 2 (Φυσικά ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός).
- Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 3.
- Το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 4.
- Γενικά, το γινόμενο n διαδοχικών αριθμών είναι διαιρετό δια n.

Για να το δούμε, έστω $a + i$, $i = 0, 1, \ldots n - 1$, n διαδοχικοί αριθμοί. Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια n είναι r $(0 \leq r < n)$. Δηλαδή, $a = nq + r$. Παρατηρούμε ότι

$$a + i = nq + r + i$$

Τότε, για κάποιο i, $r + i = n$. Δηλαδή $i = n - r \geq 0$. Γι' αυτό το συγκεκριμένο i,

$$a + i = nq + n = n(q + 1) \Rightarrow n/a + i.$$

Μοναδική Παραγοντοποίηση Ακεραίων

Έστω $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Τότε

1. Υπάρχει ένας πρώτος παράγοντας του a.
2. Αν ένας πρώτος p/ab τότε διαιρεί ή τον a ή τον b ή και τους δύο.
3. $a = \pm p_1 p_2 \ldots p_s$, όπου p_i είναι πρώτος και το γινόμενο είναι μοναδικό εκτός από την σειρά των παραγόντων

- Αν ένας αριθμός b/xy τότε δεν είναι απαραίτητο ο b/x ή b/y. Για παράδειγμα $6/4.3$ αλλά $6 \nmid 3$ και $6 \nmid 4$.
- Στην παραγοντοποίηση του $a \in \mathbb{Z}$ συνήθως συλλέγουμε τους ίδιους πρώτους και γράφουμε

$$a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}.$$

Η μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτους και η ιδιότητα (2) της παραπάνω πρότασης, μας δίνει ένα κριτήριο διαιρετότητας. Έστω

$$a = p_1^{r_1} \dots p_v^{r_v},\ b = q_1^{s_1} \dots q_w^{s_w}.$$

είναι η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων. Τότε

$$b/a \Leftrightarrow \text{για κάθε } 1 \le i \le w \text{ υπάρχει } 1 \le j \le v \text{ έτσι ώστε } q_i = p_j,\ s_i \le r_j$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πρώτοι παράγοντες του b είναι παράγοντες του a και η δύναμή τους στο b είναι μικρότερη ή ίση με την αντίστοιχη δύναμη στο a.
Για παράδειγμα

$$a = 3^3.5^2.7^6.11.13^2.17.29, \quad b = 5.7^3.13.29$$

τότε b/a και

$$a = 3^3.5^2.7^6.11.13^2.17.29 = kb = (3^3.5.7^3.11.13.17)(5.7^3.13.29)$$

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Ευκλείδης: Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι $p_i, \; = 1, \ldots s$. Έστω $N = p_1 \ldots p_s + 1$. Τότε ο N πρέπει να έχει έναν πρώτο παράγοντα p_i. Αλλά

$$\left.\begin{array}{l} p_i/N \\ p_i/p_1 \ldots p_s \end{array}\right\} \Rightarrow p_i/N - p_1 \ldots p_s \Rightarrow p_i/1$$

και το τελευταίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Υπάρχουν πολλές εικασίες πάνω στους πρώτους. Η βασικότερη είναι η εικασία του Riemann που δίνει πληροφορίες για την κατανομή των πρώτων αριθμών. Συνήθως, οι εικασίες μπλέκουν την πολλαπλασιαστική φύση των πρώτων με προσθετικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η εικασία του Goldbach ρωτάει αν κάθε άρτιος μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δυο περιττών πρώτων. Θα αναφέρουμε και την εικασία των δίδυμων πρώτων: Δύο πρώτοι ονομάζονται δίδυμοι αν η διαφορά τους είναι ίση με 2. Η εικασία ρωτά αν υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι.
Η ακολουθία των πρώτων αριθμών ξεκινάει με:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots$$

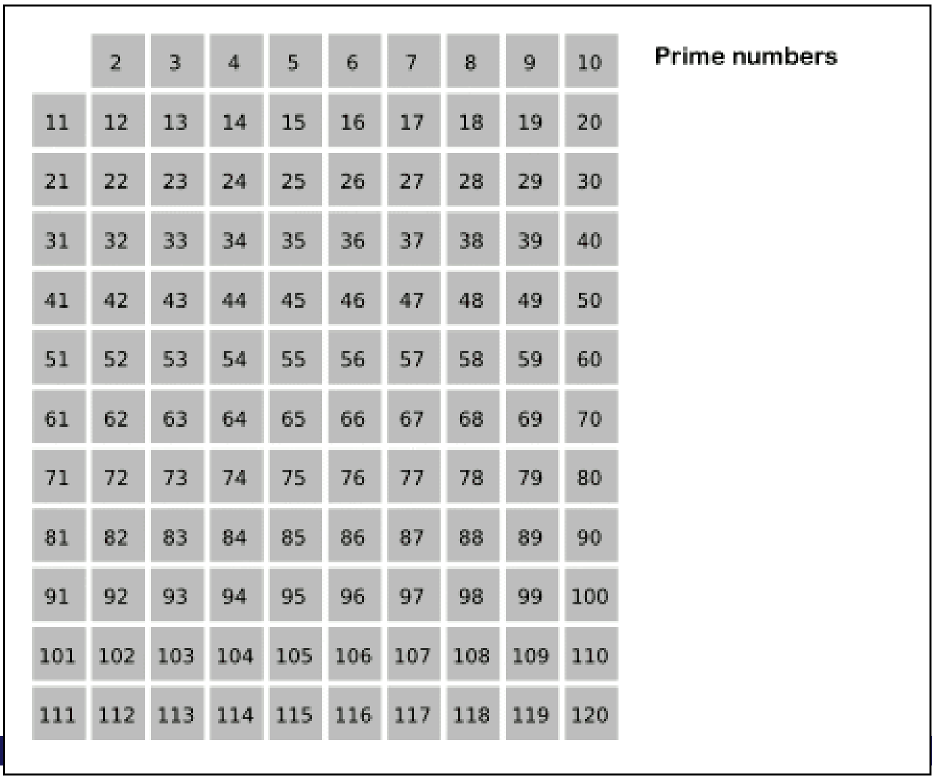
Ο μεγαλύτερος πρώτος είναι ο $2^{82,589,933}-1$ με $24, 862, 048$ ψηφία. Η τιμή του είναι

$$\begin{aligned}
&148894445742041325547806458472397916603026273992795324185\\
&271289425213239361064475310309971132180337174752834401423587560\ldots\\
&\text{παραλείπουμε } 24, 861, 808 \text{ ψηφία}\\
&\ldots 0621075579479582975315952088071926936765217821844725266400769121 14\\
&3553083119694876337664578236950740379512103252179025 91
\end{aligned}$$

Μια μέθοδος για να βρούμε όλους τους πρώτους, μικρότερους ενός αριθμού n, χρησιμοποιούμε το κόσκινο του Ερατοσθένη:

- Ξεκινάμε διαγράφοντας τα πολλαπλάσια του 2 (όλους τους άρτιους).
- Στην συνέχεια διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 3.
- Συνεχίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο, διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του ακεραίου που δεν έχει ήδη διαγραφεί.

Κόσκινο του Ερατοσθένη



Ισχύει μια πρόταση που βοηθάει στο κόσκινο του Ερατοσθένη:
Κάθε ακέραιος n, που δεν είναι πρώτος, έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{n}$:

Γνωρίζουμε ότι ο n έχει έναν πρώτο διαιρέτη p. Αν $p \leq \sqrt{n}$, τελειώσαμε.
Αν $p > \sqrt{n}$ και p/n. Άρα $n = kp$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$n = kp > k\sqrt{n} \Rightarrow (\sqrt{n})^2 > k\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > k.$$

Έστω τώρα q ένας πρώτος διαιρέτης του k. Τότε $q \leq k$ και τελικά

$$\sqrt{n} > k \geq q \Rightarrow q < \sqrt{n}.$$

Ας εξετάσουμε τον $n = 211$. Το 211 θα έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{211} < 15$ ($15^2 = 225$). Οι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του 15 είναι: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κανένας απ' αυτούς δεν διαιρεί το 211.
Άρα ο 211 είναι πρώτος.

Το 2020 δεν είναι πρώτος γιατί είναι άρτιος και επομένως διαιρείται δια 2. Έχουμε την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες $2020 = 2^2.5.101$.

Ας εξετάσουμε λοιπόν τον $n = 2021$. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{2021} < 45$ κι αυτό γιατί $45^2 = 2025$. Εξετάζουμε λοιπόν τους πρώτους μικρότερους του 45: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

2, 3, 5 εύκολα μπορούμε να δούμε ότι δεν διαιρούν το 2021.

$2021 = 7.288+5,\ 2021 = 11.83+8,\ 2021 = 13.155+6,\ 2021 = 17.118+15,\ 2021 = 19.106+7$ $2021 = 23.87 + 20,\ 2021 = 29.69 + 20,\ 2021 = 31.65 + 6,\ 2021 = 37.54 + 23,\ 2021 = 41.49 + 12,\ 2021 = 43.47$ Άρα $43/2021$ και $2021 = 43.47$ είναι η ανάλυση σε πρώτους παράγοντες του 2021.

Εικασίες Στους Πρώτους

Θα διατυπώσουμε κάποιες (ακόμη άλυτες) εικασίες στους πρώτους:

- (Εικασία του Goldback) Κάθε άρτιος ακέραιος $n > 2$ είναι το άθροισμα δυο πρώτων.
  Αποδείχθηκε για όλους τους αριθμούς μικρότερους του 4.10^{17}.
- (Περιττή Εικασία του Goldback) Κάθε περιττός ακέραιος $n > 5$ είναι το άθροισμα τριών πρώτων.
  Αρκεί να αποδειχθεί για όλους τους αριθμούς μεγαλύτερους του 10^{43000}.
- Κάθε άρτιος αριθμός είναι η διαφορά δυο πρώτων.
- Υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι (που διαφέρουν κατά 2). Για παράδειγμα

  $$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43),(59,61),(71,73),(101,103),$$
  $$(107,109),(137,139),\ldots$$

  Το μεγαλύτερο ζεύγος δίδυμων πρώτων είναι $2996863034895 \times 2^{1290000} \pm 1$ με 388,342 ψηφία.
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $n^2 + 1$;
- Υπάρχει πάντα ένας πρώτος μεταξύ n^2 και $(n+1)^2$;

Παραδείγματα

(1) Να δείξετε ότι $6/n^3 - n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 0$ ισχύει γιατί $6/0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $6/k^3 - k$. Θα δείξουμε ότι $6/(k+1)^3 - (k+1)$. Από την υπόθεση $k^3 - k = 6\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.
Κάνουμε τους υπολογισμούς, εφαρμόζοντας το διώνυμο του Νεύτωνα.

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k(k+1)$$

Παρατηρούμε ότι αν ο k είναι άρτιος τότε το $k(k+1)$ είναι άρτιος. Αν ο k είναι περιττός, τότε το $k+1$ είναι άρτιος και ο $k(k+1)$ είναι άρτιος. Σε κάθε περίπτωση $k(k+1) = 2\mu$ είναι άρτιος. Άρα

$$(k+1)^3 - (k+1) = 6\ell + 3.2\mu = 6(\ell + \mu) \Rightarrow 6/(k+1)^3 - (k+1).$$

Θα δώσουμε μια άλλη λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Θα εξετάσουμε την γενική περίπτωση. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης στο a και n:

$$a = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Παρατηρούμε ότι, για $m \in \mathbb{N}$,

$$a^m = (qn + r)^m = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} (qn)^{m-s} r^s = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} q^{m-s} n^{m-s} r^s = \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m}{s} (qn)^{m-s} r^s + r^m.$$

Για $0 \leq s \leq m-1$, $m - s > 0$, και επομένως όλοι οι όροι του πρώτου αθροίσματος έχουν το n σαν παράγοντα:

$$a^m = nQ + r^m$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του a^m δια n είναι το ίδιο με το υπόλοιπο της διαίρεσης του r^m δια n.

Τώρα θα δείξουμε ότι $6/n^3 - n$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση.

Υπόλοιπο δια 6 του n	0	1	2	3	4	5
Υπόλοιπο δια 6 του n^3	0	1	$2^3 = 8 \sim 2$	$3^3 = 27 \sim 3$	$4^3 = 64 \sim 4$	$5^3 = 125 \sim 5$

Παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του n και του n^3 δια 6 είναι ίσα. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $n^3 - n$ δια 6 είναι 0. Άρα το 6 διαιρεί το $n^3 - n$.

(2) Δείξτε ότι $9/5^{2n}+3n-1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n=0$ ισχύει γιατί $9/0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλαδή $9/5^{2k}+3k-1$. Θα δείξουμε ότι $9/5^{2(k+1)}+3(k+1)-1$. Επειδή $9/5^{2k}+3k-1$,

$$5^{2k}+3k-1=9\ell \Rightarrow 5^{2k}=9\ell-3k+1.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n=k+1$:

$$\begin{aligned} 5^{2k+2}+3k+3-1 &= 5^2.5^{2k}+3k+2=25(9\ell-3k+1)+3k+2 \\ &= 9(25\ell)-75k+25+3k+2 \\ &= 9(25\ell)-72k+27=9(25\ell-8k+3). \end{aligned}$$

Άρα $9/5^{2(+1)}+3(k+1)-1$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(3) Δείξτε ότι $2304/7^{2n} - 48n - 1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ ισχύει γιατί $2304/0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $2304/7^{2k} - 48k - 1$. Θα δείξουμε ότι $2304/7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$. Επειδή $2304/7^{2k} - 48k - 1$,

$$7^{2k} - 48k - 1 = 2304\ell \Rightarrow 7^{2k} = 2304\ell + 48k + 1.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 7^{2k+2} - 48k - 48 - 1 &= 7^2.7^{2k} - 48k - 49 = 49(2304\ell + 48k + 1) - 48k - 49 \\ &= 2304(49\ell) + 2352k + 49 - 48k - 49 \\ &= 2304(49\ell) - 2304k = 2304(49\ell - k). \end{aligned}$$

Άρα $2304/7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(4) Δείξτε ότι $17/3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ έχουμε $17/3.5 + 2$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $17/3.5^{2k+1} + 2^{3k+1}$. Θα δείξουμε ότι $17/3.5^{2k+3} + 2^{3k+4}$. Επειδή $17/3.5^{2k+1} + 2^{3k+1}$,

$$3.5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17\ell \Rightarrow 2^{3k+1} = 17\ell - 3.5^{2k+1}.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 3.5^{2k+3} + 2^{3k+4} &= 3.5^2.5^{2k+1} + 2^3.2^{3k+1} = 75.5^{2k+1} + 8(17\ell - 3.5^{2k+1}) \\ &= 75.5^{2k+1} + 17(8\ell) - 24.5^{2k+1} = 51.5^{2k+1} + 17(8\ell) = 17(3.5^{2k+1} + 8\ell) \end{aligned}$$

Άρα $17/3.5^{2k+3} + 2^{3k+4}$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(5) Δείξτε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών κύβων είναι διαιρετό δια 9.

Δηλαδή πρέπει να δείξουμε $9/n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, $n \in \mathbb{N}$. Για $n=0$, $9/0^3+1^3+2^3$. Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n=k$, δηλαδή $9/k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$. Θα δείξουμε ότι $9/(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$. Από την υπόθεση,

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9\ell \Rightarrow (k+1)^3+(k+2)^3=9\ell-k^3.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 &= 9\ell-k^3+(k+3)^3=9\ell-k^3+k^3+9k^2+27k+27\\ &= 9\ell+9k^2+27k+27=9(\ell+k^2+3k+3).\end{aligned}$$

Άρα $9/(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(6) Αποδείξτε ότι ο αριθμός

$$z_n = \frac{2n^5}{5} + \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} - \frac{7n}{30}$$

είναι ακέραιος για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$, $z_0 = 0 \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $z_k \in \mathbb{Z}$ και θα δείξουμε ότι ο

$$z_{k+1} = \frac{2(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^4}{2} - \frac{2(k+1)^3}{3} - \frac{7(k+1)}{30} \in \mathbb{Z}.$$

Αναπτύσσουμε έναν προς έναν τους όρους

$$\frac{2(k+1)^5}{5} = \frac{2(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)}{5} = \frac{2k^5}{5} + \frac{2}{5} + (2k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k) = \frac{2k^5}{5} + \frac{2}{5} + s$$

με $s \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{(k+1)^4}{2} = \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} = \frac{k^4}{2} + \frac{1}{2} + (2k^3 + 3k^2 + 2k) = \frac{k^4}{2} + \frac{1}{2} + t$$

με $t \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2(k+1)^3}{3} = \frac{2(k^3+3k^2+3k+1)}{3} = \frac{2k^3}{3} + \frac{2}{3} + (2k^2+2k) = \frac{2k^3}{3} + \frac{2}{3} + v$$

με $v \in \mathbb{Z}$

$$\frac{7(k+1)}{30} = \frac{7k}{30} + \frac{7}{30}.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω:

$$z_{k+1} = \left(\frac{2k^5}{5} + \frac{k^4}{2} - \frac{2k^3}{3} - \frac{7k}{30}\right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} + s + t + v = z_k + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} + w,$$

όπου $z_k \in \mathbb{Z}$, από την υπόθεση και $w \in \mathbb{Z}$. Επίσης

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} = \frac{12}{30} + \frac{15}{30} - \frac{20}{30} - \frac{7}{30} = 0$$

Άρα $z_{k+1} = z_k + w \in \mathbb{Z}$.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Το $d \in \mathbb{N}$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των a και b (συμβολίζεται (a, b)) αν

(1) Το d είναι θετικός κοινός διαιρέτης των a και b, δηλαδή d/a και d/b.

(2) Αν c είναι κοινός διαιρέτης των a και b (c/a και c/b), τότε c/d.

Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με

(2') Αν c είναι θετικός κοινός διαιρέτης των a και b, τότε $c \leq d$.

Παραδείγματα

1. $(2, 3) = 1.$
2. $(12, 8) = 4.$
3. $(54, 18) = 18.$
4. $(234, 42) = 6.$

Ιδιότητες του Μ.Κ.Δ.

1. $(0, b) = |b|$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
2. $(1, b) = 1$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
3. $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$, $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
4. $(ra, rb) = r(a, b)$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$.
5. $(a + kb, b) = (a, b)$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Θα αποδείξουμε την τελευταία ιδιότητα:
Έστω $d = (a, b)$ και $d' = (a + kb, b)$.
Τότε d/a και d/b. Άρα d/kb και $d/a + kb$ και, από τον ορισμό, d/d'.
Όμοια, $d'/a + kb$ και d'/b. Άρα d'/kb και $d'/a + kb - kb$, που σημαίνει ότι d'/a. Άρα d'/d.
Έχουμε d/d' και d/d, που σημαίνει ότι $d = \pm d'$. Αλλά και οι δυο αριθμοί είναι θετικοί, επομένως $d = d'$.
Η ιδιότητα αυτή δίνει ότι, αν $a = bq + r$, τότε $(a, b) = (b, r)$.

Ισχύει ότι: Ο Μ.Κ.Δ. δυο αριθμών είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους στην μικρότερη δύναμη.
Ουσιαστικά το παραπάνω είναι συνέπεια του ορισμού. Έστω d είναι ο γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων των a και b στην μικρότερη δύναμη. Έστω

$$a = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}$$

όπου $p_1, \dots p_r$ είναι οι κοινοί πρώτοι και $m_i = \min\{s_i, t_i\}$, ο ελάχιστος εκθέτης κάθε κοινού πρώτου. Θέτουμε $d = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$

- Τότε ο d διαιρεί και το a και το b.
- Αν το c διαιρεί το a και το b, τότε το c είναι ένα γινόμενο κάποιων κοινών πρώτων παραγόντων και κάθε πρώτος είναι στην δύναμη μικρότερη και από τις αντίστοιχες δυνάμεις αυτού του πρώτου στα a και b.

Θα δώσουμε παραδείγματα τις τελευταίας παρατήρησης:

- $a = 3^5.7^4.11^2.17^3.23^2.37$, $b = 2^5.3^4.5^2.7^5.11^3.19.21$

$$(a, b) = 3^4.7^4.11^2.$$

- $a = 5^2.7^3.17^2.23^2.41^2$, $b = 5^3.7^4.17.41$

$$(a, b) = 5^2.7^3.17.41.$$

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Το παρακάτω θεώρημα δίνει τον τρόπο υπολογισμού του Μ.Κ.Δ. δυο ακεραίων.

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης:

$$\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b \\
b = r_1 q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\
\ldots & \ldots \\
r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2}, & 0 \leq r_{k+2} < r_{k+1} \\
\ldots & \ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1}, &
\end{array}$$

Τότε $(a, b) = r_n$ (το τελευταίο μη-μηδενικό υπόλοιπο).

Παρατηρήσεις

1. Η διαδικασία κάποτε σταματάει γιατί έχουμε μια ακολουθία από θετικούς ακέραιους:

$$0 \leq r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < b.$$

2. Το Θεώρημα ισχύει γιατί, από τις ιδιότητες του Μ.Κ.Δ.,

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$

γιατί r_n / r_{n-1}.

Πριν ξεκινήσουμε τα παραδείγματα, θα δώσουμε και μια άλλη ιδιότητα του Μ.Κ.Δ.

Βασική Ιδιότητα του Μ.Κ.Δ.

Έστω $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

1. Έστω $d = (a, b)$. Τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $d = as + bt$.
2. Ο Μ.Κ.Δ. είναι η μικρότερη θετική τιμή των συνδυασμών $as + bt$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

Δυο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ονομάζονται σχετικά πρώτοι αν $(a, b) = 1$. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ισχυρότερο για τους σχετικά πρώτους ακέραιους:
Δηλαδή οι a, b δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη και κατ' επέκταση δεν έχουν κανέναν πρώτο κοινό διαιρέτη.

$$(12, 35) = 1,\ (18, 49) = 1,\ (21, 65) = 1.$$

Για τους σχετικά πρώτους αριθμούς, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:
Δυο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ είναι σχετικά πρώτοι αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $1 = as + bt$.

Πρέπει να αποδείξουμε δυο προτάσεις:

- Αν $(a, b) = 1$, τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$.
- Αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$, τότε $(a, b) = 1$.

Είναι προφανές ότι το δεύτερο αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $(a, b) = d > 1$: Τότε από την Βασική Ιδιότητα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $d = as + bt$. Επίσης, $kd = a(ks) + b(kt)$, $k \in \mathbb{Z}$ και kd δεν είναι ο Μ.Κ.Δ. αν $k > 1$.

