

Αριθμοί και Σχήματα

Στράτος Πρασίδης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

17 Ιανουαρίου 2023

Φυσικοί Αριθμοί

Ορίζουμε τους φυσικούς αριθμούς:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ιδιότητες:

- Δύο πράξεις ορίζονται και είναι κλειστές στους φυσικούς αριθμούς: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.
- Κάποιες φορές, η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται αλλά όχι πάντα:

$$3 - 2 = 1, \quad 2 - 3 \notin \mathbb{N}, \quad 6 : 3 = 2, \quad 5 : 2 \notin \mathbb{N}.$$

- Είναι αριθμοί όπου για κάθε έναν έχουμε τον επόμενό του. Ουσιαστικά ορίζονται από την πράξη $+1$ ξεκινώντας από το 0.

Από τον ορισμό τους, οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποιες, πιο τεχνικές, ιδιότητες:

- ① (Αρχή της Καλής Διάταξης) Κάθε υποσύνολο του \mathbb{N} έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
- ② (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής) Έστω $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n . Υποθέτουμε ότι
 - ① Για κάποιον φυσικό αριθμό n , η $P(k)$ αληθεύει.
 - ② Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n + 1)$ αληθεύει.

Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq k$.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Είναι πολύ χρήσιμες ιδιότητες στις αποδείξεις που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς ή που ανάγονται σε φυσικούς αριθμούς.

Παραστατικά:



Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη σκάλα και ξέρουμε δυο πράγματα:

- 1 Μπορούμε να ανεβούμε στο πρώτο σκαλοπάτι.
- 2 Εάν μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα σκαλοπάτι, τότε μπορούμε να ανεβούμε στο επόμενο.

Απ' αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να φτάσουμε σε κάθε σκαλοπάτι της σκάλας.

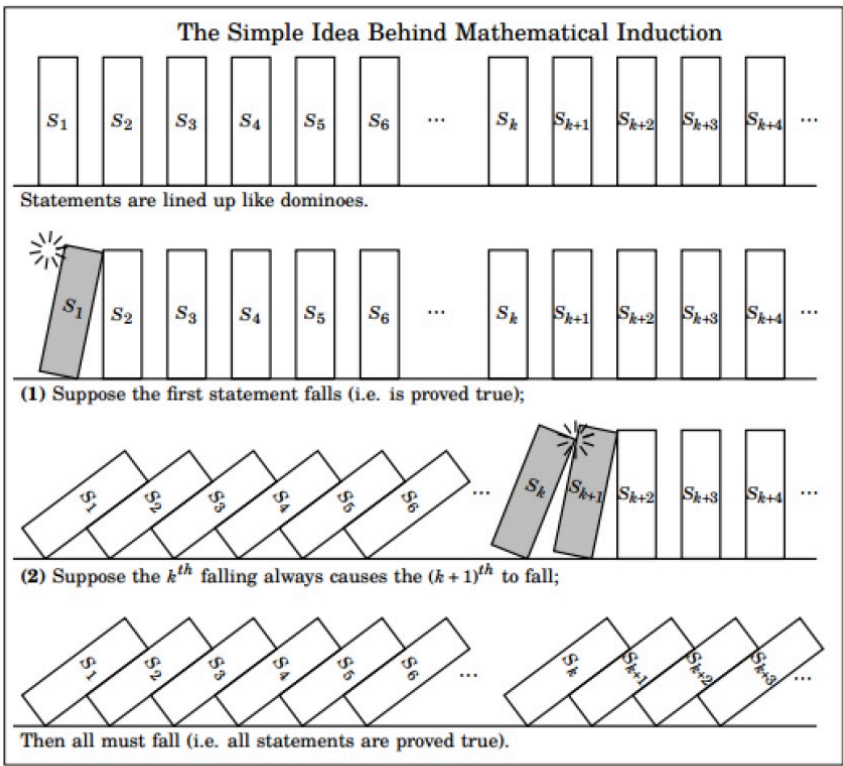
Με άλλον τρόπο:



Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη συλλογή από ντόμινο και ξέρουμε δυο πράγματα:

- 1 Υποθέτουμε ότι πέφτει το πρώτο ντόμινο.
- 2 Εάν πέσει κάποιο ντόμινο τότε θα πέσει και το επόμενο.