Και οι δυο προτάσεις είναι αποτέλεσμα της Βασικής Ιδιότητας. Θα δώσουμε μια εύκολη απόδειξη της δεύτερης πρότασης:

Έστω ότι υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$. Έστω $(a, b) = d$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} d/a \\ d/b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} d/as \\ d/bt \end{array}\right\} \Rightarrow d/as + bt \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

Ιδιότητες των Σχετικά Πρώτων Αριθμών

(1) Αν οι a και c είναι σχετικά πρώτοι και b/c, τότε οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.

Έχουμε $(a, c) = 1$. Άρα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$, $as + ct = 1$.
Επίσης b/c, που σημαίνει ότι $c = bk$, $k \in \mathbb{Z}$. Συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις έχουμε:

$$as + b(kt) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1.$$

(2) Έστω $(a, b) = 1$ και a/bc, τότε a/c.

Έχουμε $(a, b) = 1$. Άρα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$, $as + bt = 1$.
Πολλαπλασιάζουμε την σχέση επί c, $asc + btc = c$. Τώρα

$$\left.\begin{array}{c} a/asc \\ a/(bc)t \end{array}\right\} \Rightarrow a/asc + bct \Rightarrow a/c,$$

(3) Έστω $(a, b) = 1$, a/c, και b/c, τότε ab/c.

Έχουμε $c = ak = b\ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
Τότε $b/b\ell \Rightarrow b/ak$. Από την προηγούμενη άσκηση, b/k γιατί $(a, b) = 1$. Άρα $k = bm$.
Συνδυάζοντας τις σχέσεις, $c = abm \Rightarrow ab/c$.

(4) Έστω $(a, b) = 1$. Τότε $(a+b, a-b) = 1$ ή 2.
Έστω $d = (a+b, a-b)$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} d/a+b \\ d/a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d/a+b+a-b \\ d/a+b-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d/2a \\ d/2b \end{array}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι το d δεν μπορεί να διαιρεί συγχρόνως και το a και το b, γιατί είναι σχετικά πρώτοι. Άρα $d/2$, που σημαίνει $=1,2$.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί ο $(6240, 12)$ και να γραφτεί στην μορφή $6240s + 12t$.

Παρατηρούμε ότι $6240 = 12.520$. Άρα $12/6240$ και $(6240, 12) = 12$. Επομένως:

$$12 = 6240.0 + 12.1$$

(2) Να βρεθεί ο $(345, 24)$ και να γραφτεί στην μορφή $345s + 24t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$\begin{aligned}
&345 = 24.14 + 9 \\
&24 = 9.2 + 6 \\
&9 = 6.1 + 3 \\
&6 = 3.2
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned}
3 &= 9 - 6 = 9 - (24 - 9.2) = 9 - 24 + 9.2 \\
&= 9.3 - 24 = (345 - 24.14).3 - 24 = 3.345 - 42.24 - 24 \\
&= 3.345 - 43.24.
\end{aligned}$$

(3) Να βρεθεί ο $(11247, 342)$ και να γραφτεί στην μορφή $11247s + 342t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$
\begin{aligned}
&11247 = 342.32 + 303\\
&342 = 303.1 + 39\\
&303 = 39.7 + 30\\
&39 = 30.1 + 9\\
&30 = 9.3 + 3\\
&9 = 3.3
\end{aligned}
$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$
\begin{aligned}
3 &= 30 - 9.3 = 30 - (39 - 30).3 = 30 - 39.3 + 30.3\\
&= 30.4 - 39.3 = (303 - 39.7).4 - 39.3 = 303.4 - 39.28 - 39.3\\
&= 303.4 - 39.31 = 303.4 - (342 - 303).31 = 303.4 - 342.31 + 303.31\\
&= 303.35 - 342.31 = (11247 - 342.32).35 - 342.31\\
&= 11247.35 - 342.1120 - 342.31\\
&= 35.11247 - 1151.342
\end{aligned}
$$

(4) Να βρεθεί ο $(15347, 225)$ και να γραφτεί στην μορφή $11247s + 342t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$\begin{aligned}
&15347 = 225.68 + 47\\
&225 = 47.4 + 37\\
&47 = 37.1 + 10\\
&37 = 10.3 + 7\\
&10 = 7.1 + 3\\
&7 = 3.2 + 1\\
&3 = 1.3
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned}
1 &= 7 - 3.2 = 7 - (10 - 7).2 = 7 - 10.2 + 7.2\\
&= 7.3 - 10.2 = (37 - 10.3).3 - 10.2 = 37.3 - 10.9 - 10.2\\
&= 37.3 - 10.11 = 37.3 - (47 - 37).11 = 37.3 - 47.11 + 37.11 = 37.14 - 47.11\\
&= (225 - 47.4).14 - 47.11 = 225.14 - 47.56 - 47.11 = 225.14 - 47.67\\
&= 225.14 - (15347 - 225.68).67 = 225.14 - 15237.67 + 225.4556 - 15347.67 + 225.4570
\end{aligned}$$

(5) Εάν p είναι πρώτος και $a \in \mathbb{Z}$, τότε $(a, p) = 1$ ή p.

Έχουμε δυο περιπτώσεις:

- $p \nmid a$. Τότε $(a, p) = 1$, γιατί δεν μπορούν να έχουν άλλους κοινούς παράγοντες..
- p/a. Τότε $(a, p) = p$.

(6) Να δείξετε ότι $30/n^5 - n$, για $n \in \mathbb{N}$.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε απ' ευθείας την μαθηματική επαγωγή. Θα δείξουμε τις δυσκολίες. Προφανώς η πρόταση ισχύει για $n = 0$ γιατί $30/0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $30/k^5 - k$. Αυτό σημαίνει ότι $k^5 - k = 30m$, $m \in \mathbb{N}$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $30/(k+1)^5 - (k+1)$.
Όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1, \quad \text{(Διώνυμο του Νεύτωνα)}\\ &= (k^5 - k) + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\\ &= 30m + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\end{aligned}$$

Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι

$$30/5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \Leftrightarrow 6/k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k$$

Αυτό δεν είναι αδύνατο αλλά θέλει περισσότερη ανάλυση.

Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μέθοδο. Παρατηρούμε ότι

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n((n^2)^2 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Τώρα το $2/n(n+1)$ ως γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων και συνεπώς $2/n^5 - n$.
Επίσης $3/(n-1)n(n+1)$ ως γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, οπότε $3/n^5 - n$.
Αλλά $(2,3) = 1$, είναι σχετικά πρώτοι, άρα $2.3/n^5 - n \Rightarrow 6/n^5 - n$.
Έχουμε ότι $30 = 6.5$ και $(5,6) = 1$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $5/n^5 - n$. Έχουμε δει δυο τρόπους για να το αποδείξουμε:

- Ο πρώτος είναι με επαγωγή.
- Ο δεύτερος είναι με την χρήση υπολοίπων.

Πρώτα θα δείξουμε επαγωγικά ότι $5/n^5 - n$, $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς ισχύει για $n = 0$ $(5/0)$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $5/k^5 - k$. Αυτό σημαίνει ότι $k^5 - k = 5m$, $m \in \mathbb{N}$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $5/(k+1)^5 - (k+1)$.
Όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1, \quad \text{(Διώνυμο του Νεύτωνα)} \\
&= (k^5 - k) + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k = 5m + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \\
&= 5(m + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)
\end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι $5/(k+1)^5 - (k+1)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη

Η δεύτερη μέθοδος χρησιμοποιεί τα υπόλοιπα.

Υπόλοιπο δια 5 του n	0	1	2	3	4
Υπόλοιπο δια 5 του n^5	0	1	$2^5 = 32 \sim 2$	$3^5 = 343 \sim 3$	$4^5 = 1024 \sim 4$

Παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του n και του n^5 δια 5 είναι ίσα. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $n^5 - n$ δια 5 είναι 0. Άρα το 5 διαιρεί το $n^5 - n$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $\ell = [a, b]$ δυο ακεραίων είναι ο θετικός ακέραιος έτσι ώστε

1. a/ℓ, b/ℓ, δηλαδή το ℓ είναι πολλαπλάσιο και του a και του b.
2. Αν a/m και b/m τότε ℓ/m, δηλαδή ℓ διαιρεί κάθε κοινό πολλαπλάσιο των a και b.

$$[2, 3] = 6,\ [6, 8] = 24,\ [12, 6] = 12,\ [9, 2] = 18.$$

Ας υπολογίσουμε τον $[12, 15]$: Γράφουμε τα πολλαπλάσια του καθενός:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, \ldots$$

$$15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135 \ldots$$

Βλέπουμε ότι το 60 είναι το πρώτο πρώτο κοινό πολλαπλάσιο. Άρα $[12, 15] = 60$.
Επίσης το επόμενο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 120 και $60/120$.

Και για τρεις αριθμούς $[9, 15, 18]$: Γράφουμε τα πολλαπλάσια του καθενός:

$$9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, \dots$$

$$15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180 \dots$$

$$18, 36, 54, 72, 90.$$

Βλέπουμε ότι το 60 είναι το πρώτο πρώτο κοινό πολλαπλάσιο. Άρα $[9, 15, 18] = 90.$

Όπως και με τον Μ.Κ.Δ., έχουμε την επόμενη πρόταση για τον υπολογισμό του Ε.Κ.Π.:

Έστω

$$a = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}$$

όπου $p_1, \dots p_r$ είναι οι κοινοί πρώτοι και $M_i = \max\{s_i, t_i\}$, ο μεγαλύτερος εκθέτης κάθε κοινού πρώτου. Θέτουμε $\ell = p_1^{M_1} \dots p_r^{M_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}$, το γινόμενο κοινών και μη-κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη. Τότε

- Ο ℓ είναι κοινό πολλαπλάσιο των a και το b $(a/\ell, b/\ell)$..
- Αν το m είναι κοινό πολλαπλάσιο των a και b, τότε το m έχει σαν παράγοντες όλους τους πρώτους που εμφανίζονται στην διάσπαση των a και b στην μεγαλύτερη δύναμη και συνεπώς ℓ/m

Άρα $\ell = [a, b]$.

Η πρόταση ισχύει και για πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί ο $[24, 42]$.

Ξεκινάμε με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες.

$$24 = 2^3.3, \quad 42 = 2.3.7 \Rightarrow [24, 42] = 2^3.3.7 = 168.$$

(2) Να βρεθεί ο $[18, 28, 54]$.

Ξεκινάμε με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες.

$$18 = 2.3^2, \quad 28 = 2^2.7, \quad 54 = 2.3^3 \Rightarrow [18, 28, 54] = 2^2.3^3.7 = 756.$$

Μ.Κ.Δ και Ε.Κ.Π.

Θα δείξουμε την σχέση μεταξύ Μ.Κ.Δ και Ε.Κ.Π.

Για δυο μη-μηδενικούς ακέραιους a και b ισχύει,

$$[a, b] = \frac{a.b}{(a, b)}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$a.b = [a, b](a, b).$$

Μια σημαντική παρατήρηση που ισχύει για όλους τους αριθμούς είναι:

$$\boxed{\max\{r, s\} + \min\{r, s\} = r + s.}$$

Έστω
$$a = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}.$$
Για του κοινούς πρώτους p_i:

- Στο γινόμενο $a.b$ εμφανίζονται με εκθέτη $s_i + t_i$.
- Στο γινόμενο $[a, b](a, b)$ εμφανίζονται με εκθέτη $\max\{s_i, t_i\} + \min\{s_i, t_i\}$, που από την παρατήρηση είναι ίσο με $s_i + t_i$.

Άρα οι εκθέτες των κοινών πρώτων είναι ίσοι.
Το γινόμενο των μη-κοινών εκθετών εμφανίζεται στο $a.b$ και στο $[a, b]$.
Άρα όλοι οι πρώτοι παράγοντες του $a.b$ εμφανίζονται στο $[a, b](a, b)$, με τον ίδιο εκθέτη. Συνεπώς οι δυο αριθμοί είναι ίσοι.

Παράδειγμα

Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των

$$a = 2^{12}.3^4.7^3.11.17.19^2, \quad b = 2^3.5^2.7^5.11.13.19.$$

και να επαληθεύσετε ότι $a.b = [a, b](a, b)$.

Από την θεωρία έχουμε

$$[a, b] = 2^{12}.3^4.5^2.7^5.11.13.17.19^2, \quad (a, b) = 2^3.7^3.11.19.$$
$$[a, b](a, b) = (2^{12}.3^4.5^2.7^5.11.13.17.19^2)(2^3.7^3.11.19) = 2^{15}.3^4.5.7^8.11^2.13.17.19^3.$$

Και για το γινόμενο

$$ab = (2^{12}.3^4.7^3.11.17.19^2)(2^3.5^2.7^5.11.13.19) = 2^{15}.3^4.5^2.7^8.11^2.13.17.19^3.$$

Ρητοί Αριθμοί

Το σύνολο των ρητών αριθμών ορίζεται ως

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

δηλαδή οι ρητοί αριθμοί είναι πηλίκα ακεραίων. Φυσικά η διαίρεση δεν είναι κλειστή πράξη στους ακέραιους και επομένως ένας ρητός δεν είναι απαραίτητα ακέραιος. Ο a ονομάζεται **αριθμητής** και ο b **παρονομαστής** του κλάσματος. Απαιτούμε ο παρονομαστής να μην είναι 0, γιατί η διαίρεση δια 0 δεν έχει νόημα. Βασικά οι ρητοί αριθμοί αναπαριστούν αναλογίες. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το επόμενο:
Μια πίτα κόβεται σε 5 ίσα κομμάτια και δίνονται σε έναν από τους καλεσμένους 2 κομμάτια. Σ' αυτήν την περίπτωση ο καλεσμένος πήρε τα $\frac{2}{5}$ της πίτας. Τώρα, αν αντί για 5 κομμάτια διαιρέσουμε την πίτα σε 10 ίσα κομμάτια και δώσουμε στον ίδιο καλεσμένο 4 κομμάτια, παρατηρούμε ότι ο καλεσμένος, τελικά, πήρε την ίδια ποσότητα από την πίτα. Κι αυτό γιατί για να κόψουμε την πίτα σε 10 ίσα κομμάτια, μετά την διαίρεση σε 5 ίσα κομμάτια, κόψαμε κάθε κομμάτι στην μέση.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει και την βασική ιδιότητα των ρητών:

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Χρησιμοποιώντας, αυτήν την σχέση μπορούμε να δείξουμε

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = cb.$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της βασικής σχέσης:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} \Longleftrightarrow ad = cb$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των ρητών περιέχει το σύνολο των ακεραίων. Το $n \in \mathbb{Z}$ γράφεται ως $n/1 \in \mathbb{Q}$. Ένα κλάσμα $\frac{a}{b}$, με a και b σχετικά πρώτοι ονομάζεται **ανάγωγο**. Δηλαδή ένα ανάγωγο κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω.

Όπως στους ακέραιους έχουμε πράξεις και στους ρητούς:

Πρόσθεση: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Πολλαπλασιασμός: $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Οι παραπάνω κανόνες είναι πολύ γενικοί και τις περισσότερες φορές έχουμε διαγραφές που απλοποιούν την μορφή του κλάσματος. Ειδικά με την πρόσθεση έχουμε την εξής απλοποίηση:Για το άθροισμα

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

έστω $\ell = [b, d]$, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και $\ell = bb_1 = dd_1$. Τότε

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab_1}{bb_1} + \frac{cd_1}{dd_1} = \frac{ab_1}{\ell} + \frac{cd_1}{\ell} = \frac{ab_1 + cd_1}{\ell},$$

Ας εξετάσουμε τον λόγο που πρέπει οι παρονομαστές να είναι ίδιοι. Θυμόμαστε ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι πράξεις που συνδυάζουν ίδια αντικείμενα.
Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προσθέσουμε 3 πορτοκάλια και 4 μήλα. Δεν μπορούμε να δηλώσουμε τι είναι το αποτέλεσμα.
Αλλά μπορούμε να πούμε ότι έχουμε 7 **φρούτα**. Δηλαδή, για να κάνουμε την πρόσθεση, ανάγουμε τα αντικείμενα σε μια άλλη κατηγορία όπου ανήκουν και τα δυο. Θα μπορούσαμε να πούμε 7 φαγώσιμα, 7 καρπούς ή οποιαδήποτε κατηγορία όπου και τα δύο ανήκουν.
Το ίδιο γίνεται και με τα κλάσματα. Όταν οι παρονομαστές είναι διαφορετικοί, ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες και έτσι δεν μπορούν να προστεθούν. Για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε το άθροισμα $1/2 + 1/3$. Το πρώτο κλάσμα είναι το μισό μιας ολότητας και το δεύτερο το $1/3$. Δηλαδή υποδηλώνουν διαφορετικά «είδη». Για να προσθέσουμε, πρέπει να τα ανάγουμε στο ίδιο επίπεδο (όπως τα πορτοκάλια και μήλα σε φρούτα). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δηλώνουν ίδια μέρη του όλου, δηλαδή να έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Φυσικά και άλλα πολλαπλάσια του κοινού παρονομαστή θα είναι επιτρεπτά.

Παρατηρούμε ότι οι ρητοί είναι κλειστοί ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, την αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, όπως οι ακέραιοι. Επιπλέον οι μη-μηδενικοί ρητοί είναι κλειστοί και ως προς την διαίρεση. Γι΄αυτό και ξεκινάμε με την έννοια του αντίστροφου ενός ρητού:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Αυτός είναι και ο γνωστός τύπος για τα σύνθετα κλάσματα:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Παραδείγματα

(1) Να βρεθούν τα αθροίσματα και να αναχθεί το αποτέλεσμα στην ανάγωγη μορφή:

$$(i)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5},\ (ii)\ \frac{3}{8}+\frac{7}{12},\ (iii)\ \frac{3}{10}+\frac{1}{18},\ (iv)\ \frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}.$$

(i) Παρατηρούμε ότι $[2,5]=10$ και $10=2.5=5.2$. Έχουμε

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1.5}{2.5}+\frac{1.2}{5.2}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $[8,12]=24$ και $24=8.3=2.12$. Έχουμε

$$\frac{3}{8}+\frac{7}{12}=\frac{3.3}{8.3}+\frac{7.2}{12.2}=\frac{9}{24}+\frac{14}{24}=\frac{23}{24}.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $[10, 18] = 90$ και $90 = 10.9 = 18.5$. Έχουμε

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{18} = \frac{9.3}{10.9} + \frac{1.5}{18.5} = \frac{27}{90} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}.$$

(iv) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές: $4 = 2^2$, $6 = 2.3$, $15 = 3.5$, $18 = 2.3^2$. Άρα $[4, 6, 15, 18] = 2^2.3^2.5 = 180$ και $180 = 4.45 = 6.30 = 15.12 = 18.10$. Άρα

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} = \frac{3.45}{4.45} + \frac{5.30}{6.30} + \frac{1.12}{15.12} + \frac{1.10}{18.10} = \frac{135}{180} + \frac{150}{180} + \frac{12}{180} + \frac{10}{180} =$$
$$\frac{135}{180} + \frac{150}{180} + \frac{12}{180} + \frac{10}{180} = \frac{307}{180}.$$

(2) Να απλοποιήσετε τις επόμενες εκφράσεις:

$$(i)\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right),\ (ii)\ \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right),\ (iii)\ \frac{5}{6}\left(\frac{4}{5}+\frac{12}{7}-\frac{2}{15}\right),$$

(i) Κάνουμε πρώτα τις προσθέσεις:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{2.4}{3.4}+\frac{3.3}{4.3}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{8}{12}+\frac{9}{12}\right)=\frac{2}{3}.\frac{17}{12}=\frac{34}{36}=\frac{17}{18}.$$

Διαφορετικά η απλοποίηση μπορεί να γίνει πριν:

$$\frac{\cancel{2}}{3}.\frac{17}{\cancel{12}6}=\frac{17}{18}.$$

(ii) Κάνουμε πρώτα τις προσθέσεις. Γι' αυτόν τον λόγο, παρατηρούμε ότι ο Ε.Κ.Π. $[2, 3, 5, 6] = 2.3.5 = 30$. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{1.15}{2.15}+\frac{2.10}{3.10}+\frac{1.6}{5.6}+\frac{1.5}{6.5}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{15}{30}+\frac{20}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}\right)=$$

$$\frac{4}{5}.\frac{15+20+6+5}{30}=\frac{4}{5}.\frac{46}{30}=\frac{2}{5}\frac{46}{15}=\frac{92}{75}.$$

(iii) Θα δώσουμε μια διαφορετική λύση. Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και μετά θα κάνουμε τις προσθέσεις.

$$\frac{5}{6}\left(\frac{4}{5}+\frac{12}{7}-\frac{2}{15}\right)=\frac{5}{6}\frac{4}{5}+\frac{5}{6}\frac{12}{7}-\frac{5}{6}\frac{2}{15}=\frac{4}{6}+\frac{5.2}{7}-\frac{10}{90}=$$
$$\frac{2}{3}+\frac{10}{7}-\frac{1}{9}=\frac{2.63+10.27-21}{189}=\frac{126+270-21}{189}=\frac{375}{189}=\frac{125}{63}.$$

(3) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{11}{20} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}.\frac{4}{5} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right)$$

Κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα στην παρένθεση:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6}.\frac{4}{5} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}.\frac{2}{5} + \frac{1}{3}.10 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} - \frac{2}{15} + \frac{10}{3} + \frac{1}{12}$$

Ο Ε.Κ.Π. $[3, 15, 12] = 60$. Άρα

$$\frac{2.20}{3.20} - \frac{2.4}{15.4}. + \frac{10.20}{3.20} + \frac{5}{12.5} = \frac{40 + 8 + 200 + 5}{60} = \frac{253}{60}$$

Και τελικά

$$\frac{11}{20} \div \frac{253}{60} = \frac{11}{20}.\frac{60}{253} = \frac{3}{23}$$

γιατί $253 = 11.23$.

(4) Να γραφτούν τα παρακάτω ως απλά κλάσματα.

$$(i)\ \frac{1}{1+\frac{1}{2}},\quad (ii)\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}},\quad (iii)\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}.$$

(i) Κάνουμε τις πράξεις, χρησιμοποιώντας τους κανόνες για τα σύνθετα κλάσματα.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(ii) Και πάλι κάνουμε τις πράξεις Ξεκινώντας από το το τέλος, χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

(iii) Όπως και το (ii):

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}} = \frac{1}{1+\dfrac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}.$$

(5) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}.$$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα απλοποίησης των σύνθετων κλασμάτων:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2.9}{3.4} + \frac{4.3}{2.9} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3.3 + 2.2}{6} = \frac{13}{6}.$$

(6) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Ο ευκολότερος τρόπος σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι να ανάγουμε όλα τα κλάσματα με παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, τελικά έχουμε

$$\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{x^2-1}.$$

(7) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1}.$$

Όπως και πριν, ανάγουμε όλα τα κλάσματα με παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 - x - (x^2 + 2x)}{(x+2)(x-1)}.$$

Απλοποιούμε τις πράξεις

$$\frac{x^2 - x - (x^2 + 2x)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 - x - x^2 - 2x}{(x+2)(x-1)} = -\frac{3x}{(x+2)(x-1)}.$$

(8) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x-1}.$$

Όπως και πριν, ανάγουμε όλα τα κλάσματα με παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)} - \frac{x^2-4}{(x+2)(x-1)}$$

Εδώ πάλι χρησιμοποιούμε τονμ τύπο για την διαφορά τετραγώνων.

$$\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-1-x^2+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}.$$

Ανισότητες Κλασμάτων

Μια βασική ιδιότητα των κλασμάτων είναι ότι

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.}$$

Για παράδειγμα

$$\frac{14}{23}, \frac{28}{46} \quad 14.46 = 23.28 = 644 \Rightarrow \frac{14}{23} = \frac{28}{46}$$

Θα επεκτείνουμε την διαδικασία αυτή για ανισότητες. Υποθέτουμε πάντα ότι οι παρονομαστές είναι θετικοί. Αυτό μπορούμε να το υποθέσουμε γιατί:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}, \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}.$$

Έχοντας την παραπάνω υπόθεση:

$$\boxed{\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad \leq bc.}$$

Μερικές άμεσες συνέπειες

- Για δυο κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή, το μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μεγαλύτερο αριθμητή.
- Για δυο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή, το μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή.

Παραδείγματα

(1) Να συγκριθούν τα κλάσματα:

$$(i)\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ (ii)\ -\frac{5}{7},\ -\frac{6}{13},\ (iii)\ \frac{12}{17},\ \frac{13}{20}.$$

(i) Χρησιμοποιούμε την βασική παρατήρηση:

$$2.7 = 14,\ 3.5 = 15 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{3}{7}.$$

(ii) Με την ίδια μέθοδο, κάνοντας αρνητικούς τους αριθμητές

$$(-5).13 = -65,\ (-6).7 = -42 \Rightarrow -\frac{5}{7}, < -\frac{6}{13}.$$

(iii) Όμοια:

$$12.20 = 240,\ 17.13 = 221 \Rightarrow \frac{12}{17} > \frac{13}{20}$$

Αν το γινόμενο που περιέχει τον αριθμητή είναι μεγαλύτερο του άλλου γινομένου, τότε το κλάσμα με αυτόν τον αριθμητή είναι μεγαλύτερο του άλλου.

(2) Να συγκριθούν τα κλάσματα:

$$(i)\ \frac{13}{27},\ \frac{15}{37},\ (ii)\ \frac{123}{234},\ \frac{234}{445},\ (iii)\ \frac{4589}{11378},\ \frac{6872}{13785}.$$

(i) Χρησιμοποιούμε την βασική παρατήρηση:

$$13.37 = 481,\ \ 27.15 = 405 \Rightarrow \frac{13}{27} > \frac{15}{37}.$$

(ii) Με την ίδια μέθοδο:

$$123.445 = 54735,\ \ 234^2 = 54756 \Rightarrow \frac{123}{234} < \frac{234}{445}.$$

(iii) Όπως και πριν:

$$4598.13785 = 63383430, \quad 6872.11378 = 78189616 \Rightarrow \frac{4589}{11378} < \frac{6872}{13785}.$$

(3) Ο Γιάννης τρέχει 4km σε 30min. Μ' αυτόν τον ρυθμό πόσο θα τρέξει σε 45min;

Έστω λοτι θα τρέξει xkm σε 45min. Τότε, αναλογικά, θα ισχύει

$$\frac{4}{30} = \frac{x}{45} \Longrightarrow 4.45 = 30x \Longrightarrow 180 = 30x \Longrightarrow x = 6km.$$

(4) Ένα μείγμα πρωινού περιέχει ρύζι, σιτάρι και καλαμπόκι σε αναλογία 2:3:5. Εάν μια σακούλα του μείγματος περιέχει 3 κιλά ρύζι, πόσο καλαμπόκι περιέχει;

Έστω ότι περιέχει x κιλά καλαμπόκι. Χρησιμοποιούμε τις αναλογίες:

$$\frac{\text{ρύζι}}{\text{καλαμπόκι}} = \frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7.5$$

(5) Ο Γιώργος έχει 30 βόλους, 18 από τους οποίους είναι κόκκινοι και οι 12 μπλε. Η Μαρία έχει 20 βόλους οι οποίοι είναι είτε κόκκινοι είτε μπλε. Αν ο λόγος των κόκκινων βόλων προς τους μπλε είναι ίδιος για τον Γιώργο και την Μαίρη, τότε πόσους κόκκινους και πόσους μπλε βόλους έχει η Μαίρη;

Έστω η Μαίρη έχει x μπλε βόλους. Άρα θα έχει $20 - x$ κόκκινους βόλους. Τώρα οι αναλογίες κόκκινων προς μπλε είναι ίδια για τον Γιώργο και την Μαίρη. Άρα

$$\frac{\text{κόκκινοι}}{\text{μπλε}} = \frac{18}{12} = \frac{20-x}{x},$$

όπου το δεύτερο κλάσμα είναι του Γιώργου και το τρίτο της Μαίρης. Άρα

$$\frac{3}{2} = \frac{20-x}{x} \Rightarrow 3x = 2(20-x) = 40 - 2x \Rightarrow 3x + 2x = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8.$$

Άρα η Μαίρη έχει 8 μπλε και 20-8 = 12 κόκκινους βόλους.

(6) Υπάρχουν συνολικά 42 υπολογιστές στο εργαστήριο. Κάθε ένας απ' αυτούς τρέχει ένα από τα τρία λειτουργικά συστήματα, Windows, MacOS, ή Linux. Η αναλογία MacOS, Windows, Linux είναι 2:5:7. Να βρείτε τον αριθμό των υπολογιστών που τρέχει κάθε λειτουργικό σύστημα.

Έστω ότι x υπολογιστές τρέχουν MacOS, y τρέχουν Windows και z τρέχουν Linux. Γνωρίζουμε ότι

$$x + y + z = 42.$$

Θα εκφράσουμε τα y και z ως προς x:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{MacOS}}{\text{Windows}} &= \frac{2}{5} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2y = 5x \Rightarrow y = \frac{5}{2}x \\
\frac{\text{MacOS}}{\text{Linux}} &= \frac{2}{7} = \frac{x}{z} \Rightarrow 2z = 7x \Rightarrow z = \frac{7}{2}x
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση:

$$x+\frac{2x}{5}+\frac{7x}{2}=42 \Rightarrow \frac{2x}{2}+\frac{5x}{2}+\frac{7x}{2}=42 \Rightarrow \frac{14x}{2}=42 \Rightarrow 7x=42 \Rightarrow x=6.$$

Άρα έχουμε

- 6 υπολογιστές που τρέχουν MacOS,
- $\frac{5}{2}.6=5.3=15$ υπολογιστές που τρέχουν Windows,
- $\frac{7}{2}.6=7.3=21$ υπολογιστές που τρέχουν Linux.

Άρρητοι

Ένας αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος**. Θα ξεκινήσουμε με το πιο κλασικό παράδειγμα.

Πυθαγόρας

Η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Έστω ότι η $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχει ένα ανάγωγο κλάσμα έτσι ώστε

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1.$$

Μ' αυτήν την υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο.Αρχικά αυτό σημαίνει:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $2b^2$ είναι άρτιος, και ο a^2 είναι άρτιος. Δηλαδή $2/a^2 \Rightarrow 2/a$, γιατί ο 2 είναι πρώτος και αν διαιρεί ένα γινόμενο, τότε διαιρεί έναν από τους παράγοντες.
Άρα $a = 2k$ και $a^2 = 4k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

Επειδή ο b^2 είναι άρτιος, ο b είναι άρτιος και $b = 2\ell$. Αυτό σημαίνει:

$$(a, b) \geq 2$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.
Συνεπώς η $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.

Η ίδια ακριβώς απόδειξη αποδεικνύει το επόμενο:

Αν ο p είναι πρώτος, $\sqrt{p}$ είναι άρρητος αριθμός.

Έστω ότι η $\sqrt{p}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχει ένα ανάγωγο κλάσμα έτσι ώστε

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1.$$

Μ' αυτήν την υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο.Αρχικά αυτό σημαίνει:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow pb^2 = a^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο pb^2 διαιρείται δια p, άρα και ο a^2 διαιρείται δια p. Δηλαδή $p/a^2 \Rightarrow p/a$, γιατί ο p είναι πρώτος και αν διαιρεί ένα γινόμενο, τότε διαιρεί έναν από τους παράγοντες.
Άρα $a = pk$ και $a^2 = p^2k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$pb^2 = p^2k^2 \Rightarrow b^2 = pk^2$$

Επειδή ο b^2 διαιρείται δια p, ο b διαιρείται δια p και $b = p\ell$. Αυτό σημαίνει:

$$(a, b) \geq p$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.
Συνεπώς η $\sqrt{p}$ δεν είναι ρητός.

Η ίδια ιδέα αποδεικνύει και το γενικό αποτέλεσμα:

Αν ο m είναι θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε η $\sqrt{m}$ είναι άρρητος αριθμός.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, θα ξεκινήσουμε με κάποιες παρατηρήσεις. Έστω

$$m = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}.$$

η ανάλυση του m σε πρώτους παράγοντες. Τότε

$$m^2 = p_1^{2s_1} \dots p_n^{2s_n},$$

δηλαδή στο τετράγωνο του m οι εκθέτες είναι άρτιοι.
Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν στην ανάλυση σε πρώτους

$$m = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}.$$

οι εκθέτες είναι άρτιοι, τότε ο m είναι τέλειο τετράγωνο.
Δηλαδή υποθέτουμε ότι $s_i = 2r_i$, $i = 1, 2 \dots n$. Τότε

$$m = p_1^{2r_1} \dots p_n^{2r_n} = (p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n})^2.$$

Έστω ότι η $\sqrt{m}$ είναι ρητός και στην ανάλυση του σε πρώτους παράγοντες

$$m = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n},$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα s_i που δεν είναι άρτιος και είναι περιττός. Κι αυτό σύμφωνα μ' αυτά που αναφέραμε πριν. Όπως και πριν, υπάρχει ένα ανάγωγο κλάσμα έτσι ώστε

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1.$$

Μ' αυτήν την υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο.Αρχικά αυτό σημαίνει:

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow m = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow mb^2 = a^2.$$

Θέτουμε $s_i = 2r_i + 1$, $r_i \in \mathbb{N}$. Τότε

$$p_i^{2r_i+1}/mb^2 \Rightarrow p_i^{2r_i+1}/a^2$$

Επειδή $p_i^{2r_i+1}/a^2$ έχουμε

- p_i/a^2 και p_i/a. Άρα ο p_i είναι διαιρέτης του a.
- Ο p_i εμφανίζεται σε άρτια δύναμη στον a^2. Έστω αυτή η δύναμη είναι $2t$.
- Επειδή $p_i^{2r_i+1}/a^2$, $2t > 2r_i + 1$.

Ανακεφαλαιώνοντας:

$$m = p_i^{2r_i+1}m', \; p_i \nmid m', \; a^2 = p_i^{2t}a'$$

οπότε

$$mb^2 = a^2 \Rightarrow p_i^{2r_i+1}m'b^2 = p_i^{2t}a' \Rightarrow m'b^2 = p_i^{2t-2r_i-1}a'$$

Επειδή $2t > 2r_i + 1$, $2t - 2r_i - 1 > 0$ και $p_i/m'b^2$. Επειδή $p_i \nmid m'$, p_i/b^2 και p_i/b. Άρα

$$(a, b) \geq p_i$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.
Συνεπώς η $\sqrt{m}$ δεν είναι ρητός.

Διαφορετικά, από την εξίσωση $mb^2 = a^2$, το mb^2 είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε

- Όλοι οι εκθέτες των πρώτων στο mb^2 είναι άρτιοι.
- Όλοι οι εκθέτες των πρώτων στο b^2 είναι άρτιοι.
- Οι εκθέτες του των πρώτων στο mb^2 είναι το άθροισμα των εκθετών του b^2 συν τους αντίστοιχους εκθέτες του m.
- Άρα οι εκθέτες των πρώτων στο m είναι η διαφορά ων εκθετών του mb^2 μείον τους αντίστοιχους εκθέτες του b^2.
- Άρα οι εκθέτες των πρώτων στο m είναι άρτιοι ως διαφορά άρτιων αριθμών.

Το τελευταίο είναι άτοπο από την αρχική υπόθεση στο m.
Συνεπώς η $\sqrt{m}$ δεν είναι ρητός.

Επειδή το σύνολο των ρητών είναι κλειστό ως προς τις τέσσερις βασικές πράξεις (εκτός της διαίρεσης δια 0) ισχύουν τα παρακάτω:

1. Το άθροισμα (ή η διαφορά) ενός ρητού και ενός αρρήτου είναι άρρητος.
2. Το γινόμενο ενός ρητού και ενός αρρήτου είναι άρρητος.
3. Το αντίστροφο ενός αρρήτου είναι άρρητος.
4. Το πηλίκο ενός ρητού δια ενός αρρήτου (ή αντίστροφα) είναι άρρητος.

Το άθροισμα ή το γινόμενο δυο αρρήτων μπορεί να είναι ρητός:

$$1+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ αλλά } (1+\sqrt{2})-\sqrt{2}=1 \in \mathbb{Q}.$$

Το γινόμενο είναι ακόμη απλούστερο:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ αλλά } \sqrt{2}.\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2 \in \mathbb{Q}.$$

Παραδείγματα

(1) Να δείξετε ότι $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Θα πάρουμε το τετράγωνο

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Γνωρίζουμε

$$\sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}.$$

(2) Να δείξετε ότι $\sqrt{2}/\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Χρησιμοποιούμε μια ιδιότητα των κλασμάτων για να κάνουμε τον αριθμητή ή τον παρονομαστή ακέραιο:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}, \sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Αλλά

$$\sqrt{10} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{5} \notin \mathbb{Q}.$$

(3) Να γράψετε το κλάσμα $1/\sqrt{3}-\sqrt{2}$ με ακέραιο παρονομαστή.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο διαφοράς τετραγώνων: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Δημιουργούμε το δεξί μέρος της εξίσωσης:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

(4) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Η μέθοδος είναι ίδια με αυτήν για την $\sqrt{2}$. Έτσι έστω

$$\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}, \ (a, b) = 1.$$

Τότε

$$2 = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow 2b^3 = a^3.$$

Τότε το $2b^3$ είναι άρτιος και επομένως ο a^3 είναι άρτιος, που σημαίνει ότι και ο a είναι άρτιος. Άρα $a = 2k$. Άρα

$$2b^3 = (2k)^3 = 8k^3 \Rightarrow b^3 = 4k^3.$$

Άρα ο b^3 είναι άρτιος και άρα ο b είναι άρτιος.Συνεπώς

$$(a, b) \geq 2$$

άτοπο. Άρα η $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι ρητός.

Και οι υπόλοιπες αποδείξεις για το ότι οι τετραγωνικές ρίζες είναι άρρητες γενικεύονται και σε ανώτερες ρίζες. Το γενικό αποτέλεσμα είναι:

Έστω $m \in \mathbb{N}$ δεν είναι τέλεια n δύναμη. Τότε $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$.

Δυνάμεις

Θα θυμηθούμε τον ορισμό των δυνάμεων και τις βασικές ιδιότητές τους.

- Για $n = 1, 2 \ldots,$ ορίζουμε
$$a^n = \underbrace{a.a.\ldots a}_{n \text{ φορές}}$$
- $a^0 = 1$, $a \neq 0$.
- Για $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, $n = -m$, για $m > 0$,
$$a^n = \frac{1}{a^m}$$
- Για $n \in \mathbb{Q}$, $n = \frac{p}{q}$, $q > 0$, ορίζουμε
$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ιδιότητες Δυνάμεων

- $a^n.a^m = a^{n+m}$.
- $(a^n)^m = a^{nm}$.
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- $(ab)^n = a^n.b^n$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{2^4.3^4}{6^2}.$$

Χρησιμοποιούμε ότι $6 = 2.3$. Έχουμε

$$\frac{2^4.3^4}{6^2} = \frac{2^4.3^4}{(2.3)^2} = \frac{2^4.3^4}{2^2.3^2} = 2^{4-2}.3^{4-2} = 2^2.3^2 = 4.9 = 36.$$

(2) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2} \frac{2^2}{3^3}.$$

Από τις ιδιότητες

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2} \frac{2^2}{3^3} = \left(\frac{3^2}{2}\right)^{2} \frac{2^2}{3^3} = \frac{(3^2)^2}{2^2} \frac{2^2}{3^3} = \frac{3^4}{2^2} \frac{2^2}{3^3} = \frac{3^{4-3}}{2^{2-2}} = 3.$$

(3) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{5.(3^2.10)^2}{3^2 60^2}.$$

Χρησιμοποιούμε ότι $60 = 2.3.10$.

$$\frac{5.(3^2.10)^2}{3^2 60^2} = \frac{5.(3^2)^2.10^2}{3^2(2.3.10)^2} = \frac{5.3^4.10^2}{3^2.2^2.3^2.10^2} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

(4) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$3\left((2.3)^{-1}\frac{1}{2^3}\right)^{-1}(3.2^2)^{-2}$$

Απλοποιούμε από μέσα προς τα έξω:

$$3(6^{-1}.2^{-3})^{-1}.\frac{1}{(3.2^2)^2} = 3.(6^{-1})^{-1}.(2^{-3})^{-1}.\frac{1}{3^2.(2^2)^2} = 3.6.2^3.\frac{1}{3^2.2^4} = 3.3.2.2^3\frac{1}{3^2.2^4} = 1.$$

(5) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3.$$

Παρατηρούμε ότι $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Άρα

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(6) Να γραφεί ως απλή δύναμη του 2:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

Γράφουμε τις ρίζες σαν κλασματικές δυνάμεις:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{4}}}}} = \sqrt{\sqrt{(2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt{(2^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{1}{16}}}.$$

Οπότε τελικά,

$$\sqrt{2^{\frac{1}{16}}} = (2^{\frac{1}{16}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{32}}.$$

(7) Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$L = \left(\frac{36.s^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{2}}}{s^{-\frac{9}{5}} t^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αρχικά απλοποιούμε το κλάσμα:

$$\frac{36.s^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{2}}}{s^{-\frac{9}{5}} t^{\frac{1}{2}}} = 36.s^{\frac{1}{5}-\left(-\frac{9}{5}\right)}.t^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 36.s^{\frac{1}{5}+\frac{9}{5}}.t^{-\frac{4}{2}} = 36s^{\frac{10}{5}}.t^{-2} = 36.s^2.t^{-2}$$

Άρα

$$L = (36.s^2.t^{-2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36.s^2.t^{-2}} = \sqrt{36}\sqrt{s^2}\sqrt{t^{-2}} = \frac{6s}{t}.$$

(7) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{36+4x^2-24x}$.

Αναλύουμε την παράσταση κάτω από το ριζικό:

$$36+4x^2-24x = 4(x^2-6x+9) = 4(x^2-2.3.x+3^2) = 4(x-3)^2$$

Άρα

$$\sqrt{36+4x^2-24x} = \sqrt{4(x-3)^2} = 2(x-3).$$

Δεκαδικοί Αριθμοί

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{12}{5} = 2.4, \quad \frac{1}{3} = 0.33333 = 0.\bar{3}\ldots \quad \frac{3}{7} = 0.428571428571\cdots = 0.\overline{428571}$$

Από την άλλη μεριά

$$\sqrt{2} = 1.41421356237, \quad \sqrt[3]{3} = 1.44224957031, \quad \pi = 3.141592654.$$

Παρατηρούμε ότι όταν εκφράσουμε τους ρητούς αριθμούς ως δεκαδικούς τότε οι δεκαδικοί αυτοί είτε τερματίζουν είτε, από κάποιο σημείο και μετά, επαναλαμβάνεται. Το κομμάτι του δεκαδικού που έχει ευθεία από πάνω του, επαναλαμβάνεται.
Αντίθετα οι άρρητοι αριθμοί δεν ικανοποιούν αυτήν την συνθήκη. Δηλαδή δεν υπάρχει επανάληψη στοιχείων μετά από κάποιο σημείο. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε τα στοιχεία

Παραδείγματα

(1) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.34 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}.$$

(2) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.16 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}.$$

(3) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.125 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

(4) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.475 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.475 = \frac{475}{1000} = \frac{19}{40}.$$

(5) Να γράψετε το κλάσμα $3/7$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση
$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

(6) Να γράψετε το κλάσμα $14/25$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση
$$\frac{14}{25} = 0.56.$$

(7) Να γράψετε το κλάσμα $4/21$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{190476}$$

(8) Να γράψετε το κλάσμα $26/123$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{25}{123} = 0.\overline{21138}.$$

(9) Να γράψετε το κλάσμα $4/21$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{190476}$$

(10) Να γράψετε το κλάσμα $25/123$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{25}{123} = 0.\overline{21138}.$$

(11) Να γράψετε το κλάσμα $37/21$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{37}{21} = 1.\overline{76190}$$

(12) Να γράψετε το κλάσμα $375/147$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{375}{147} = 2.\overline{551020408163265306122448979591836734693877}.$$

(42 ψηφία).

(13) Να γράψετε τον δεκαδικό $0.222\cdots = 0.\bar{2}$ ως κλάσμα.

Θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για να λύσουμε το πρόβλημα.

$$x = 0.222\cdots \Rightarrow 10x = 2.222\cdots = 2 + 0.222\cdots = 2 + x \Rightarrow 9x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}.$$

(14) Να γράψετε τον δεκαδικό $0.2525\cdots = 0.\overline{25}$ ως κλάσμα.

Εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο:

$$x = 0.2525\cdots \Rightarrow 100x = 25.2525\cdots = 25 + 0.2525\cdots = 25 + x \Rightarrow 99x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{99}.$$

(15) Να γράψετε τον δεκαδικό $0.31717\cdots = 0.3\overline{17}$ ως κλάσμα.

Θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για να λύσουμε το πρόβλημα.

$$x = 0.31717\cdots \Rightarrow 100x = 31.71717\ldots$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 31.71717\ldots \\ x & = & 0.31717\ldots \\ \hline 99x & = & 31.4 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα το έχουμε αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Άρα

$$99x = 31.4 = \frac{314}{10} \Rightarrow x = \frac{314}{990} = \frac{157}{495}$$

(16) Να γράψετε τον δεκαδικό $2.1666\cdots = 2.1\overline{6}$ ως κλάσμα.

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο:

$$x = 2.1666\cdots \Rightarrow 10x = 21.6666\ldots$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 21.666\ldots \\ x & = & 2.1666\ldots \\ \hline 9x & = & 19.5 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα το έχουμε αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Άρα

$$9x = 19.5 = \frac{195}{10} \Rightarrow x = \frac{195}{90} = \frac{39}{18}$$

(16) Να γράψετε τον δεκαδικό $5.657878\cdots = 5.65\overline{78}$ ως κλάσμα.

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο:

$$x = 5.657878\cdots \Rightarrow 100x = 565.7878\ldots$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 565.7878\ldots \\ x & = & 5.657878\ldots \\ \hline 99x & = & 560.13 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα το έχουμε αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Άρα

$$99x = 560.13 = \frac{56013}{100} \Rightarrow x = \frac{18671}{3300}.$$

Γεωμετρία

Ξεκινάμε με μια σύντομη ιστορία:

- Αναπαραστάσεις από τάφους στην Αίγυπτο, δείχνουν ότι το σχοινί ήταν το βασικό όργανο για τους τοπογράφους και τους μηχανικούς. Πράγματι η μετάφραση της ονομασίας αυτής της τάξης των επαγγελματιών είναι «σχοινοέλκτες» ή «τεντωτές σχοινιών».
- Οι Έλληνες απέδωσαν την εφεύρεση της γεωμετρίας στους Αιγύπτιους. Έχουμε πολλά στοιχεία για τα πρώιμα Αιγυπτιακά και Βαβυλωνιακά μαθηματικά γιατί οι λαοί αυτοί διατηρούσαν αρχεία σε παπύρους ή πλακίδια από πηλό, τα οποία διασώθηκαν σε αρκετές περιπτώσεις λόγω του ξηρού κλίματος. Σ' αυτά τα αρχεία μπορούμε να εντοπίσουμε στοιχεία επιρροής από την Ινδία.
- Οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι ήταν αρκετά προηγμένοι στην αριθμητική και την απλή άλγεβρα.

Αιγύπτιοι - Βαβυλώνιοι

- Έλυναν προβλήματα κεφαλαιοποίησης.
- Γνώριζαν να λύνουν τετραγωνικές εξισώσεις (μόνο τις θετικές τους λύσεις).
- Εξαιρετικοί μηχανικοί καθώς έχτιζαν πυραμίδες, πολυώροφα κτήρια.
- Ήξεραν το 3-4-5 ορθογώνιο τρίγωνο και κάποιες μορφές του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.
- Γνώριζαν πως να βρίσκουν εμβαδά και όγκους στερεών.
- Επιπλέον οι Αιγύπτιοι ήταν καλοί μηχανικοί: έχτιζαν πυραμίδες, πολυώροφα κτήρια, αρδευτικά συστήματα και καθόριζαν το όρια των χωραφιών μετά τις πλημμύρες του Νείλου.

Πριν τον Ευκλείδη - Θαλής

Θαλής ο Μιλήσιος [περίπου 624-546 π.Χ.]. Θεωρείται ο πρώτος που εφάρμοσε τους συμπερασματικούς κανόνες της λογικής στην γεωμετρία, παρέχοντας έτσι τις πρώτες μαθηματικές «αποδείξεις». Επινόησε λέξεις για να περιγράψει αρκετές νέες βασικές έννοιες: κόσμος, γεωμετρία και μαθηματικά. Μεταξύ των θεωρημάτων που η απόδειξή τους αποδίδεται στον Θαλή είναι τα εξής:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- Αν δυο ευθείες τέμνονται οι κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες.
- Δυο τρίγωνα που ικανοποιούν το Κριτήριο Πλευρά-Γωνία-Πλευρά είναι ισοδύναμα.
- Εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Πριν τον Ευκλείδη - Πυθαγόρας

Πυθαγόρας ο Σάμιος [περίπου 570-500 π.Χ.] Ενδεχομένως να υπήρξε μαθητής του Θαλή. Ταξίδεψε στην Αίγυπτο και ίσως να επισκέφτηκε και την Ινδία. Ίδρυσε μια κλειστή μυστικιστική αδελφότητα στις Ελληνικές αποικίες της Κάτω Ιταλίας η οποία λειτούργησε για 200 χρόνια. Η αδελφότητα, ή καλύτερα η κοινότητα, αυτή ήταν αφοσιωμένη στα μαθηματικά, την φιλοσοφία και τις φυσικές επιστήμες. Όλες οι ανακαλύψεις της κοινότητας αποδίδονταν στον ιδρυτή της, έτσι είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε ποιος ανακάλυψε τι ή ακόμα και πότε. Οι Πυθαγόρειοι απέδιδαν μυστικιστικές ιδιότητες στους αριθμούς και λέγεται πως ο ίδιος ο Πυθαγόρας ισχυρίστηκε ότι «Τα πάντα είναι αριθμοί». Η άποψη αυτή οδήγησε στην ανάπτυξη της αριθμολογίας, Οδήγησε όμως και σε σημαντικά επιτεύγματα στα μαθηματικά, ειδικά στον τομέα της Θεωρίας Αριθμών. Ανάμεσα στις γεωμετρικές τους ανακαλύψεις ήταν οι ιδιότητες των παράλληλων ευθειών, το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου και φυσικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Η πιο εντυπωσιακή ανακάλυψη των Πυθαγορείων ήταν αυτή της ύπαρξης των άρρητων αριθμών

Πριν τον Ευκλείδη - Πλάτωνας

Ένα μέλος της Πυθαγόρειου κοινότητας κατά τα τελευταία χρόνια λειτουργίας της ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος [περίπου 470-410 π.Χ.]. Φαίνεται να ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε μια παρουσίαση της γεωμετρίας ως μια λογική αλυσίδα προτάσεων που βασίζονταν σε ελάχιστους αρχικούς ορισμούς.
Για τον Πλάτωνα [428-347 π.Χ.] είναι γνωστό πως είχε ταξιδέψει στην Αίγυπτο καθώς και ότι είχε επισκεφτεί τους Πυθαγόρειους στην νότια Ιταλία προτού επιστρέψει στην Αθήνα για να ιδρύσει την περίφημη Ακαδημία. Ο Πλάτωνας δεν ήταν μαθηματικός, αλλά είχε την άποψη ότι η γεωμετρία ήταν ένα εξαιρετικό πεδίο πειραματισμού για την λογική σκέψη. Λέγεται πως στην είσοδο της Ακαδημίας στο στο υπέρθυρο υπήρχε η επιγραφή *αγεωμέτρητος μηδείς εισίτω*, δηλαδή απαγορεύεται η είσοδος σε όσους δεν έχουν γνώση της γεωμετρίας. Επίσης, ανέφερε ότι η γεωμετρία ήταν η καλύτερη εκπαίδευση για τη σκέψη και ως τέτοια είναι αναντικατάστατη για φιλόσοφους και πολιτικούς.

Περιγράφοντας την άποψή του περί σωστής εκπαίδευσης, ο Πλάτωνας έγραψε:

> *Η Γεωμετρία θα οδηγήσει την ψυχή προς την αλήθεια και θα δημιουργήσει το πνεύμα της φιλοσοφίας. Πιθανότατα τίποτα άλλο δεν μπορεί να έχει παρόμοιο αποτέλεσμα …σε όλους τους άλλους τομείς της γνώσης, καθώς η εμπειρία μας αποδεικνύει ότι οποιοσδήποτε υπήρξε μελετητής της γεωμετρίας είναι απείρως γρηγορότερος στην κατανόηση από κάποιον που δεν την κατέχει.* [1]

Στην συνέχεια, ο Πλάτωνας περιγράφει την γεωμετρία ως «γνώση αυτού που από πάντα υπήρχε» Παρατηρεί επίσης ότι μια τέλεια ευθεία γραμμή ή ένας τέλειος κύκλος δεν μπορούν να υπάρξουν στην φύση. Οι παρατηρήσεις αυτές τον οδήγησαν στο να δεχτεί την ύπαρξη ενός άλλου σύμπαντος ιδεατών μορφών όπου ζούσαν οι ψυχές μας πριν την γέννηση. Η πραγματικότητα που βιώνουμε καθημερινά είναι μια ανεπαίσθητη ηχώ αυτών των τέλειων μορφών, και η γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδεατών αντικειμένων που κατοικούν στο ανθρώπινο μυαλό. Η εκμάθηση της γεωμετρίας είναι ουσιαστικά μια διαδικασία αφύπνισης αυτής της εγγενούς γνώσης και επομένως προετοιμάζει το μυαλό να ανακτήσει μια διαφορετική γνώση της καλοσύνης και της δικαιοσύνης, που είναι ο υπέρτατος στόχος της φιλοσοφίας του.

[1] Πλάτωνας, Πολιτεία, VII

Περισσότερο από 2000 χρόνια αργότερα, ο ρόλος της γεωμετρίας ως εγγενές προϊόν του ανθρώπινου μυαλού, αποτέλεσε την θεμέλιο λίθο της φιλοσοφίας του Immanuel Kant. Ο Πλάτωνας και το όραμά του περί των τέλειων γεωμετρικών μορφών βοήθησε στο να καταστούν τα μαθηματικά μια καθαρά απαγωγική επιστήμη. Αναφέρθηκε με απέχθεια στις πειραματικές επιστήμες και την εφαρμοσμένη μηχανική και αυστηρώς προσδιόρισε τον κανόνα (χάρακας χωρίς κλίμακα) και τον διαβήτη ως τα κατάλληλα εργαλεία για γεωμετρικές κατασκευές. Είναι μια προφανής διαπίστωση ότι οι απόψεις αυτές επηρέασαν την εξέλιξη των ιδεών του Ευκλείδη στην γεωμετρία.

Ο Πλάτωνας στο έργο του *Πολιτεία* γράφει:

> *Αντιλαμβάνεστε πως οι σπουδαστές της γεωμετρίας, της αριθμητικής και των συναφών επιστημών υποθέτουν το περιττό και το άρτιο και τα σχήματα και τα τρία είδη γωνιών και τα αντίστοιχά τους σε διάφορους κλάδους της επιστήμης. Αυτές είναι οι υποθέσεις τους, τις οποίες αυτοί και όλοι οι υπόλοιποι υποτίθεται ότι γνωρίζουν, και επομένως δεν θεωρούν σκόπιμο να τις εξηγήσουν ούτε στους εαυτούς τους ούτε σε άλλους, αλλά ξεκινούν μ' αυτές και συνεχίζουν μέχρι να φτάσουν επιτέλους και με αρμονικό τρόπο στο συμπέρασμά τους.*

Ένας από τους μαθητές του Πλάτωνα, ο οποίος μάλιστα δίδαξε στην Ακαδημία αργότερα, ήταν ο εξαιρετικός μαθηματικός Εύδοξος [408-355 π.Χ.]. Ο Εύδοξος ανέπτυξε μια ενιαία γενική θεωρία αναλογιών (αργότερα εντάχθηκε ως το Τεύχος *V* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη) η οποία διαχειρίστηκε με επιτυχία τα προβλήματα με τις σύμμετρες και τις ασύμμετρες ποσότητες. Η ιδέα ήταν ότι θεωρούσε τις ποσότητες αυτές ως τμήματα ευθειών κατάλληλου μήκους αντί να τις μελετά ως αριθμούς. Ο Εύδοξος επίσης ανέπτυξε την *μέθοδο της εξάντλησης*, η οποία ουσιαστικά κάνει χρήση διαδοχικών προσεγγίσεων ή ορίων. Η θεωρία αυτή ήταν ένα προοίμιο του απειροστικού λογισμού που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Ευκλείδης

Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό για τον Ευκλείδη. Διέπρεψε (ένας όρος που χρησιμοποιούμε όταν δεν είμαστε σίγουροι πότε γεννήθηκε ή πέθανε κάποιος, αλλά είμαστε βέβαιοι ότι υπήρξε σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο) γύρω στο 300 π.Χ.. Ίσως να φοίτησε στην Ακαδημία, αλλά έζησε και δίδαξε στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας της Αιγύπτου. Οι μοναδικές προσωπικές πληροφορίες που έχουμε για αυτόν είναι μέσω δυο ανέκδοτων. Ο Πρόκλος [410-485] ο οποίος διεύθυνε την Ακαδημία μερικούς αιώνες αργότερα και σχολίασε το έργο του Ευκλείδη *Τα Στοιχεία*, διηγείται ένα από αυτά για μια συνομιλία μεταξύ του Ευκλείδη και του Βασιλιά Πτολεμαίου του Πρώτου, ωστόσο πρέπει να τονίσουμε πως η ίδια ιστορία έχει ειπωθεί και για άλλους βασιλείς και άλλους μαθηματικούς.

> *Λέγεται ότι ο Πτολεμαίος κάποτε ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπήρχε συντομότερος δρόμος για την γεωμετρία παρά μέσω των Στοιχείων, και ο Ευκλείδης του αποκρίθηκε πως δεν υπάρχει βασιλική οδός στην γεωμετρία.*

Ένας μεταγενέστερος συγγραφέας ο Ιωάννης ο Στοβαίος, μας διηγείται μια άλλη ιστορία:

> *Κάποιος ο οποίος είχε ξεκινήσει να μελετά γεωμετρία με τον Ευκλείδη, όταν έμαθε το πρώτο θεώρημα, ρώτησε τον Ευκλείδη «Ωραία, αλλά εγώ τι θα κερδίσω μαθαίνοντας αυτά τα πράγματα;» ο Ευκλείδης κάλεσε ένα δούλο του και του είπε «Δώσε του τρεις οβολούς, αφού έχει ανάγκη να κερδίζει κάτι από αυτά που μαθαίνει».*

Ο Ευκλείδης έγραψε πλήθος βιβλίων από τα οποία μόνο μερικά σώζονται, αλλά τα *Τα Στοιχεία της Γεωμετρίας* είναι μακράν το πιο γνωστό και με την μεγαλύτερη επιρροή. Η λέξη στοιχείο για τους αρχαίους σήμαινε και γράμμα της αλφαβήτου και χρησιμοποιούταν συχνά ο τίτλος *Στοιχεία* για αντίστοιχα συγγράμματα, όπως τώρα υπάρχει πληθώρα βιβλίων με τον τίτλο *Ανάλυση*. Ήταν γραμμένο σαν διδακτικό βιβλίο και όχι σαν ερευνητική εργασία. Περιέχει μια συλλογή από βασικά θεωρήματα με ευρεία και γενική εφαρμογή. Τα περισσότερα από αυτά ήταν ήδη γνωστά πριν την εποχή του Ευκλείδη, αλλά η επιλογή των θεωρημάτων και η λογική τους διάταξη ήταν αποκλειστικά έργο του Ευκλείδη.

Τα Στοιχεία αποτελούνται από δεκατρία βιβλία ή κεφάλαια. Χονδρικά, το πρώτο απ’ αυτά, μαζί με κομμάτια από το τρίτο και το τέταρτο, αποτελούν την ύλη ενός συνηθισμένου μαθήματος γεωμετρίας στο γυμνάσιο. *Τα Στοιχεία* του Ευκλείδη θεωρείται το πιο επιτυχημένο (έχοντας ως μέτρο το πλήθος εκδόσεων που τυπώθηκαν) και σημαντικό βιβλίο μαθηματικών και κατατάσσεται μετά την Βίβλο και το Κοράνι ως ένα από τα πιο σημαντικά βιβλία όλων των εποχών. Κάποτε η μελέτη του θεωρούνταν στοιχειώδης για οποιοδήποτε μορφωμένο άτομο, σήμερα παραμένει μαρτυρία της ομορφιάς των μαθηματικών.
Τα Στοιχεία του Ευκλείδη ξεκινούν, από την αρχή, με μια σειρά από ορισμούς. Δεν υπάρχει πρόλογος, ούτε ενθαρρυντικά μηνύματα ή κίνητρα για τον αναγνώστη. Το ότι ο πρώτος από τους ορισμούς είναι κάπως δυσνόητος δεν αλλοιώνει την τέλεια απλότητα και τάξη του σύμπαντος στο οποίο ετοιμαζόμαστε να εισέλθουμε.

Ορισμός 1. *Σημείο είναι αυτό που δεν έχει κανένα μέρος .*
Αν τα σημεία είχαν φυσικές διαστάσεις και αν τα ευθύγραμμα τμήματα ήταν κατασκευασμένα από σημεία, τότε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα θα ήταν κατασκευασμένο από ένα συγκεκριμένο πλήθος σημείων. Για παράδειγμα ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους α εκατοστών ας υποθέσουμε ότι αποτελείται από 3.141.592 σημεία, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα μήκους β εκατοστών αποτελείται από 2.718.281 σημεία. Τότε θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3.141.592}{2.718.281}$, οπότε ο λόγος οποιωνδήποτε δυο τμημάτων θα ήταν ρητός αριθμός και επομένως τα δυο ευθύγραμμα τμήματα θα ήταν σύμμετρα. Εφόσον ήταν γνωστό πως υπάρχουν ασύμμετρα τμήματα, πρέπει να είναι αληθές ότι τα σημεία δεν έχουν διαστάσεις. Οπότε φαίνεται ότι ο Ευκλείδης εννοούσε ότι τα σημείο δεν έχει διαστάσεις. Αυτό δεν απαντά την ερώτηση τι πραγματικά είναι ένα σημείο.

Ορισμός 2. *Η γραμμή δεν έχει πλάτος.*

Ορισμός 3. *Τα άκρα μιας γραμμής είναι σημεία.*

Ορισμός 4. *Ευθεία γραμμή είναι μια γραμμή, που τα σημεία της βρίσκονται ομοιόμορφα πάνω της.*

Ο δεύτερος ορισμός μπορούμε να τον δεχτούμε εύκολα. Να σημειωθεί εδώ πως αυτό που ο Ευκλείδης αποκαλεί γραμμή, μπορεί να είναι και καμπύλη, όταν εννοεί ευθεία γραμμή, μιλά συγκεκριμένα για ευθεία γραμμή. Αυτές οι γραμμές ή καμπύλες έχουν μήκος αλλά όχι πλάτος, αν και αυτό εγείρει ερωτήματα για το ποια είναι η έννοια του μήκους και του πλάτους. Ο τρίτος ορισμός λέει ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου ή καμπύλου τμήματος είναι σημεία, ωστόσο υπάρχουν καμπύλες που δεν έχουν τελικά σημεία, όπως ο κύκλος. Συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι όλες οι γραμμές και οι καμπύλες είναι, κατά τον Ευκλείδη, πεπερασμένες σε έκταση. Ο τέταρτος ορισμός έχει νόημα αν τον δούμε ως περιγραφή: κλείστε το ένα σας μάτι και κρατήστε ένα μολύβι μπροστά από το ανοιχτό ώστε να κινείται μακριά από εσάς. Αν κοιτάξετε προς τα κάτω το μολύβι, θα δείτε μόνο μια κυκλική διατομή. Κατά αυτόν τον τρόπο όλες οι διατομές είναι στοιχισμένες στην σειρά ή «βρίσκονται ομοιόμορφα πάνω της». Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για τις καμπύλες.

Σε ένα μοντέρνο απαγωγικό σύστημα, όροι που δεν μπορούν να προσδιοριστούν, ονομάζονται *πρωταρχικοί* επιτρέπονται και όντως είναι χρήσιμοι. Αυτή είναι η πρακτική μας απάντηση στην αναγνώριση ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε τα πάντα. (Ως άσκηση, επιλέξτε μια λέξη στην τύχη μέσα από ένα λεξικό, αναζητήστε την πιο σημαντική από τα συνώνυμα που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή της λέξης και επαναλάβετε την ίδια διαδικασία. Θα ανακαλύψετε πως οι λέξεις που αναζητάτε ή θα σας οδηγήσουν μετά από μια κυκλική πορεία στην αρχική λέξη ή θα καταλήξετε με μια ατελείωτη σειρά από όρους που χρειάζονται ορισμό.) Ενώ η διάκριση μεταξύ πρωταρχικών, μη ορισμένων όρων και ορισμών δεν ήταν ξεκάθαρη στα χρόνια του Ευκλείδη, ο Ευκλείδης φαίνεται ενστικτωδώς να την κατανοεί. Ποτέ δεν αναφέρεται στους αμφισβητήσιμους ορισμούς στις προτάσεις που ακολουθούν. Θα πρέπει να θεωρήσουμε τους αρχικούς ορισμούς του σημείου και της γραμμής ως περιγραφές και όχι ως αυστηρούς ορισμούς, και να τους χρησιμοποιούμε ώστε να γνωρίζει η διαίσθησή μας σχετικά την φύση αυτών των αντικειμένων.

Μετά τους ορισμούς, ακολουθεί μια σειρά από αιτήματα και κάποιες έννοιες που ονομάζονται κοινές έννοιες. Μετά απ’ αυτά ακολουθούν τα Θεωρήματα (τα οποία καλούνται προτάσεις) με τις αποδείξεις τους. Στα μαθηματικά τα αξιώματα και τα αιτήματα είναι προτάσεις τις οποίες αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Γι’ αυτό τον λόγο, και οι σύγχρονοι και οι παλαιότεροι μαθηματικοί επιμένουν πως το σύνολο των αξιωμάτων πρέπει να παραμείνει όσο το δυνατόν μικρότερο. Δεν θα πρέπει να υποθέτουμε τίποτα που μπορούμε να αποδείξουμε, αν και γίνονται κάποιες εξαιρέσεις σε αυτόν τον κανόνα για λόγους σκοπιμότητας: Σε μια εισαγωγική σειρά μαθημάτων, οι συγγραφείς συχνά υιοθετούν ως αξιώματα προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν σε υψηλότερο επίπεδο. Στην εποχή του Ευκλείδη ήταν κατανοητό πως τα αξιώματα πρέπει να είναι προτάσεις που όλοι αποδέχονται ως προφανείς: αλήθειες για τις οποίες όλοι συμφωνούν πως είναι αληθείς, ακόμη και χωρίς απόδειξη. Τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη είναι τα ακόλουθα:

Πρώτο Ευκλείδειο Αίτημα. *[Είναι πάντα δυνατόν] να φέρουμε ευθεία γραμμή από οποιοδήποτε σημείο σε οποιοδήποτε άλλο σημείο.*

Δεύτερο Ευκλείδειο Αίτημα. *[Είναι πάντα δυνατόν] να προεκτείνουμε ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα σε μια ευθεία γραμμή.*

Τρίτο Ευκλείδειο Αίτημα. *[Είναι πάντα δυνατόν] να κατασκευάσουμε κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα.*

Τέταρτο Ευκλείδειο Αίτημα. *Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

Πέμπτο Ευκλείδειο Αίτημα. *Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δυο άλλες ευθείες και οι εντός και επί τα αυτά γωνίες από την μια πλευρά έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, οι δυο ευθείες, αν επεκταθούν προς το άπειρο, θα τέμνονται από την πλευρά που οι εντός και επί τα αυτά γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές.*

Μοντέρνος Ευκλείδης

Πρωταρχικοί Όροι:

- Σημείο.
- Ευθεία.
- Επίπεδο.
- «Πάνω», ανήκει.
- Ενδιάμεσα.
- Ισοδύναμα.