Απ' αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι όλα τα ντόμινο θα πέσουν.



Παραδείγματα Επαγωγής-1

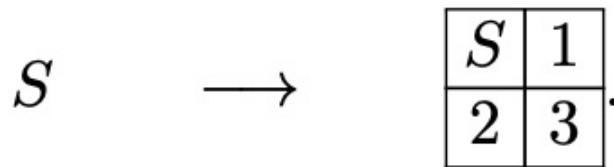
(1) Μια ομάδα n πειρατών πρόκειται να μοιράσει έναν θησαυρό, από χρυσό, έτσι ώστε κάθε πειρατής θα πάρει ένα ίσο μερίδιο. Όμως οι πειρατές δεν είναι αντικειμενικοί, και κάθε πειρατής έχει την δικιά του άποψη του τι είναι το $\frac{1}{n}$ του θησαυρού. Να δώσετε μια στρατηγική μοιρασιάς του θησαυρού.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n . Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μέθοδο να μοιραστούν $k - 1$ πειρατές τον θησαυρό. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από k -πειρατές.

Παίρνουμε ένα κομμάτι του θησαυρού και το βάζουμε σε έναν καινούργιο σωρό. Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρις ότου ένας πειρατής δηλώσει ότι αυτό είναι το δίκαιο μερίδιο του θησαυρού γι' αυτόν. Οι υπόλοιποι $k - 1$ πειρατές πιστεύουν ότι αυτό το μερίδιο δεν είναι δίκαιο γι' αυτούς, διαφορετικά θα είχαν επιλέξει τον καινούργιο σωρό νωρίτερα.

Από την υπόθεση της επαγωγής, οι υπόλοιποι πειρατές $k - 1$ μπορούν τώρα να μοιράσουν τον υπόλοιπο θησαυρό.

(2) Δείξτε ότι μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε n τετράγωνα, για κάθε $n \geq 6$. Σ' αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα λίγο διαφορετικό. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο S με $n - 3$ υποτετράγωνα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με n υποτετράγωνα:



Τότε αν έχουμε 6 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις με 6, 9, 12, 15 ... υποτετράγωνα. Αν έχουμε 7 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 7, 10, 13, 16 ..., και αν έχουμε 8 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 8, 11, 14, 17 ... υποτετράγωνα.

Άρα πρέπει να υποδιαιρέσουμε ένα τετράγωνο σε 6, 7 και 8 τετράγωνα και τότε μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε οποιοδήποτε αριθμό υποτετραγώνων.

Γι' αυτά τα υποτετράγωνα έχουμε

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 2 |
| | | 3 |
| 4 | 5 | 6 |

| | | | |
|---|---|---|--|
| 1 | | 2 | |
| | | | |
| 3 | 4 | 5 | |
| 6 | 7 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 2 |
| | | | 3 |
| | | | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |

(3) Ένα ATM μηχάνημα έχει μόνο νομίσματα των €5 και κέρματα των €2. Δείξτε ότι το μηχάνημα μπορεί να δώσει οποιοδήποτε ακέραιο ποσό, μεγαλύτερο των €3, του ζητηθεί. Έστω n είναι το ποσό για ανάληψη. Θα δώσουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για $n = 4$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι $2 + 2$. Τώρα υποθέτουμε ότι μπορούμε να κάνουμε ανάληψη το ποσό των € k . Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε € $k + 1$.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν στο ποσό k υπάρχουν δυο δέυρα, τότε τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με ένα πεντάευρο
- Αν υπάρχει ένα πεντάευρο, τότε το αφαιρούμε και το αντικαθιστούμε με τρία δέυρα.
- Αν υπάρχουν ένα πεντάευρο και ένα δέυρο, τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με τέσσερα δέυρα.

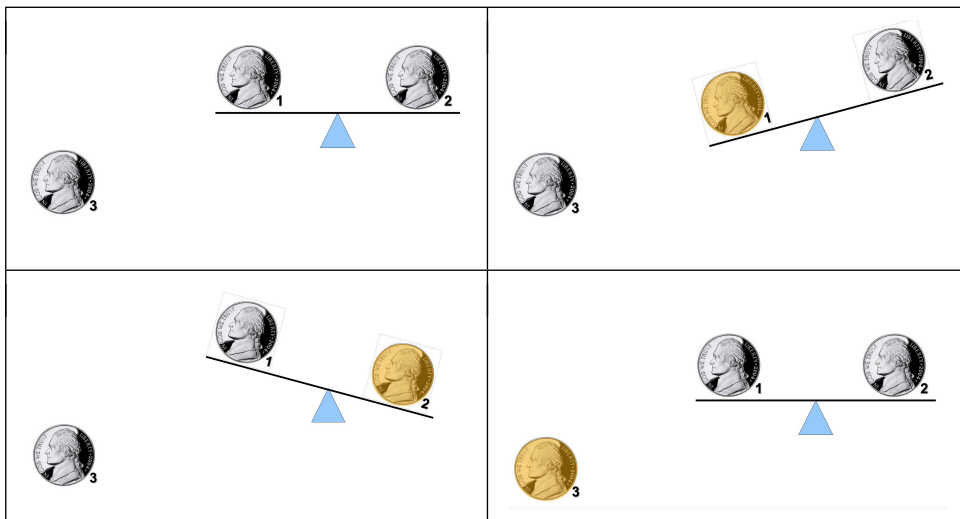
Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ανάληψη $\in k + 1$.

Το πρόβλημα έχει και μια άλλη διαφορετική λύση. Θέλουμε να πάρουμε $\in n$.

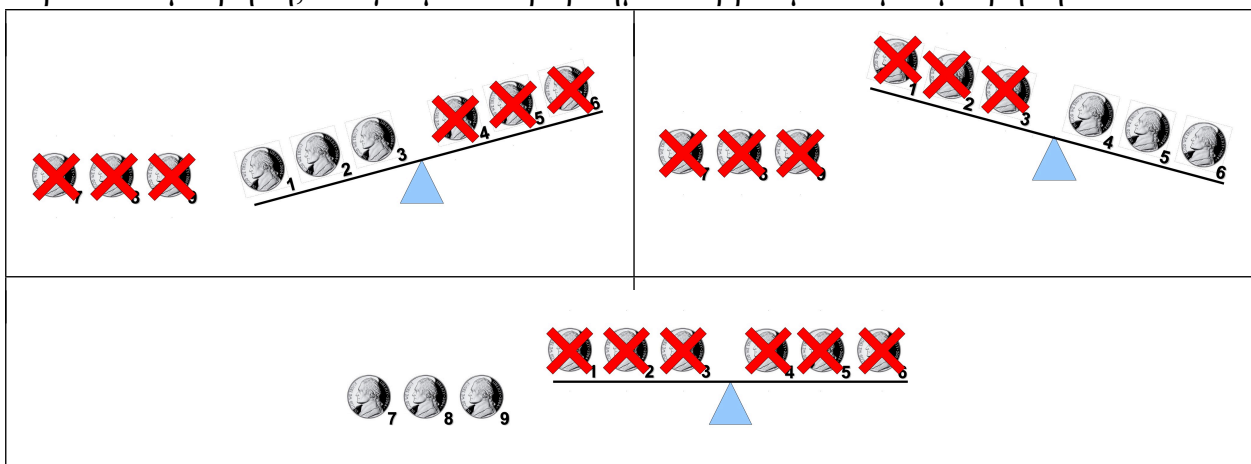
- Αν το n είναι άρτιος, τότε μπορούμε να το πάρουμε μόνο με δέυρα.
- Αν το n είναι περιττός τότε, επειδή το $n - 5$ είναι άρτιος, μπορούμε να το πάρουμε ως ένα πεντάευρο και τα υπόλοιπα δέυρα.