Αξιώματα Hilbert - Σύνδεση

Αξιώματα Σύνδεσης:

1. Για κάθε δυο σημεία υπάρχει μια ευθεία που τα περιέχει.
2. Κάθε δυο σημεία περιέχονται το πολύ σε μια ευθεία.
3. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δυο σημεία.
4. Για οποιαδήποτε τρία μη-συνευθειακά σημεία, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο που να περιέχει αυτά τα σημεία.
5. Αν ένα επίπεδο περιέχει δυο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, τότε κάθε σημείο αυτής της ευθείας ανήκει σ' αυτό το επίπεδο.
6. Αν δυο επίπεδα P_1 και P_2 έχουν ένα κοινό σημείο, τότε θα έχουν τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο.
7. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία τα οποία δεν είναι συνεπίπεδα.

Αξιώματα Hilbert - Διάταξη

1. Αν το σημείο B βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και C, τότε τα A, B, και C είναι συνευθειακά και το B είναι επίσης μεταξύ των σημείων C και A. Δηλαδή, αν $A - B - C$, τότε $C - B - A$.
2. Για οποιαδήποτε δυο σημεία A και C που δεν ταυτίζονται, υπάρχει τουλάχιστον ένα άλλο σημείο B πάνω στην ευθεία που τα βρίσκεται μεταξύ τους.
3. Για οποιαδήποτε δυο σημεία A και B, υπάρχει τουλάχιστον ένα ακόμη σημείο C τέτοιο ώστε το B να βρίσκεται μεταξύ των A και C.
4. Για τρία συνευθειακά σημεία, μόνο ένα από αυτά μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στα άλλα δυο.
5. Έστω ένα επίπεδο και μια ευθεία ℓ πάνω στο επίπεδο, η ℓ διαιρεί τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην ℓ σε δυο ξένα μη-κενά κυρτά σύνολα, S_1 και S_2 τα οποία ονομάζουμε πλευρές της ευθείας, έτσι ώστε για οποιοδήποτε σημείο A που ανήκει στο S_1 και σημείο B που ανήκει στο S_2, το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ πρέπει να τέμνει την ευθεία ℓ.

Αξιώματα Hilbert - Ισοδυναμία

1. Εάν $\overline{AB}$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και A' ένα σημείο σε μια ευθεία ℓ. Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $B' \in \ell$ έτσι ώστε $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
2. Η ισοδυναμία ή ισότητα μηκών είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στα ευθύγραμμα τμήματα.
3. Η ισοδυναμία ή ισότητα μέτρων είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στις γωνίες.
4. Η ισότητα εμβαδών είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στα πολύγωνα.
5. Ισοδύναμα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.

ΠΓΠ Αν σε δυο τρίγωνα δυο πλευρές του ενός είναι ίσες με δυο πλευρές του άλλου και οι περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.

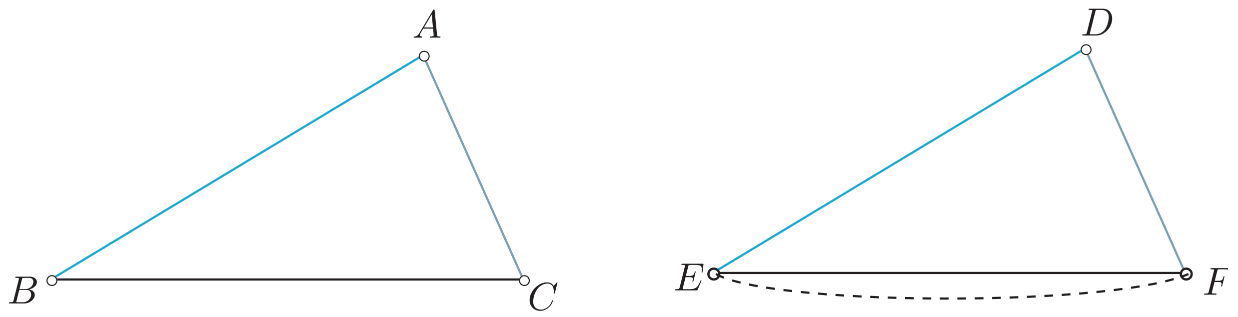
6. Η ισότητα όγκων είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στα πολύεδρα.
7. Ισοδύναμα πολύεδρα έχουν ίσους όγκους.

«Απόδειξη» του ΠΓΠ του Ευκλείδη

Πρόταση Ι.4. [ΠΓΠ]

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες, και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες ίσες, θα έχουν επίσης την μια βάση ίση με την άλλη βάση, τα δύο τρίγωνα θα είναι ίσα, και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι αντίστοιχα ίσες, δηλαδή αυτές που κείται έναντι των ίσων πλευρών.

Απόδειξη της Πρότασης Ι.4: Έστω ABC, DEF είναι δυο τρίγωνα τα οποία έχουν τις δυο πλευρές AB, AC ίσες με τις πλευρές DE, DF του άλλου τριγώνου αντίστοιχα, ειδικότερα την AB με την DE και την AC με την DF, και την γωνία BAC ίση με την γωνία EDF.



Ισχυρίζομαι οτι αν η βάση BC είναι επίσης ίση με την EF, το τρίγωνο ABC θα είναι ίσο με το τρίγωνο DEF, και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι αντίστοιχα ίσες, δηλαδή αυτές που κείται έναντι των ίσων πλευρών, πιο συγκεκριμένα η γωνία ABC με την γωνία DEF, και η γωνία ACB με την γωνία DFE.

Γιατί, αν το τρίγωνο ABC μεταφερθεί πάνω στο τρίγωνο DEF έτσι ώστε το σημείο A να ταυτιστεί με το σημείο D και το ευθύγραμμο τμήμα AB με το DE, τότε το σημείο B θα συμπέσει με το σημείο E, επειδή η AB πλευρά είναι ίση με την DE.

Επίσης, η AB ταυτίζεται με την DE, η ευθεία γραμμή AC θα ταυτίζεται με την DF, γιατί η γωνία BAC είναι ίση με την γωνία EDF, και επομένως και το σημείο C επίσης θα συμπέσει στο F, για τον λόγο οτι η AC είναι και πάλι ίση με την DF.

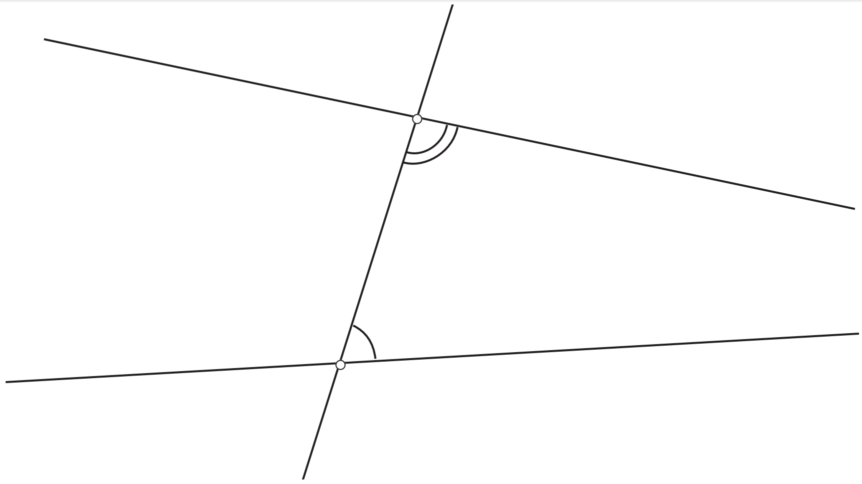
Αλλά το σημείο B επίσης ταυτίζεται με το E. Επομένως η βάση BC θα συμπίπτει με την βάση EF. [Γιατί αν, όταν το σημείο B συμπέσει με το E και το C με το F, η βάση BC δεν θα συμπίπτει με την EF, δυο ευθείες θα περικλείουν ένα κομμάτι του επιπέδου, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, η βάση BC θα ταυτιστεί με την πλευρά EF] και θα είναι ίση με αυτή.

Συνεπώς,ολόκληρο το τρίγωνο ABC θα συμπίπτει με ολόκληρο το τρίγωνο DEF, και θα είναι ίσο μ’ αυτό. Και οι υπόλοιπες γωνίες επίσης θα συμπίπτουν με τις υπόλοιπες γωνίες και θα είναι ίσες μ’ αυτές, η γωνία ABC με την γωνία DEF, και η γωνία ACB με την γωνία DFE. ό.’ε.δ.

Αξίωμα Παραλληλίας

Αξίωμα Παραλληλίας του Ευκλείδη

Έστω δυο ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία έτσι ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών από την μια πλευρά της τέμνουσας να είναι μικρότερο των 180°. Τότε αυτές οι δυο ευθείες θα τέμνονται σ' αυτήν την πλευρά της τέμνουσας.

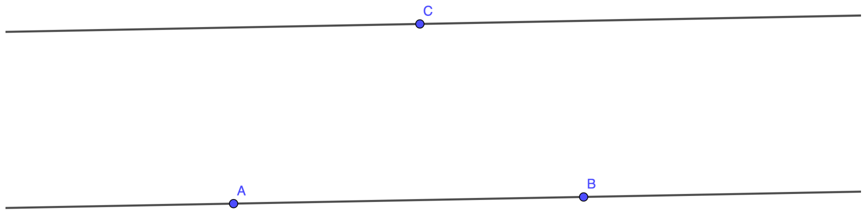


Χρησιμοποιούμε ένα άλλο αξίωμα αντί του κλασικού αξιώματος του Ευκλείδη:

Αξίωμα Παραλληλίας του Playfair

Για μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, υπάρχει ακριβώς μια ευθεία που περιέχει το σημείο και είναι παράλληλη στην δεδομένη ευθεία.

Ευκλείδης $\iff$ Playfair.



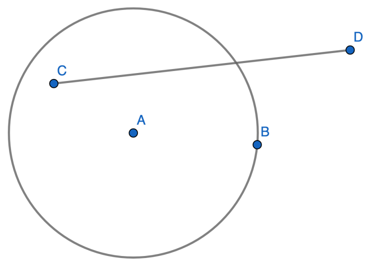
Μια άλλη κατασκευή του Ευκλείδη ήταν ή κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου. Και πάλι υπάρχει ένα κενό.

Αξιώματα Συνέχειας

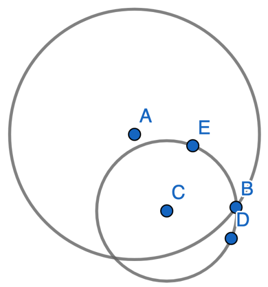
Αξίωμα του Αρχιμήδη: Αν a και b είναι δυο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a < b$, τότε υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $na > b$. Πιο συγκεκριμένα,

1. Για δυο ευθύγραμμα τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$, υπάρχει ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ και ένα σημείο X στο $\overrightarrow{CD}$ έτσι ώστε $\overline{CX} = n \cdot \overline{AB} > \overline{CD}$ και έτσι $C - D - X$.
2. Για δυο γωνίες $\measuredangle ABC$ και $\measuredangle DEF$, υπάρχει ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ και μια ημιευθεία $\overrightarrow{EX}$ έτσι ώστε $\measuredangle XEF = n \cdot \measuredangle ABC$ και $\measuredangle XEF > \measuredangle DEF$.

Αρχή Κυκλικής Συνέχειας - 1:
Ένα ευθύγραμμο τμήμα που το ένα του άκρο είναι στο εσωτερικό και το άλλο στο εξωτερικό ενός κύκλου, θα τέμνει τον κύκλο σε ακριβώς ένα σημείο.



Αρχή Κυκλικής Συνέχειας - 2:
Ένας κύκλος που έχει ένα σημείο στο εσωτερικό και το άλλο σημείο στο εξωτερικό ενός κύκλου, θα τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία.



Γεωμετρίες

- Η γεωμετρία όπου υποθέτουμε το Αξίωμα Παραλληλίας ονομάζεται Ευκλείδεια Γεωμετρία.
- Η γεωμετρία όπου υποθέτουμε όλα τα Αξιώματα εκτός του Αξιώματος Παραλληλίας, ή κάποιο ισοδύναμό του, ονομάζεται Ουδέτερη Γεωμετρία.
- Η γεωμετρία όπου υποθέτουμε όλα τα Αξιώματα και την άρνηση του Αξιώματος Παραλληλίας ονομάζεται Υπερβολική Γεωμετρία.

  Υπερβολικό Αξίωμα Παραλληλίας. Για μια ευθεία ℓ και ένα σημείο P εκτός της ℓ, υπάρχουν πολλές παράλληλες της ℓ που περιέχουν το P.

Υπάρχει και η **Ελλειπτική Γεωμετρία** όπου δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες. Τα Αξιώματα, εκτός του Αξιώματος Παραλληλίας, αποκλείει αυτήν την περίπτωση.

Μοντέλα

Για να ελέγξουμε τα αξιωματικά συστήματα χρησιμοποιούμε μοντέλα. Τα μοντέλα είναι αναπαραστάσεις των πρωταρχικών όρων έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα.

- Αν υπάρχουν μοντέλα που ικανοποιούν τα αξιώματα, τότε το αξιωματικό σύστημα είναι συμβατό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αντιφάσεις στα αξιώματα του συστήματος.
- Αν υπάρχει ένα μοντέλο όπου ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα εκτός ενός, τότε το αξίωμα αυτό είναι ανεξάρτητο των άλλων.

Για παράδειγμα, αν δεχτούμε τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ τότε το $\mathbb{R}^2$, το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών είναι ένα μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σημεία είναι ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ευθείες είναι υποσύνολα

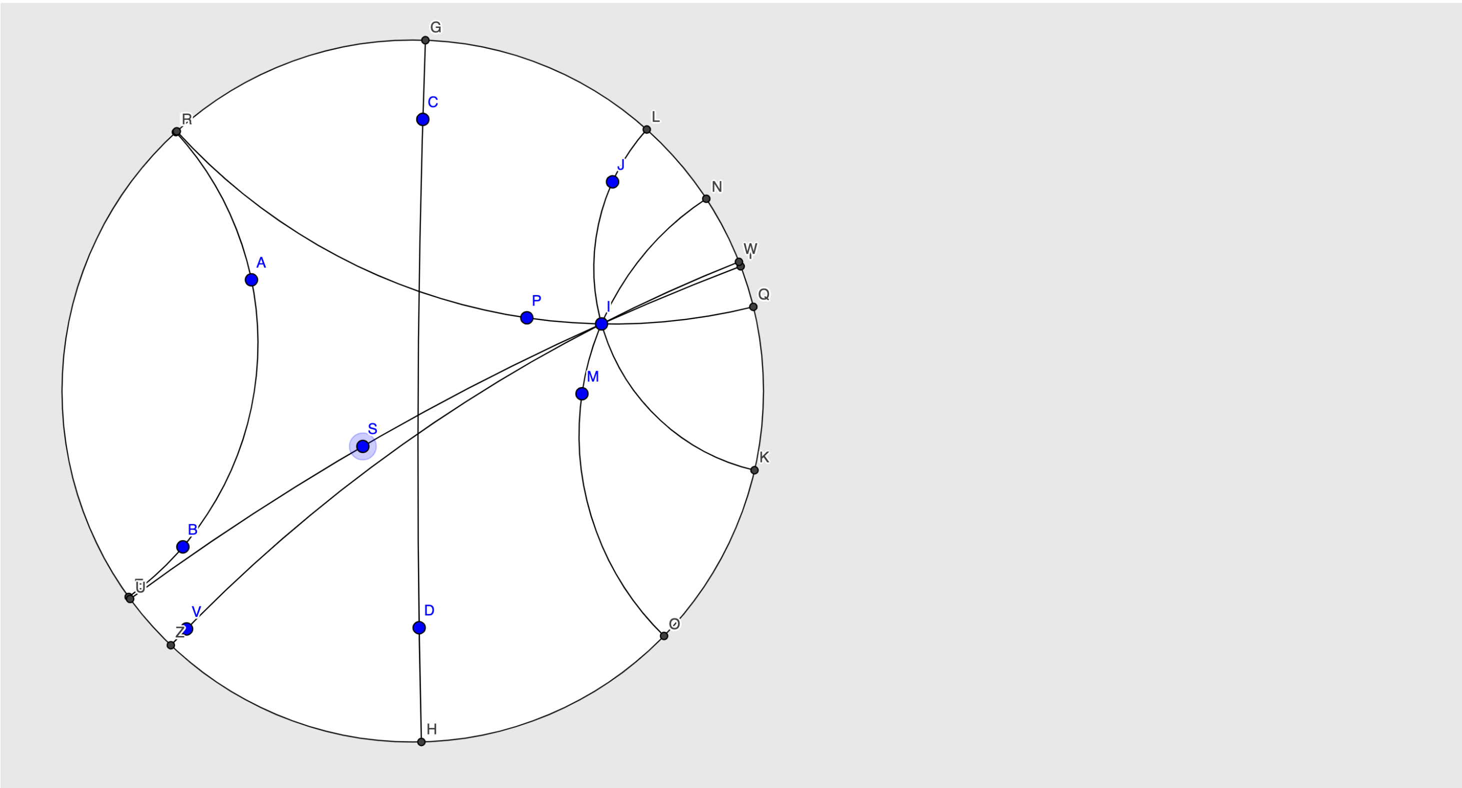
$$\ell = \{(x, mx + n) : \ m, n \in \mathbb{R}\}.$$

Ένα σημείο ανήκει στην ευθεία αν ανήκει ως στοιχείο της. Ένα σημείο βρίσκεται μεταξύ δυο άλλων ορίζεται με προφανή τρόπο, ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να ορισθεί χρησιμοποιώντας μήκη. Το ίδιο μπορεί να γίνει και για την ισότητα γωνιών. Δυο ευθείες είναι παράλληλες αν η τομή τους είναι κενή. Μ' αυτά τα δεδομένα έχουμε ένα μοντέλο τηε Ευκλείδειας Γεωμετρίας, το Καρτεσιανό Μοντέλο.

Τώρα θα δώσουμε ένα μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας:

- Σημεία είναι τα σημεία στο εσωτερικού ενός δίσκου.
- Ευθείες είναι τόξα κύκλων που είναι κάθετοι στον οριακό κύκλο.

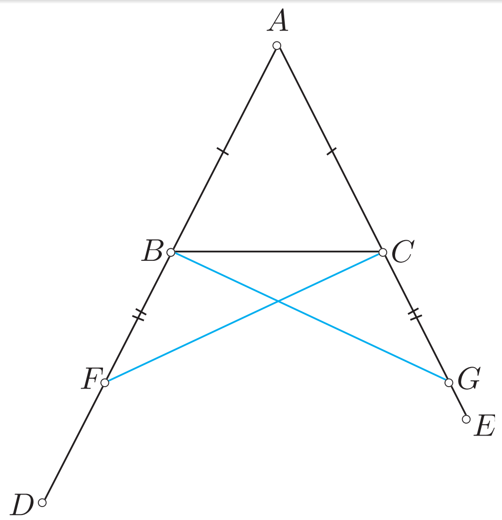
Η διάταξη σημείων πάνω στην ευθεία έχει προφανή ορισμό. Η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται έτσι ώστε οι ευθείες να έχουν άπειρο μήκος. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτό το μοντέλο αυτό ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη, ΕΚΤΟΣ του αξιώματος παραλληλίας.


G
C
R
L
J
N
W
Q
A
P
I
M
K
S
B
U
V
Z
D
O
H

Τρίγωνα

Ισοσκελή Τρίγωνα

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, και, αν προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές, οι γωνίες κάτω από την βάση θα είναι επίσης ίσες μεταξύ τους.



Έστω $\triangle ABC$ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο, με $\overline{AB} = \overline{AC}$.Μπορούμε να προεκτείνουμε το $\overline{AB}$ έως το D και το $\overline{AC}$ εως το E. Επιλέγουμε ένα σημείο F στο $\overline{BD}$. Υποθέτοντας οτι $\overline{AE} > \overline{AF}$, μπορούμε να αφαιρέσουμε τμήμα $\overline{AG} = \overline{AF}$. Αν $\overline{AE} \leq \overline{AF}$, τότε προεκτείνουμε το $\overline{AE}$ αρχικά και στην συνέχεια να επιλέξουμε τμήμα $\overline{AG} = \overline{AF}$.
Φέρουμε τα $\overline{FC}$ και $\overline{BG}$. Εφόσον $\measuredangle A = \measuredangle A$, θα ισχύει οτι $\triangle FAC \cong \triangle GAB$ από το Κριτήριο ΠΓΠ. Επομένως, έχουμε $\overline{CF} = \overline{BG}$, $\measuredangle AFC = \measuredangle AGB$, και $\measuredangle ABG = \measuredangle ACF$ ως συνέπεια του ορισμού ισότητας τριγώνων.
Έτσι έχουμε,

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \overline{AG} - \overline{AC} = \overline{CG}.$$

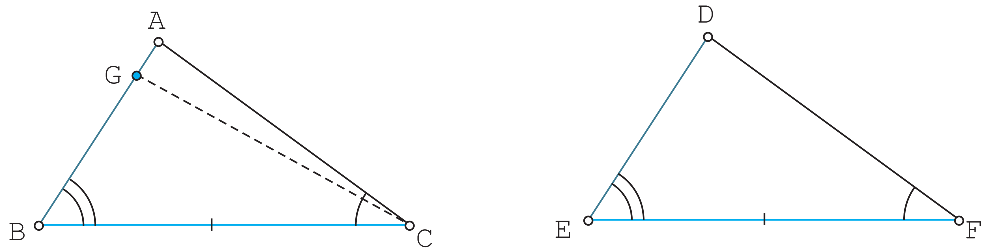
Οπότε, $\triangle BFC \cong \triangle CGB$ από το ΠΓΠ, και έτσι $\measuredangle FBC = \measuredangle GCB$, και $\measuredangle BCF = \measuredangle CBG$. Τελικά,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABG - \measuredangle CBG = \measuredangle ACF - \measuredangle BCF = \measuredangle ACB.$$

$\square$

ΓΠΓ

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες του πρώτου τριγώνου ίσες με δυο γωνίες του δεύτερου τριγώνου αντίστοιχα, και μια πλευρά του πρώτου τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά του δεύτερου τριγώνου με τις δυο γωνίες προσκείμενες σε αυτή τότε τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.

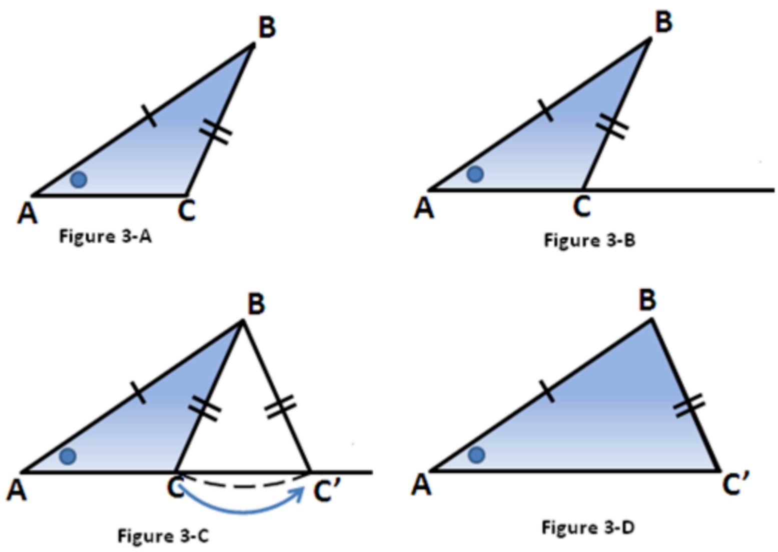


Θεωρούμε τα τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle DEF$ με $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$, και $\overline{BC} = \overline{EF}$.
Υποθέτουμε οτι $\overline{AB} \neq \overline{DE}$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\overline{AB} > \overline{DE}$ και στην συνέχεια επιλέγουμε $\overline{BG} = \overline{ED}$.
Φέρουμε το $\overline{GC}$ και παρατηρούμε οτι $\measuredangle ACB > \measuredangle GCB$. Από το ΠΓΠ, $\triangle GBC \cong \triangle DEF$, και έτσι $\measuredangle GCB = \measuredangle DFE$. Άρα, $\measuredangle GCB = \measuredangle ACB$, που είναι μια αντίφαση. Επομένως, πρέπει να ισχύει $\overline{AB} = \overline{DE}$ και έτσι $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ από το ΠΓΠ.

Επίσης ισχύει:

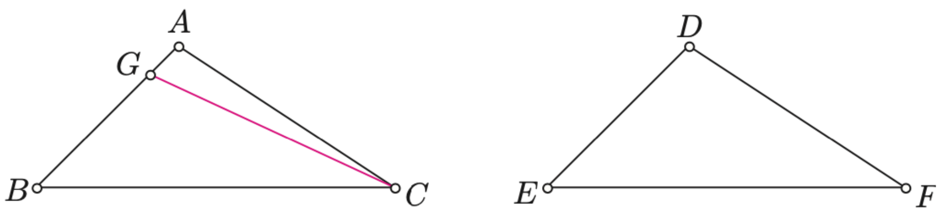
1. ΠΠΠ
2. ΓΓΠ

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ: ΠΠΓ



ΓΓΠ

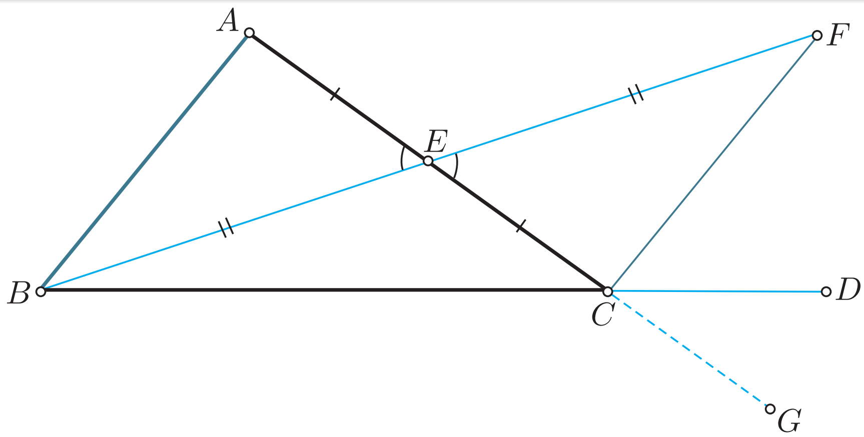
Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες του πρώτου τριγώνου ίσες με δυο γωνίες του δεύτερου τριγώνου αντίστοιχα, και μια πλευρά του πρώτου τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά του δεύτερου τριγώνου με μια από τις ίσες γωνίες να βρίσκεται απέναντί της, τότε τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.



Από την υπόθεση, έχουμε ότι $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$ και $\overline{BC} = \overline{EF}$. Αν $\overline{AB} = \overline{DE}$, τότε $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ από το ΠΓΠ. Αν $\overline{AB} \neq \overline{DE}$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\overline{AB} > \overline{DE}$. Επιλέγουμε G στο $\overline{AB}$ έτσι ώστε $\overline{AG} = \overline{DE}$. Τότε, από το ΠΓΠ, $\triangle GBC \cong \triangle DEF$ και επομένως $\measuredangle BGC = \measuredangle EDF$. Από το Θεώρημα Εξωτερικής Γωνίας, $\measuredangle BGC = \measuredangle BAC$, άτοπο γιατί $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$ από την υπόθεση. Άρα $\overline{AB} = \overline{DE}$ και ολοκληρώσαμε την απόδειξη.

Ασθενές Θεώρημα Εξωτερικής Γωνίας

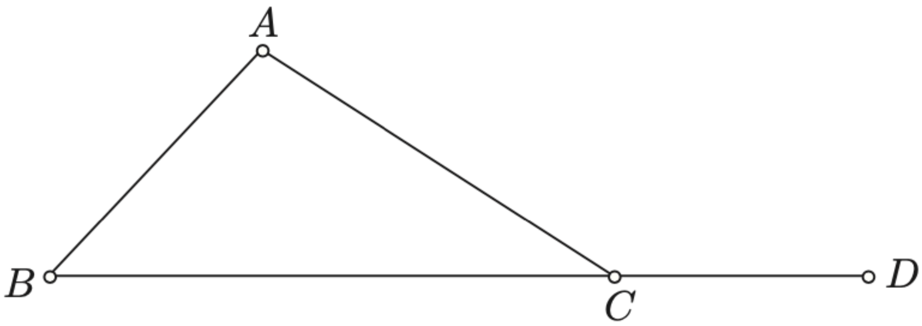
Σε κάθε τρίγωνο, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι εσωτερικές γωνίες.



Έστω $\triangle ABC$ είναι ένα τρίγωνα και με το D στην προέκταση της πλευράς $\overline{BC}$ ώστε να ισχύει $B - C - D$. Μια εξωτερική γωνία του τριγώνου είναι η $\measuredangle ACD$. Έστω E είναι το μέσο της $\overline{AC}$. Φέρουμε το $\overline{BE}$ και στην προέκτασή του επιλέγουμε σημείο F τέτοιο ώστε $B - E - F$ και $\overline{EF} = \overline{BE}$. Στην συνέχεια φέρουμε το $\overline{FC}$ και προεκτείνουμε το $\overline{AC}$ ως το G. Παρατηρήστε οτι $\overline{AE} = \overline{EC}$. Έχουμε $\measuredangle AEB = \measuredangle CEF$ (κατά κορυφή) και επομένως $\triangle AEB \cong \triangle CEF$ από το Κριτήριο ΠΓΠ. Οπότε, $\measuredangle BAC = \measuredangle ACF$. Επίσης παρατηρήστε οτι $\measuredangle ACD > \measuredangle ACF$ άρα και $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε οτι $\measuredangle BCG > \measuredangle ABC$, και από την στιγμή που ισχύει $\measuredangle BCG = \measuredangle ACD$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα οτι $\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$. □

Υπάρχει ένα κενό: $\measuredangle ACF < \measuredangle ACD$. Από τα Αξιώματα Διάταξης μπορούμε να δείξουμε ότι το σημείο F είναι εσωτερικό της γωνίας $\measuredangle ACD$ και συνεπώς έχουμε την ανισότητα.

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των μέτρων οποιονδήποτε δυο γωνιών του είναι μικρότερο των $180°$



Έχουμε

$$\measuredangle ACD + \measuredangle BCA = 180^\circ.$$

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα

$$180^\circ = \measuredangle ACD + \measuredangle BCA > \measuredangle BAC + \measuredangle BCA.$$

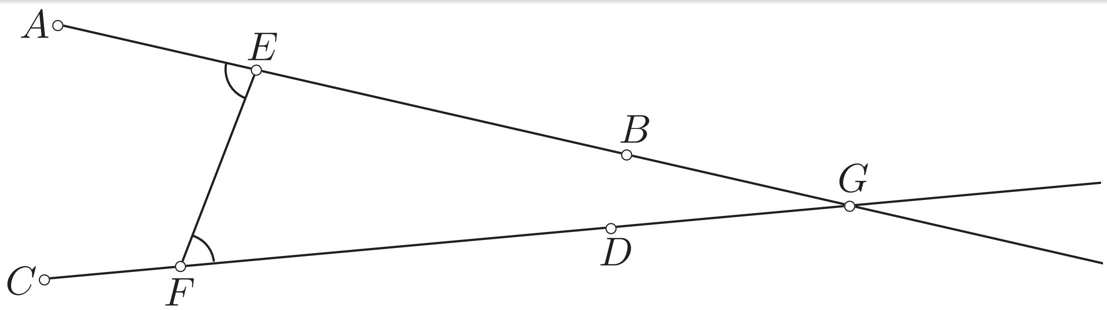
Σχόλια στο άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

1. (Saccheri-Legendre]) Στην ουδέτερη γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $\leq 180°$.
2. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180°$ αν και μόνο αν ισχύει το Αξίωμα της Παραλληλίας, δηλαδή αν είμαστε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.
3. Πιο γενικά ισχύει, υπάρχει ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών $180°$ αν και μόνο αν ισχύει το Αξίωμα της Παραλληλίας.
4. Στην υπερβολική γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι $< 180°$.

Στις επόμενες προτάσεις δίνονται κριτήρια για να μπορούμε να προσδιορίσουμε πότε δυο ευθείες είναι παράλληλες.

Πρόταση I.27.

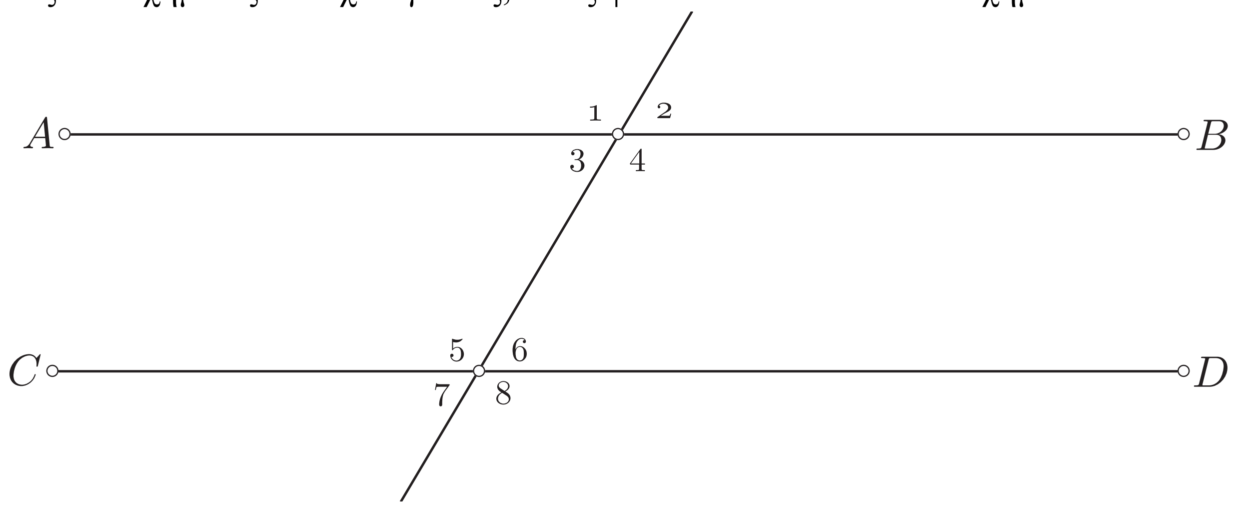
Αν δυο ευθείες τέμνουν την τέμνουσά τους με τέτοιο τρόπο ώστε οι εντός εναλλάξ γωνίες να είναι ίσες, τότε οι δυο αρχικές ευθείες είναι παράλληλες.



Απόδειξη:

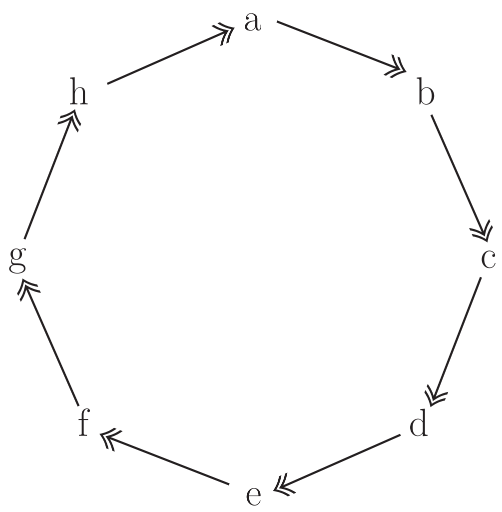
Έστω δυο ευθείες AB και CD και έστω η τέμνουσα EF τέμνει την AB στο E και την CD στο F έτσι ώστε $\measuredangle AEF = \measuredangle EFD$. Υποθέτουμε οτι οι ευθείες AB και CD τέμνονται σε κάποιο σημείο G στην κατεύθυνση του B. Τότε θα ισχύει $\measuredangle AEF > \measuredangle EFG$, και εφόσον η γωνία $\measuredangle AEF$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\triangle EFG$, αντίφαση με το Ασθενές Θεώρημα Εξωτερικής Γωνίας. Άρα, η AB δεν μπορεί να τέμνει την CD από την πλευρά του σημείου B. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε πως η AB δεν τέμνει την CD ούτε από την πλευρά του A, οπότε ισχύει οτι η ευθεία AB είναι παράλληλη της CD.

Η Πρόταση I.28 δίνει διαφορετικές συνθήκες που καθορίζουν αν οι ευθείες είναι παράλληλες. Θα διερευνήσουμε τις σχέσεις μεταξύ όλων αυτών των συνθηκών στις γωνίες. Μια τέμνουσα τέμνει δυο ευθείες και σχηματίζουν οχτώ γωνίες, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Στην Πρόταση Ι.27, ο Ευκλείδης απέδειξε πως αν $\measuredangle 3 = \measuredangle 6$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Παρέλειψε να δείξει οτι η ισότητα του άλλου ζευγαριού των εντός εναλλάξ γωνιών, $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$, επίσης συνεπάγεται παραλληλία, αν και αυτός είναι ο εύκολος τρόπος για να το δείξουμε. Όμοια, στην Πρόταση Ι.28 αποδεικνύει οτι αν $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες, αλλά αγνοεί τα άλλα τρία ζεύγη γωνιών που αποτελούνται από εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες. Επίσης αποδεικνύει στην Πρόταση Ι.28, πως όταν $\measuredangle 3 + \measuredangle 5 = 180°$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Από τις Προτάσεις Ι.27 και 28, υπάρχουν οχτώ σχέσεις μεταξύ γωνιών που συνεπάγονται παραλληλία. Μια ακόμη σημείωση: θα μπορούσαμε να δείξουμε «$a \implies b$», «$a \implies c$», «$a \implies d$», ..., «$b \implies a$», «$b \implies c$», ..., έως και το «$h \implies g$», για ένα σύνολο $8 \cdot 7 = 56$ ξεχωριστών αποδείξεων. Κάθε μια από αυτές είναι μόνο λίγες γραμμές, αλλά υπάρχουν υπερβολικά πολλές. Ένας πιο αποδοτικός τρόπος για την απόδειξή μας είναι να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό επιχείρημα:



Με άλλα λόγια, θα αποδείξουμε, «$a \implies b$», «$b \implies c$», «$c \implies d$», …, «$g \implies h$», «$h \implies a$». Αυτή η μέθοδος περιλαμβάνει μόνο οκτώ διαφορετικές αποδείξεις. Αν για παράδειγμα χρειάζεται να δείξουμε οτι «$b \implies g$», η μέθοδος είναι να ακολουθήσουμε μια αλυσίδα στον κύκλο.

Παράλληλες

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα (δηλαδή, είτε είναι όλα αληθή είτε είναι όλα ψευδή):

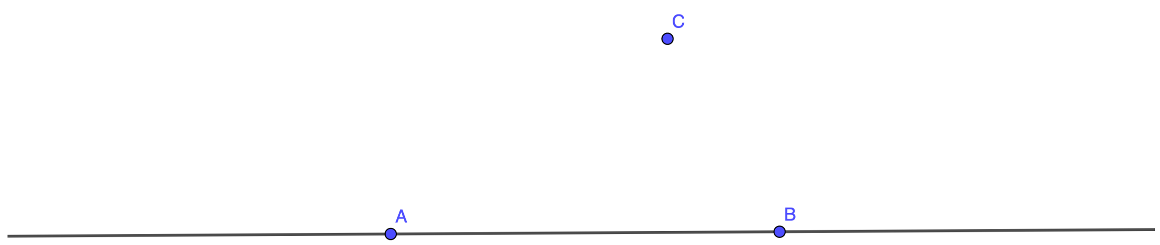
a. $\measuredangle 3 = \measuredangle 6$
b. $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$
c. $\measuredangle 1 = \measuredangle 5$
d. $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$
e. $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$
f. $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$
g. $\measuredangle 3 + \measuredangle 5 = 180^\circ$
h. $\measuredangle 4 + \measuredangle 6 = 180^\circ$

Πρόταση I.28.

Αν δυο ευθείες τέμνουν την τέμνουσά τους έτσι ώστε οι εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες να είναι ίσες ή το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά να είναι 180°, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Πρόταση Ι.31.

Μια μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ευθεία η οποία να διέρχεται από το σημείο και να είναι παράλληλη στην αρχική ευθεία.



Σε αυτό το σημείο, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν παράλληλες ευθείες και έχουμε παρουσιάσει οδηγίες για την κατασκευή τους. Επίσης έχουμε καθορίσει προϋποθέσεις οι οποίες, όταν πληρούνται, εξασφαλίζουν πως οι υπό εξέταση ευθείες είναι παράλληλες.
Να σημειώσουμε πως ο Ευκλείδης χειρίζεται το Αξίωμα 5 αρκετά διαφορετικά από τα υπόλοιπα αξιώματά του. Στις Προτάσεις Ι.1–28 (και 31) χρησιμοποιεί ελεύθερα όλα τα άλλα αξιώματα, αλλά φαίνεται να αποφεύγει να χρησιμοποιήσει το Αξίωμα των Παραλλήλων 5 όσο περισσότερο μπορεί. Είναι πολύ σημαντικό να το προσέξουμε αυτό, επειδή όταν ασχοληθούμε με μη-ευκλείδειες γεωμετρίες, θα πρέπει να απορρίψουμε το Αξίωμα Παραλληλίας 5 και να αποκηρύξουμε όλα τα παράγωγά του. Αυτή η αντιμετώπιση αποτελεί ένδειξη για τον σημαντικό ρόλο που το Αξίωμα των Παραλλήλων έχει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, Επίσης αντιμετώπιση αυτή ήταν αιτία για την καχυποψία με την οποία αντιμετωπίστηκε το Αξίωμα Παραλληλίας 5 για χιλιετίες.

Επομένως το Αξίωμα Παραλληλίας 5 υποστηρίζει πως αν, για παράδειγμα, $\measuredangle 3 + \measuredangle 5 < 180°$, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες. Ας αναλύσουμε λίγο περισσότερο την λογική δομή των Προτάσεων I.27 και I.28 και του Αξιώματος Παραλληλίας 5. Γνωρίζουμε πως αν ένα ζεύγος εντός εναλλάξ γωνιών έχει άθροισμα μικρότερο των $180°$, όπως στο Αξίωμα Παραλληλίας 5, τότε και οι υπόλοιπες σχέσεις μεταξύ των γωνιών θα πάψουν ισχύουν. Αν έχουμε δύο ευθείες και την τέμνουσά τους, θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις ως προτάσεις λογικής:

P: Μια (και επομένως όλες) οι σχέσεις μεταξύ των γωνιών είναι ψευδείς.

Q: Οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.

- $P \Longrightarrow Q$: *Αν οποιαδήποτε από τις σχέσεις μεταξύ γωνιών είναι ψευδής,τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.* Η πρόταση αυτή είναι ουσιαστικά το Αξίωμα Παραλληλίας 5.
- $\sim Q \Longrightarrow \sim P$: *Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε όλες οι σχέσεις μεταξύ των γωνιών είναι αληθείς.* Αυτό είναι το αντιθετοαντίστροφο της αρχικής δήλωσης και επομένως είναι ισοδύναμο με την αρχική δήλωση, το Αξίωμα Παραλληλίας 5. Παρακάτω, αυτό είναι η Πρόταση I.29, το επόμενο θεώρημα και το πρώτο του οποίου η ισχύ εξαρτάται από το Αξίωμα Παραλληλίας 5.
- $Q \Longrightarrow P$: *Αν οι δυο ευθείες δεν είναι παράλληλες, τότε καμία από τις σχέσεις μεταξύ των γωνιών δεν ισχύει.* Αυτό είναι το αντίστροφο του Αξιώματος Παραλλήλων 5, και μπορεί να παραφραστεί ως *Αν τρεις ευθείες σχηματίζουν ένα τρίγωνο, τότε δεν ισχύει καμία από τις σχέσεις μεταξύ των γωνιών.* Πιο συγκεκριμένα, η εξωτερική του γωνία δεν μπορεί να είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία (Πρόταση I.16) και το άθροισμα δυο οποιωνδήποτε εσωτερικών γωνιών δεν θα είναι ίσο με $180°$ (Πρόταση I.17).
- $\sim P \Longrightarrow \sim Q$: *Αν οποιαδήποτε από τις σχέσεις μεταξύ των γωνιών είναι αληθής, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.* Αυτό είναι το αντίστροφο και είναι λογικά ισοδύναμο με το αντίθετο. Αυτή η πρόταση είναι απλώς μια επαναδιατύπωση του συνδυασμού των Προτάσεων I.27 και I.28.