(4) Δίνονται τρία ίδια νομίσματα, δυο από τα οποία είναι γνήσια και ένα πλαστό. Το πλαστό νόμισμα ζυγίζει πιο πολύ από τα άλλα. Χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά μόνο μια φορά, να βρείτε το πλαστό νόμισμα.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την απάντηση:



Πιο δύσκολο πρόβλημα: Δίνονται εννιά όμοια νομίσματα έτσι ώστε οκτώ απ' αυτά είναι όμοια και το άλλο πλαστό, που ζυγίζει περισσότερο. Να βρείτε το πλαστό νόμισμα με δυο ζυγίσματα. Με την παρακάτω μέτρηση, ανάγουμε το πρόβλημα να βρούμε σε μια μέτρηση το πλαστό νόμισμα.



Εδώ παρατηρούμε ένα μοτίβο:

- ❶ Εάν δεν κάνουμε καμία μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή ενός νομίσματος, γιατί γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πλαστό.
- ❷ Εάν κάνουμε μια μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή τριών νομισμάτων.
- ❸ Εάν κάνουμε δυο μετρήσεις, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή εννιά νομισμάτων.

Παρατηρούμε ότι $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$.

Να δείξετε ότι με n μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή 3^n νομισμάτων.

Θα αποδείξουμε την πρόταση με μαθηματική επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για $n = 0$, όπως ήδη παρατηρήσαμε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για k .

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι με $n = k$ μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό νόμισμα από μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Θα δείξουμε την πρόταση για $n = k + 1$.

Χωρίζουμε την συλλογή των 3^{k+1} νομισμάτων σε τρεις ομάδες των 3^k νομισμάτων. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε A , B και C . Τοποθετούμε τα νομίσματα των A και B στην ζυγαριά. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- 1 Η A είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην A .
- 2 Η B είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην B .
- 3 Οι A και B έχουν το ίδιο βάρος. Τότε το πλαστό είναι στην C .

Σε κάθε περίπτωση το πλαστό βρίσκεται σε μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Από την υπόθεση της επαγωγής, με k μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό. Με την αρχική μέτρηση, συνολικά κάναμε $k + 1$ μετρήσεις, αποδεικνύοντας την πρόταση.

(5) Όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα (**βρείτε το λάθος**).

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε σε κάθε συλλογή k αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Θα δείξουμε ότι σε κάθε συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα. Παίρνουμε μια συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων. Από την υπόθεση τα πρώτα k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα τελευταία k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Άρα όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Παραδείγματα Επαγωγής-2

(1) Να δείξετε ότι

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 1 + 2 + 3 &= 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} \\ 1 + 2 + 3 + 4 &= 10 = \frac{4 \cdot 5}{2} \quad (\text{Αγία Τετράκτυς}) \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15 = \frac{5 \cdot 6}{2} \end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$(1 + 2 + \cdots + m) + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + m+1 = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί ναδειχτεί χωρίς την χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής, πολύ απλά. Η μέθοδος αυτή επινοήθηκε από τον Gauss όταν ήταν μαθητής δημοτικού. Το πρόβλημα που έβαλε ο δάσκαλος στους μαθητές τους ήταν οι μαθητές να βρουν το άθροισμα