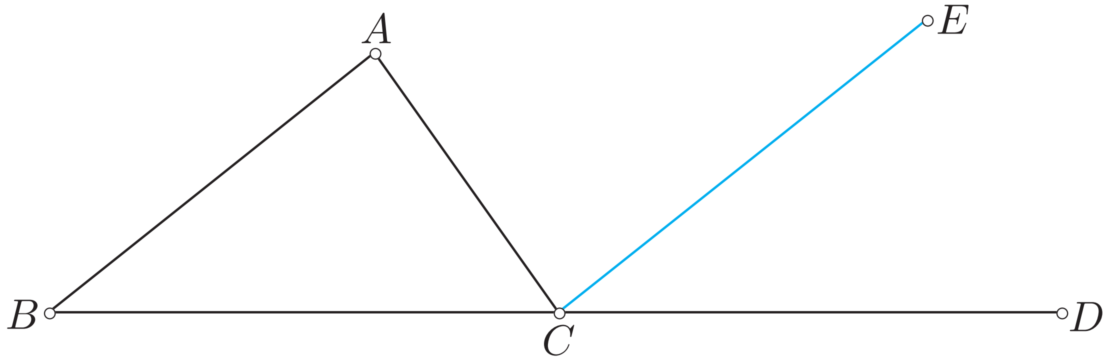
Πρόταση I.29.

Αν δυο παράλληλες τέμνονται από την τέμνουσά τους, τότε οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες, κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με την απέναντι εντός και επί τα αυτά και το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι 180°.

Όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, η πρόταση είναι μια άμεση λογική συνέπεια του Αξιώματος Παραλληλίας 5. Έτσι, η Πρόταση I.29 συνεπάγεται ότι αν οποιαδήποτε από τις σχέσεις γωνιών δεν ισχύει, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες. Είναι εύκολο να συγχέουμε τις Προτάσεις I.27-28 και I.29. Να υπενθυμίσουμε, πως οι Προτάσεις I.27 και I.28 (οι οποίες δεν εξαρτώνται από το Αξίωμα Παραλληλίας 5) αναφέρουν πως αν ισχύει οποιαδήποτε από τις σχέσεις μεταξύ των γωνιών, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Η Πρόταση I.29 (η οποία εξαρτάται από το Αξίωμα Παραλληλίας 5) αναφέρει πως αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε όλες οι σχέσεις μεταξύ των γωνιών είναι αληθείς.

Θεώρημα Εξωτερικής Γωνίας

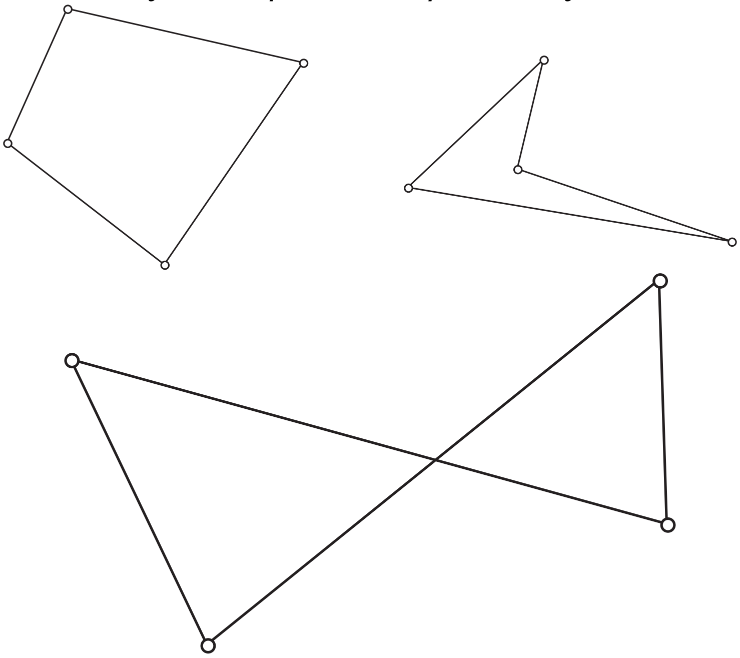
Σε κάθε τρίγωνο, η εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι δυο εσωτερικών γωνιών. Το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών είναι $180°$.



Απόδειξη:

Δίνεται τρίγωνο $\triangle ABC$ με την πλευρά του $\overline{BC}$ να προεκτείνεται στο σημείο D. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση I.31 για να φέρετε την παράλληλη $CE||AB$. Από την Πρόταση I.16, προκύπτει οτι $\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$. Από την Πρόταση I.29, και αφού η CE είναι παράλληλη στην AB, $\measuredangle ECD = \measuredangle ABC$. Επομένως, $\measuredangle ACD > \measuredangle ECD$ άρα το σημείο E βρίσκεται στο εσωτερικό της $\measuredangle ACD$ όπως και στο σχήμα. Από την Πρόταση I.29, γνωρίζουμε επίσης οτι $\measuredangle BAC = \measuredangle ACE$. Παρατηρείστε οτι $\measuredangle ACD = \measuredangle ACE + \measuredangle ECD$. Επομένως, $\measuredangle ACD = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC$. Από την Πρόταση I.13, έχουμε τελικά οτι $\measuredangle BCA + \measuredangle ACD = 180°$, και έτσι $\measuredangle BCA + \measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 180°$.

Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών οποιουδήποτε τετραπλεύρου είναι 360°. Να επιβεβαιώσετε πως η απόδειξή σας ισχύει και στις δυο παρακάτω περιπτώσεις:



Να βρείτε τον τύπο που δίνει το άθροισμα των μέτρων των εσωτερικών γωνιών κάθε κυρτού n-γώνου , και να αποδείξετε πως ο τύπος αυτός ισχύει.

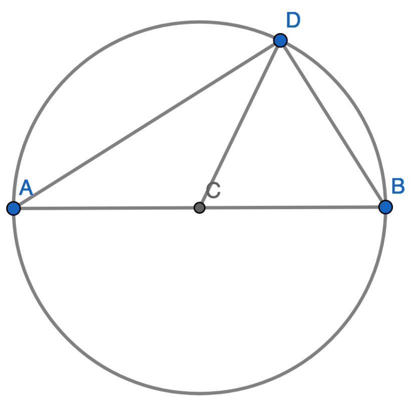
Να βρείτε τον τύπο που δίνει το μέτρο γωνίας ενός κανονικού n-γώνου, στο οποίο όλες οι πλευρές είναι ίσες και όλες οι γωνίες έχουν ίσα μέτρα.
Να βρείτε τον τύπο που δίνει το άθροισμα των μέτρων των εξωτερικών γωνιών (που δημιουργούνται προεκτείνοντας κάθε πλευρά) κάθε κυρτού n-γώνου, και να αποδείξετε πως αυτός ο τύπος ισχύει.

Το Θεώρημα του Θαλή

Η φήμη του Θαλή ως πατέρα της Γεωμετρίας βασίζεται μερικώς στην απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος.

Το Θεώρημα του Θαλή

Μια γωνία εγγεγραμμένη σε ένα ημικύκλιο είναι ορθή.



Έχουμε ότι:

$$\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD}$$

ως ακτίνες του κύκλου. Συνεπώς τα τρίγωνα $\triangle CAD$ και $\triangle CBD$ είναι ισοσκελή. Συνεπώς

$$\measuredangle CDA = \measuredangle CAD, \quad \measuredangle CDB = \measuredangle CBD.$$

Αλλά από το τρίγωνο $\triangle ADB$ έχουμε

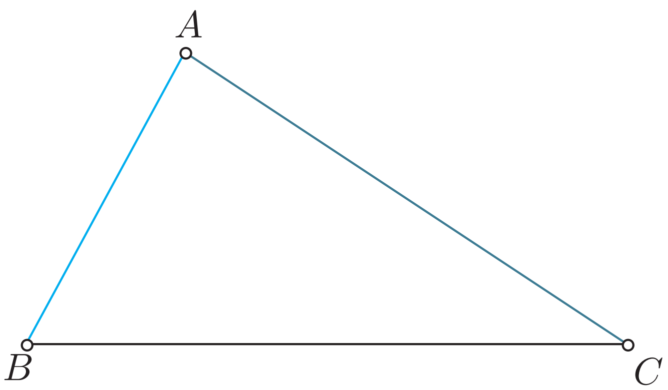
$$\begin{aligned} 180^\circ &= \measuredangle BDA + \measuredangle DAC + \measuredangle DBC = \measuredangle BDA + \measuredangle CDA + \measuredangle CDB \\ &= 2\measuredangle BDA \Rightarrow \measuredangle BDA = 90^\circ. \end{aligned}$$

Ομοιότητα

Ο ορισμός της ομοιότητας ακολουθεί το μοντέλο του ορισμού των ισοδύναμων τριγώνων, αντικαθιστώντας την αναλογία στην θέση της ισότητας για τα μήκη των πλευρών. Όπως και στην περίπτωση της ισοδυναμίας, ο σκοπός μας είναι να βρούμε ευκολότερους τρόπους να αποδείξουμε ομοιότητα όπως τα ΠΓΠ, ΠΠΠ, ΓΓΠ, και ΓΠΓ.
Η ομοιότητα είναι μια έννοια που υπάρχει μόνο στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Στην Υπερβολική Γεωμετρία ότι όμοια αλλά μη ισοδύναμα τρίγωνα δεν υπάρχουν. Τα όμοια τρίγωνα αποτελούν μια γεωμετρική αναπαράσταση της θεωρίας των αναλογιών και των πηλίκων.

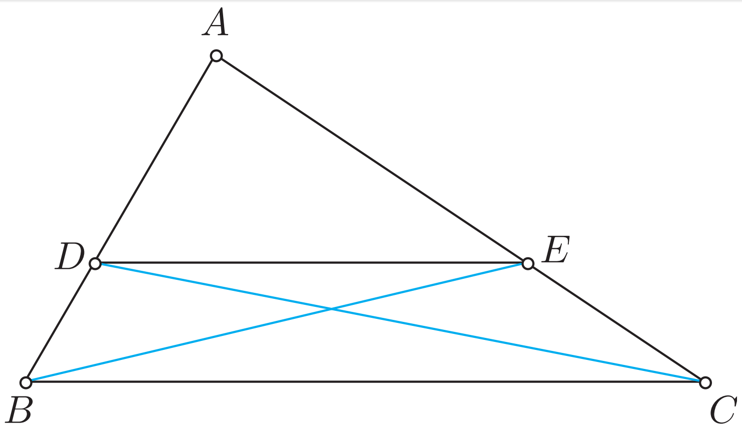
Όμοια Τρίγωνα

Δυο τρίγωνα είναι *όμοια* εάν οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες και αν οι πλευρές είναι ανάλογες. Αυτό σημαίνει ότι τα τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle DEF$ είναι όμοια, και συμβολίζεται με $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, όταν $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$, $\measuredangle C = \measuredangle F$, και $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$.


A
B
C
D
E
F

Θεώρημα

Εάν ένα τρίγωνο τέμνεται από μια ευθεία παράλληλη με μια από τις πλευρές, τότε αυτή η ευθεία χωρίζει τις δυο πλευρές σε ανάλογα τμήματα.



Απόδειξη: Δίνεται ότι το τρίγωνο $\triangle ABC$ τέμνεται από την ευθεία $DE \| BC$. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{BE}$ και $\overline{CD}$. Εξετάζουμε τα εμβαδά:

$$\frac{2A(\triangle ADE)}{2A(\triangle BDE)} = \frac{h\overline{AD}}{h\overline{BD}} \Rightarrow \frac{2A(\triangle ADE)}{2A(\triangle BDE)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

όπου h είναι το ύψος, δηλαδή το κοινό κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το E στην AB. Όμοια

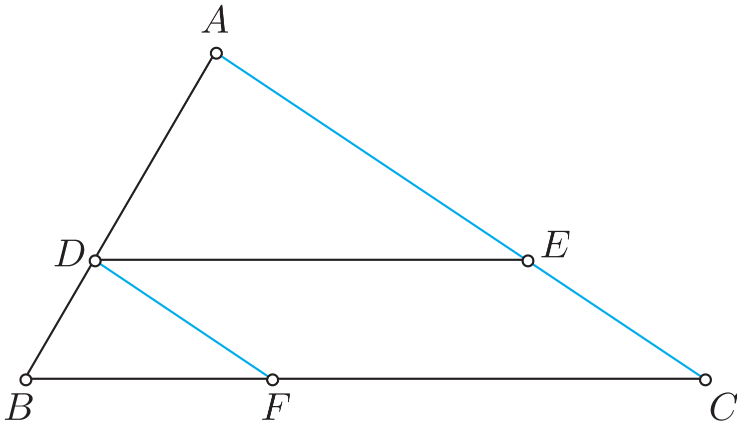
$$\frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle CDE)} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}.$$

Επίσης $A(\triangle BDE) = A(\triangle CDE)$, γιατί έχουν την ίδια βάση και τα ύψη είναι ίσα. Άρα,

$$\frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle BDE)} = \frac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle CDE)} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$$

Πόρισμα

Εάν ένα τρίγωνο τέμνεται από μια ευθεία παράλληλη με μια από τις πλευρές του, τότε το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι όμοιο με το αρχικό.



Απόδειξη: Έχουμε ότι το τρίγωνο $\triangle ABC$ τέμνεται από $DE \| BC$. Έχουμε $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$ και $\measuredangle AED = \measuredangle ACB$ και από το προηγούμενο θεώρημα, $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. Παίρνοντας αντίστροφα έχουμε $\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$ και έτσι

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}.$$

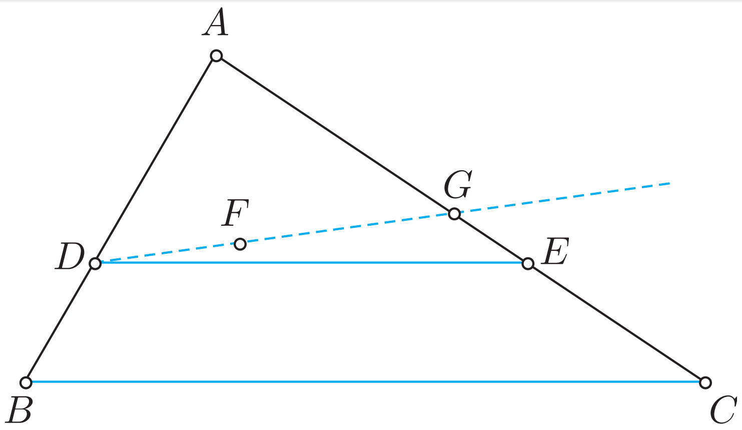
Τώρα φέρουμε την $DF \| AC$ και όμοια συμπεραίνουμε ότι $\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}$. Συνεπώς

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} + \frac{\overline{FC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}.$$

Παρατηρούμε ότι το $DFCE$ είναι ένα παραλληλόγραμμο και έτσι $\overline{DE} = \overline{FC}$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, έχουμε $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, και συμπεραίνουμε ότι $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Θεώρημα

Αν μια ευθεία που τέμνει ένα τρίγωνο, χωρίζει τις πλευρές του σε τμήματα ανάλογα, τότε είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά.



Απόδειξη: Δίνεται ότι το τρίγωνο $\triangle ABC$ τέμνεται από την $\overline{DE}$ έτσι ώστε $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$. Όπως και πριν, λίγοι αλγεβρικοί υπολογισμοί δίνουν ότι $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$. Ας υποθέσουμε ότι η DE *δεν* είναι παράλληλη της BC. Φέρουμε $DF \| BC$. Η DF τέμνει την AC σε κάποιο σημείο G.
Από το προηγούμενο θεώρημα, και την υπόθεση,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{GC}} \Rightarrow \overline{EC} = \overline{GC}$$

άτοπο, εκτός αν $G = C$ και $DE \| BC$.

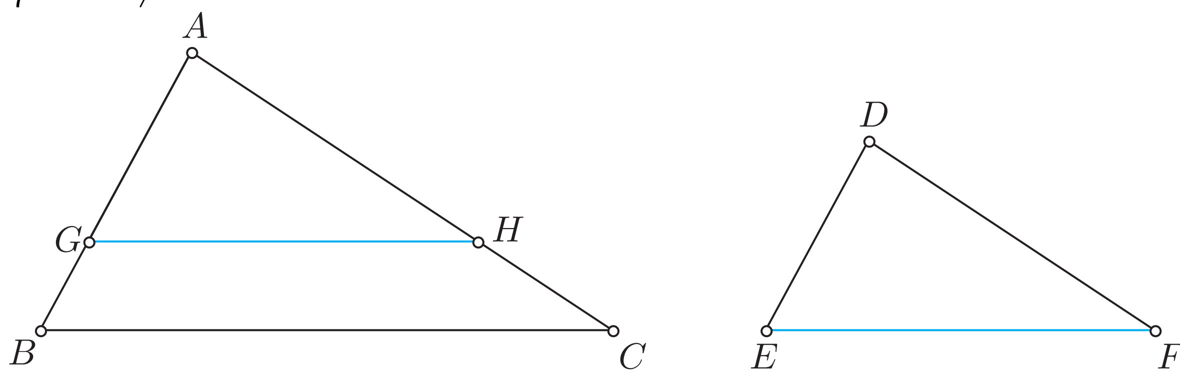
ΓΓΓ Ομοιότητα

Εάν δυο τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες, τότε είναι όμοια.

Απόδειξη: Δίνονται δυο τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle DEF$ με $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$, και $\measuredangle C = \measuredangle F$. Θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\overline{AB} = \overline{DE}$: Σ' αυτήν την περίπτωση $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ από το ΓΠΓ και έτσι $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Περίπτωση 2: $\overline{AB} \neq \overline{DE}$:



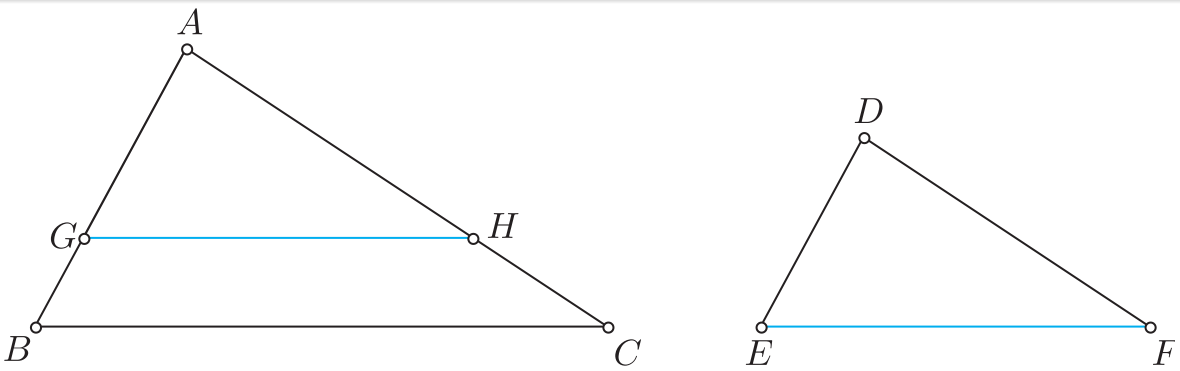
Σ' αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε, χωρίς τον περιορισμό της γενικότητας, ότι $\overline{AB} > \overline{DE}$. Κατασκευάζουμε $\overline{AG} = \overline{DE}$ και $\overline{AH} = \overline{DF}$ και φέρουμε το $\overline{GH}$. Τότε $\triangle AGH \cong \triangle DEF$ από το ΠΓΠ και έτσι $\measuredangle AGH = \measuredangle DEF = \measuredangle ABC$. Έχουμε ότι $GH \| BC$. Άρα $\triangle ABC \sim \triangle AGH$. Επομένως $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

ΓΓ Ομοιότητα

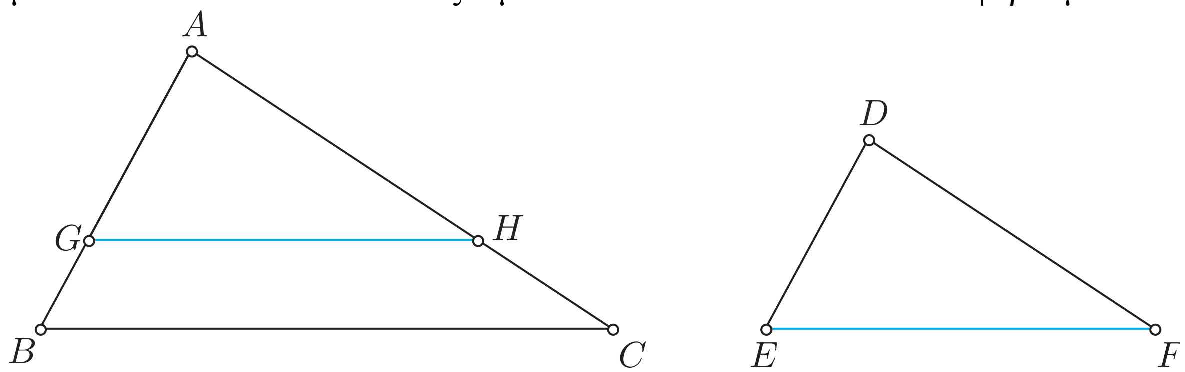
Εάν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

ΠΠΠ Ομοιότητα

Εάν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.



Έστω τα τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle DEF$ έχουν $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$. Και πάλι, αν $\overline{AB} = \overline{DE}$, τότε $\overline{AC} = \overline{DF}$ και $\overline{BC} = \overline{EF}$ και από ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα και συνεπώς όμοια. Υποθέτουμε ότι $\overline{AB} > \overline{DE}$. Κατασκευάζουμε $\overline{AG} = \overline{DE}$ και $\overline{AH} = \overline{DF}$ και φέρουμε το $\overline{GH}$.



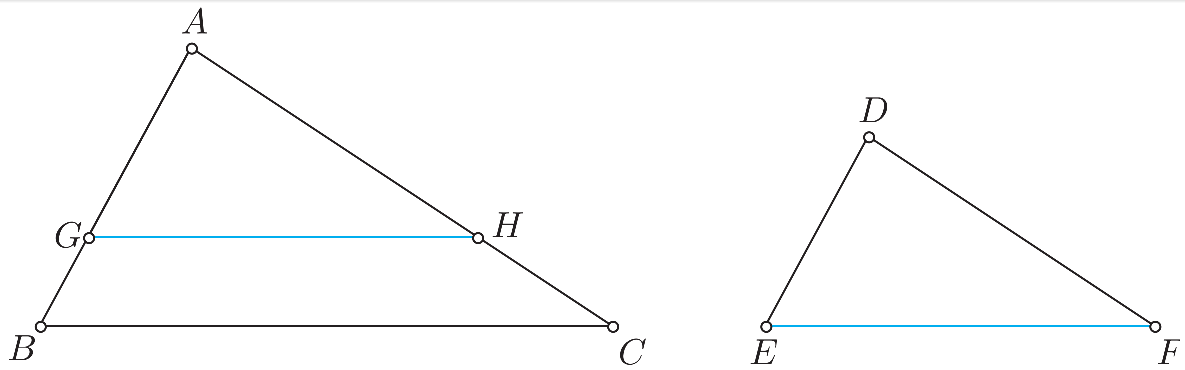
Δείξαμε ότι $GH \| BC$ και $\triangle ABC \sim \triangle AGH$. Άρα

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}}$$

Άρα έχουμε και $\overline{GH} = \overline{EF}$ και $\triangle DEF \cong \triangle AGH$, από το ΠΠΠ. Τελικά $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

ΠΓΠ Ομοιότητα

Δίνονται δυο τρίγωνα τέτοια ώστε μια γωνία στο πρώτο είναι ίση με μια γωνία στο δεύτερο και οι αντίστοιχες πλευρές που σχηματίζουν την γωνία είναι ανάλογες, τότε τα τρίγωνα είναι όμοια.



Έχουμε ότι για τα $\triangle ABC$ και $\triangle DEF$ με $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$. Υποθέτουμε ότι $\overline{AB} > \overline{DE}$. Κατασκευάζουμε $\overline{AG} = \overline{DE}$ και $\overline{AH} = \overline{DF}$ και φέρουμε το $\overline{GH}$, με $GH \| BC$ και $\triangle ABC \sim \triangle AGH$. Επίσης, από το ΠΓΠ, $\triangle DEF \cong \triangle AGH$. Άρα $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

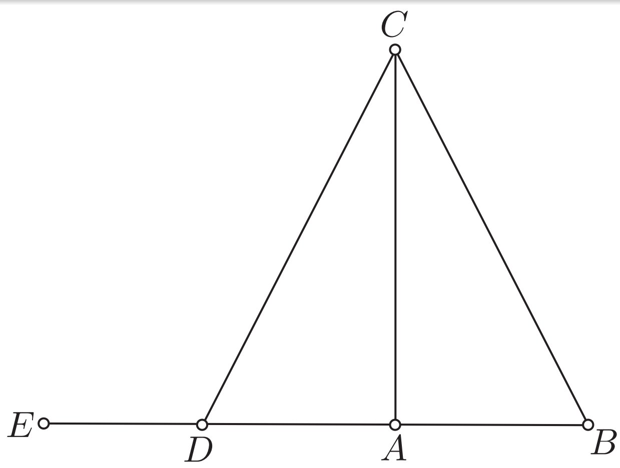
Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αποτελεί το αποκορύφωμα του Τόμου Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη. Σχεδόν όλα τα θεωρήματα στον Τόμο Ι συνεισφέρουν και είναι απαραίτητα στην απόδειξή του. Η απόδειξη του Ευκλείδη για αυτό το διάσημο θεώρημα δεν είναι η πιο ελκυστική ούτε η πιο ευνόητη, και πολύ πιθανόν να μην αποτελεί την αρχική απόδειξη που έδωσαν οι Πυθαγόρειοι, αλλά θα την συμπεριλάβουμε για ιστορικούς λόγους. Να σημειωθεί πως μερικές φορές, ο Ευκλείδης αντί να δίνει τις τέσσερις πλευρές του τετράπλευρου, θα το περιγράφει ως ένα τετράγωνο ή παραλληλόγραμμο και στην συνέχεια δίνει δυο διαγώνιες κορυφές. Αυτό είναι αρκετό για να κατανοήσουμε σε ποιο σχήμα αναφέρεται. Η πλευρά του τριγώνου που κείται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται *υποτείνουσα*.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο στη πλευρά που κείται απέναντι στην ορθή γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων στις πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία.

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο σε μια από τις πλευρές είναι ίσο με το άθροισμα των των τετραγώνων στις άλλες δυο πλευρές, τότε η γωνία που περιέχεται από αυτές τις δυο πλευρές είναι ορθή.

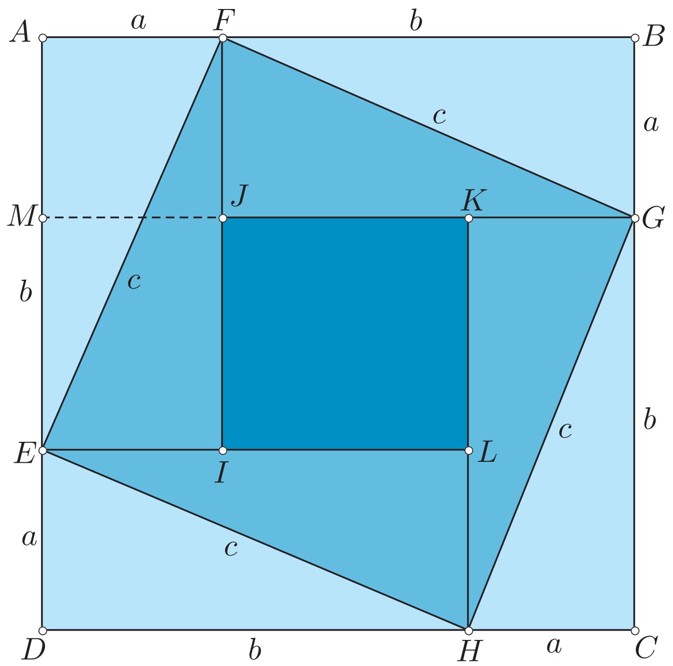


Απόδειξη:

Έστω τρίγωνο$\triangle ABC$ με $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. Πρέπει να δείξουμε οτι $\measuredangle CAB = 90^\circ$. Κατασκευάζουμε την κάθετη$AE \perp AC$ με το σημείο E στην πλευρά της CA απέναντι B. Επιλέγουμε τμήμα $\overline{AD} = \overline{AB}$ και φέρουμε $\overline{DC}$. Παρατηρείστε πως έχουμε $\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $\triangle CDA$, γνωρίζουμε οτι $\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$. Επομένως, $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2$ και έτσι $\overline{CD} = \overline{BC}$. Τελικά, $\triangle CAD \cong \triangle CAB$ από το ΠΠΠ και έτσι $\measuredangle CAD = \measuredangle CAB = 90^\circ$.

Αποδείξεις του Πυθαγόρειο Θεωρήματος

Απόδειξη #253: Η Κινέζικη Απόδειξη, περίπου. 500 B.C.:



Ένα τετράγωνο με πλευρά $a + b$ διαιρείται σε οχτώ αντίγραφα του τριγώνου μαζί με ένα εσωτερικό τετράγωνο. Παρατηρείστε πως το τρίγωνο έχει εμβαδόν $A(\triangle FBG) = \frac{1}{2}BF \cdot BG = \frac{1}{2}ab$. Επομένως το μεγάλο τετράγωνο μπορεί να θεωρηθεί πως έχει σχηματιστεί από τέσσερα αντίγραφα του τριγώνου μαζί με το τετράγωνο $FGHE$ οπότε έχει εμβαδόν

$$A(ABCD) = A(FGHE) + 4(\frac{1}{2}ab) = c^2 + 2ab$$

Εναλλακτικά, το τετράγωνο $ABCD$ μπορεί να θεωρηθεί πως σχηματίστηκε από τέσσερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και το τετράγωνο $IJKL$, και έτσι ισχύει

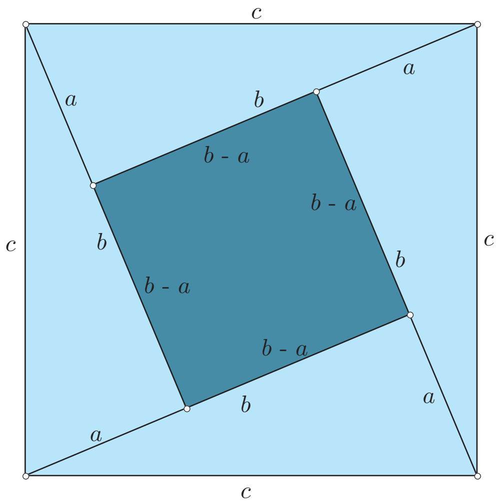
$$A(ABCD) = 4A(AFIE) + A(IJKL) = 4ab + (b - a)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Επομένως, $c^2 = a^2 + b^2$.

Απόδειξη #36: Bhaskara, περίπου. 1150μ.Χ., Ινδία:

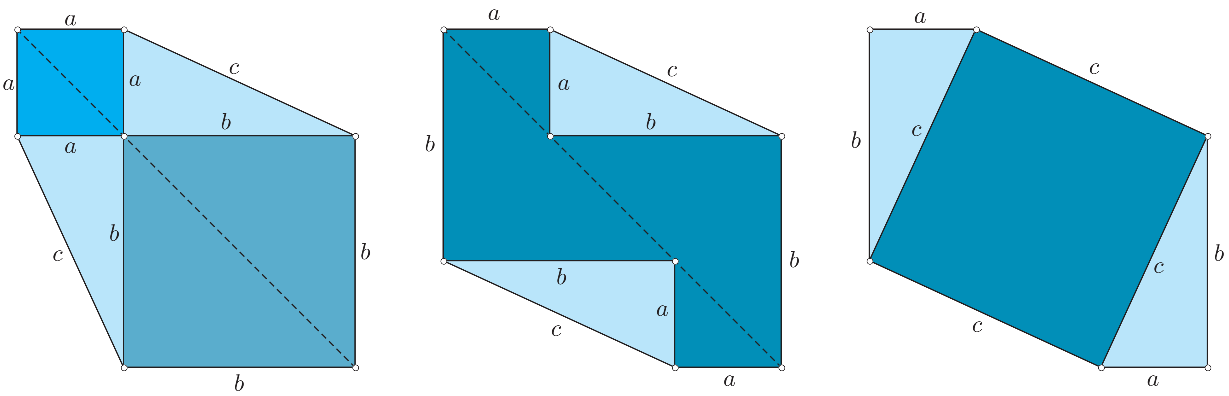
Το τετράγωνο πλευράς c διαιρείται σε τέσσερα αντίγραφα του τριγώνου μαζί με τα τετράγωνα των πλευρών $b - a$. Επομένως

$$c^2 = 4(\frac{1}{2}ab) + (b-a)^2 = 2ab + (b^2 - 2ab + a^2) = a^2 + b^2$$



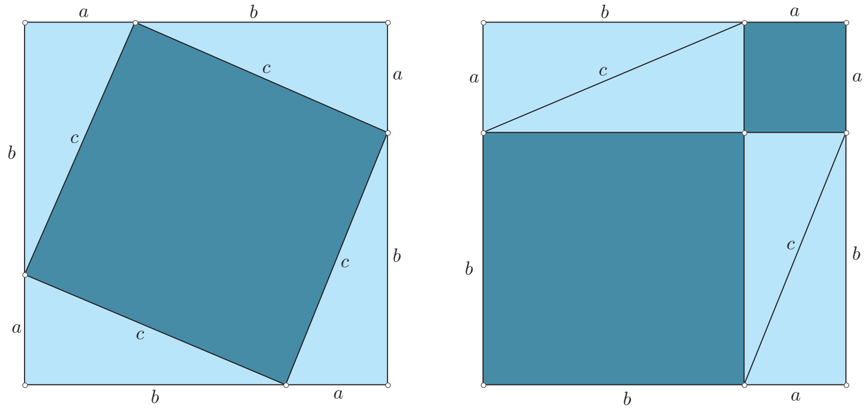
Απόδειξη #46: Leonardo da Vinci (1452–1519):

Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα το οποίο αποτελείται τετράγωνα των πλευρών a και b και δυο αντίγραφα του τριγώνου. Διαιρούμε το σχήμα κατά μήκος της διακεκομμένης γραμμής, ανακλούμε το κάτω κομμάτι και τα επανενώνουμε. Το νέο σχήμα μπορεί διαιρεθεί σε σε δυο αντίγραφα του τριγώνου και του τετραγώνου με πλευρές c. Επομένως $c^2 = a^2 + b^2$.



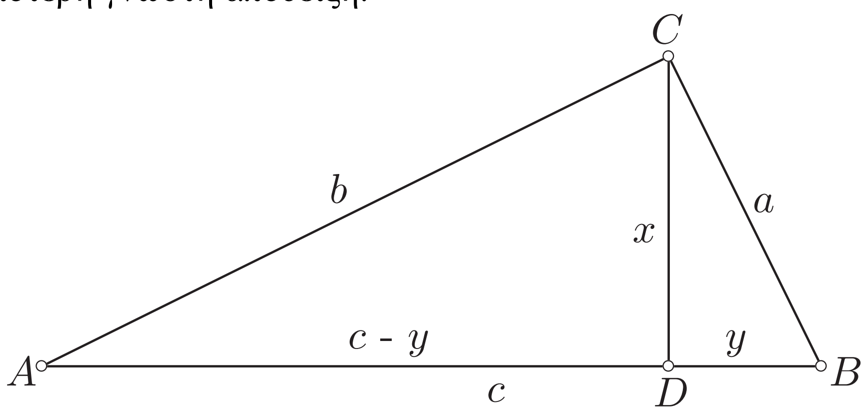
Απόδειξη #35: Rev. A. D. Wheeler 1809:

Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα, το οποίο αποτελείται από τα τρίγωνα με πλευρές a, b, και c με μια ορθή γωνία ανάμεσα στις πλευρές a και b. Παρατηρείστε πως το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι 180°, και έτσι σχηματίζουν μια ευθεία. Επομένως τέσσερα αντίγραφα του τριγώνου μαζί με ένα τετράγωνο πλευράς c σχηματίζουν ένα μεγαλύτερο τετράγωνο πλευράς $a + b$. Στο δεύτερο σχήμα, τέσσερα αντίγραφα του τριγώνου μαζί με δυο τετράγωνα πλευρών a και b σχηματίζουν ένα μεγαλύτερο τετράγωνο πλευράς $a + b$. Επομένως $c^2 = a^2 + b^2$.



Απόδειξη #1: Adrien Legendre 1858:

Αυτή είναι η συντομότερη γνωστή απόδειξη.



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, και $\overline{AB} = c$. Φέρουμε την κάθετη $CD \perp AB$, διαιρώντας την πλευρά $\overline{AB} = c$ σε μήκη $c - y$ και y. Έστω $x = \overline{CD}$. Παρατηρείστε οτι $\measuredangle A + \measuredangle B + 90^\circ = 180^\circ = \measuredangle A + \measuredangle ACD + 90^\circ$. Επομένως $\measuredangle ACD = \measuredangle B$. Ομοίως, $\measuredangle BCD = \measuredangle A$. Συνεπώς έχουμε τα όμοια τρίγωνα $\triangle BCD \sim \triangle CAD \sim \triangle BAC$. Σαν συνέπεια της ομοιότητας, έχουμε εννιά εξισώσεις με τις αναλογίες των πλευρών. Δυο από αυτές είναι:

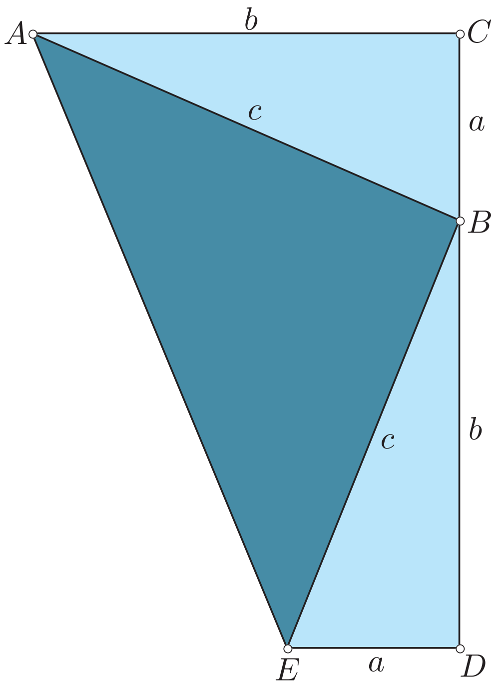
$$\frac{a}{y} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{b}{c-y} = \frac{c}{b}$$

και έτσι

$$a^2 = cy, \qquad b^2 = c^2 - cy$$

Τελικά, $b^2 = c^2 - a^2$.

Απόδειξη #231: Πρόεδρος των Η.Π.Α. James Garfield, 1876:



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABC για το οποίο ισχύει $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, και $\overline{AB} = c$. Προεκτείνουμε την $\overline{CB}$ ως το D έτσι ώστε $\overline{BD} = \overline{AC} = b$. Φέρουμε ευθεία που διέρχεται από το D και είναι παράλληλη στην AC την οποία διαιρούμε στο E έτσι ώστε $\overline{DE} = \overline{BC} = a$. Φέρουμε τις $\overline{BE}$ και $\overline{AE}$. Τότε το $ACDE$ είναι ένα τραπέζιο. Παρατηρείστε οτι $\measuredangle ABE = 90°$. Το εμβαδόν αυτού του τραπεζίου θα είναι

$$area = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{ED})\overline{CD} = \frac{1}{2}(b + a)(a + b) = \frac{1}{2}(a + b)^2$$

Όμως, το εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί και ως

$$A = A(\triangle ABC) + A(\triangle ABE) + A(\triangle BED)$$

$$Area = 2(\frac{1}{2}ab) + \frac{1}{2}c^2$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2}(a + b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2$$

και έτσι $c^2 = a^2 + b^2$.

Πυθαγόρειες Τριάδες

Τριάδες από ακέραιους a, b και c που ικανοποιούν την σχέση $a^2 + b^2 = c^2$ ονομάζονται *Πυθαγόρειες τριάδες*, επειδή ένα τρίγωνο με πλευρές που έχει μήκος a, b, και c πρέπει να είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο (με την ορθή γωνία να βρίσκεται απέναντι από την πλευρά c). Παραδείγματα τέτοιων τριάδων είναι 3-4-5 ή 5-12-13. Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν τουλάχιστον για την περίπτωση 3-4-5. Η Βαβυλωνιακή πλάκα με το όνομα PLIMPTON 322 η οποία χρονολογείται κάπου μεταξύ 1900 και 1600 π.Χ. έχει μια λίστα με 15 Πυθαγόρειες τριάδες (συμπεριλαμβανομένης και της τριάδας 13500-12709-18541). Δεν υπάρχουν ενδείξεις για το πως κατέληξαν σε αυτές τις τριάδες ή που τις χρησιμοποιούσαν, αν και η παρουσία μερικών αριθμών πολύ μεγάλου μεγέθους τείνει να υποστηρίξει την υπόθεση πως είχαν περισσότερο θεωρητική παρά πρακτική σημασία. Η πρώτη γνωστή απόδειξη ενός γενικού αλγόριθμου ο οποίος παράγει Πυθαγόρειες τριάδες είναι το Λήμμα 1 στην Πρόταση 29 του Τόμου X στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Έστω a, b και c μια Πυθαγόρεια τριάδα ακεραίων ($c^2 = a^2 + b^2$), χωρίς κοινό παράγοντα. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι, ο ένας πσριττός και ο άλλος άρτιος, m και n, $(m, n) = 1$, έτσι ώστε:

$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2, .$$

Επειδή οι αριθμοί δεν έχουν κοινό παράγοντα, τότε δεν μπορεί να είναι και οι τρεις άρτιοι. Επίσης, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι οι a και b δεν μπορεί να άρτιοι γιατί τότε και ο c θα ήταν άρτιος. Άρα ο ένας είναι περιττός (έστω ο a) και ο άλλος άρτιος (έστω ο $b = 2k$). Τότε ο c είναι περιττός.
Τότε $b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ με $c - a$ και $c + a$ άρτιοι (ως άθροισμα και διαφορά περιττών).

Τότε $(c-a, c+a) = 2$. Ο λόγος είναι ότι αν $(c-a, c+a) = d$

$$\left.\begin{array}{l} d/c-a \\ d/c+a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d/2c \\ d/2a \end{array}\right\}$$

Αν $d = 2d'$, και an $/d' > 1$, για p πρώτο, p/d', και

$$\left.\begin{array}{l} p/c \\ p/a \end{array}\right\} \Rightarrow p/c^2 - a^2 \Rightarrow p/b^2 \Rightarrow p/b.$$

Επομένως ο p είναι κοινός παράγοντας των a, b και c, άτοπο. Άρα $(c-a, c+a) = 2$ και

$$\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = 1.$$

Επίσης

$$b^2 = 4k^2 = (c-a)(c+a) \Rightarrow k^2 = \frac{c-a}{2}.\frac{c+a}{2}.$$

Επειδή η δεξιά πλευρά της ισότητας είναι τετράγωνο και το γινόμενο πρώτων μεταξύ τους αριθμών, ο κάθε αριθμός θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{c-a}{2} = m^2 \\ \dfrac{c+a}{2} = n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} c = m^2 + n^2 \\ a = m^2 - n^2 \end{array}\right\}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ο ένας πρέπει να είναι περιττός και ο άλλος άρτιος γιατί διαφορετικά ο a και ο c θα ήταν και οι δυο άρτιοι. Επίσης

$$b^2 = c^2 - a^2 = (m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 - m^4 + 2m^2n^2 - n^4 = 4m^2n^2.$$

Άρα $b = 2mn$.
Ισχύει $(m, n) = 1$ γιατί διαφορετικά ο κοινός παράγοντας των m και n θα ήταν κοινός παράγοντας των a, b και c, άτοπο. Έτσι ολοκληρώσαμε την κατασκευή των Πυθαγόρειων τριάδων.

Πυθαγόρειες Τριάδες

m	n	a	b	c
1	2	3	4	5
4	3	7	24	25
13	12	25	312	313
23	18	205	828	853
54	47	707	5076	5125
125	54	12709	13500	18541
354	275	49691	194700	200941
5347	4876	4815033	52143944	52365785
53477	48768	481471705	5215932672	5238107353