$$1 + 2 + \dots + 100.$$

Ο δάσκαλος παρατήρησε ότι ο Gauss τελείωσε πολύ γρήγορα. Ο Gauss παρατήρησε ότι

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51 = 101.$$

και έχουμε 50 τέτοια ζευγάρια. Άρα το άθροισμα είναι

$$101 \cdot 50 = 5050.$$

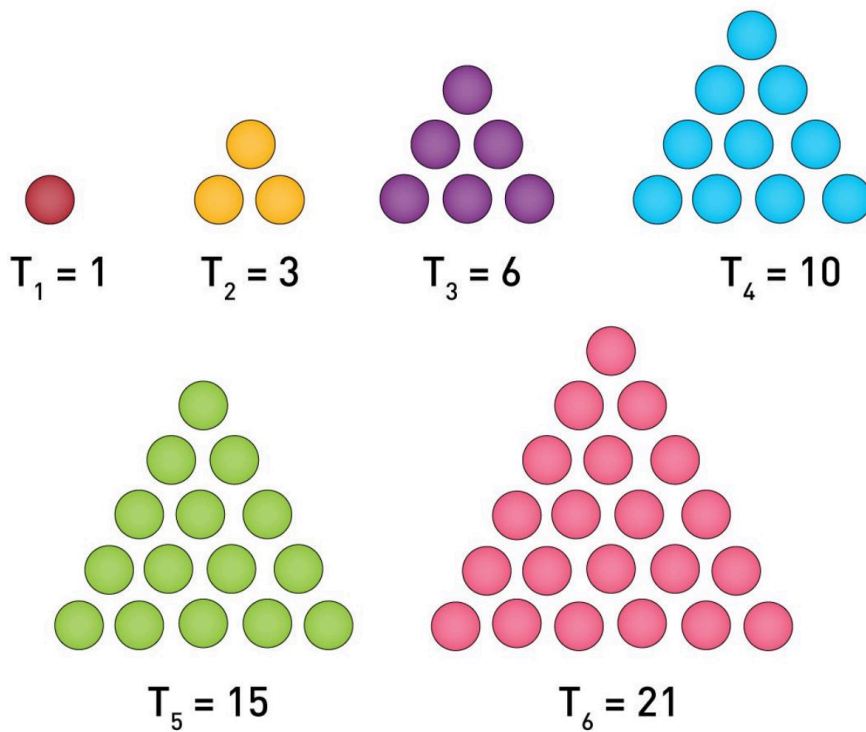
Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω πιο συστηματικά. Έστω

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

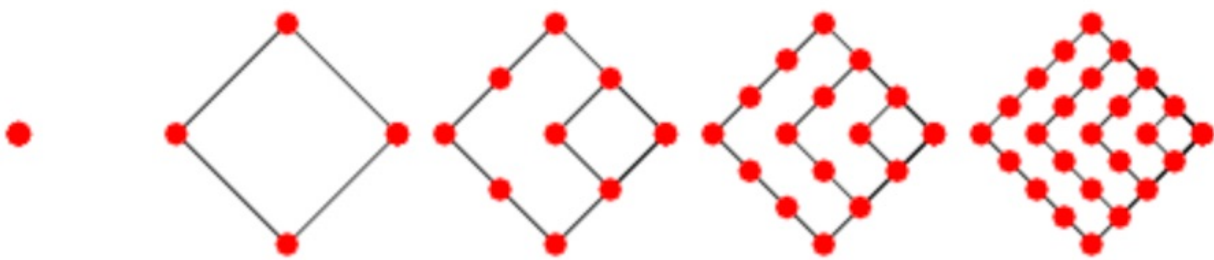
Γράφουμε το S με δυο τρόπους και προσθέτουμε

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + \cdots + n \\ S_n = n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline 2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

Οι αριθμοί S_n ονομάζονται **τριγωνικοί** γιατί μπορούν να κατανεμηθούν σε τρίγωνο:



Συνεχίζοντας αυτήν ορολογία, ορίζουμε τους **τετραγωνικούς αριθμούς**, ως αριθμούς που μπορούν να αναπαρασταθούν σε τετράγωνα:



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \dots$$

Θέτουμε $Q_n = n^2$ για τον n -οστό τετράγωνο αριθμό. Παρατηρούμε

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n + 1.$$

Ξεκινάμε με το επόμενο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι

- ① Ο συνολικός αριθμός των τριγώνων είναι n^2 .
- ② Ο αριθμός των πράσινων τριγώνων είναι

1, 3, 6, 10, 15, 21

δηλαδή S_n .

- ③ Ο αριθμός των άσπρων τριγώνων είναι

0, 1, 3, 6, 10

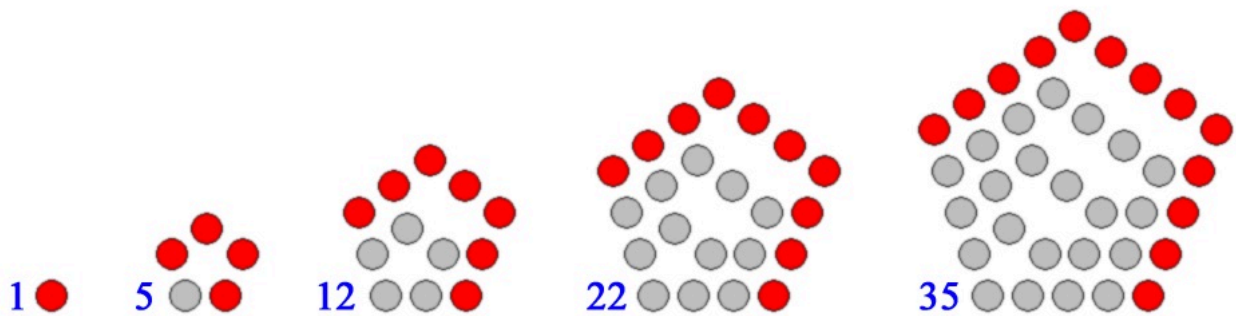
δηλαδή S_{n-1} .

Άρα $S_n + S_{n-1} = n^2$.

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση:

$$\begin{aligned} S_n + S_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1) + (n-1)n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \end{aligned}$$

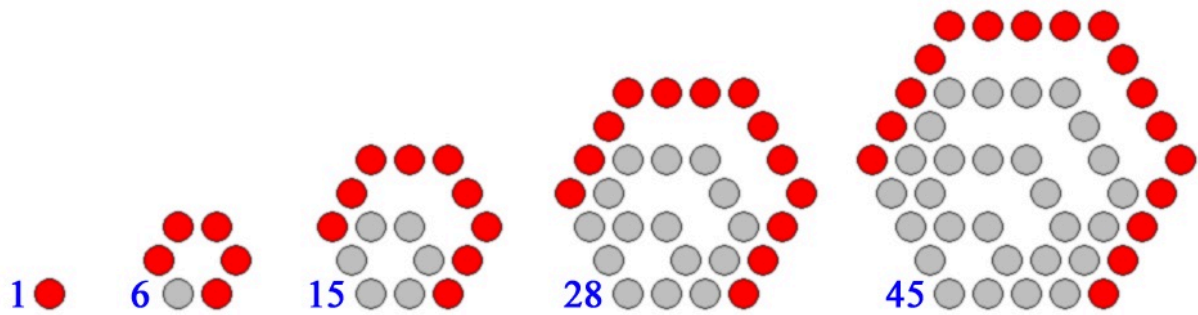
Επίσης υπάρχουν πεντάγωνοι αριθμοί:



με γενική φόρμουλα

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

και εξάγωνοι



με γενική φόρμουλα:

$$H_n = 2n^2 - n$$

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε s -γωνικούς αριθμούς αν μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα κανονικό s -γωνο. Ο τύπος για τον n -οστο τέτοιο αριθμό δίνεται:

$$P(s, n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2} = (s-2)\frac{n(n-1)}{2} + n.$$

Για $n = 3$:

$$P(3, n) = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.$$

(2) Να δείξετε ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$1^2 + 2^2 = 5 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 + (m + 1)^2 = \frac{(m + 1)(m + 2)(2(m + 1) + 1)}{6} = \frac{(m + 1)(m + 2)(2m + 3)}{6}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + \dots + m^2) + (m + 1)^2 &= \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6} + (m + 1)^2 \\ &= \frac{m(m + 1)(2m + 1) + 6(m + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(m + 1)[m(2m + 1) + 6(m + 1)]}{6} \\ &= \frac{(m + 1)(2m^2 + m + 6m + 6)}{6} \\ &= \frac{(m + 1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} \end{aligned}$$

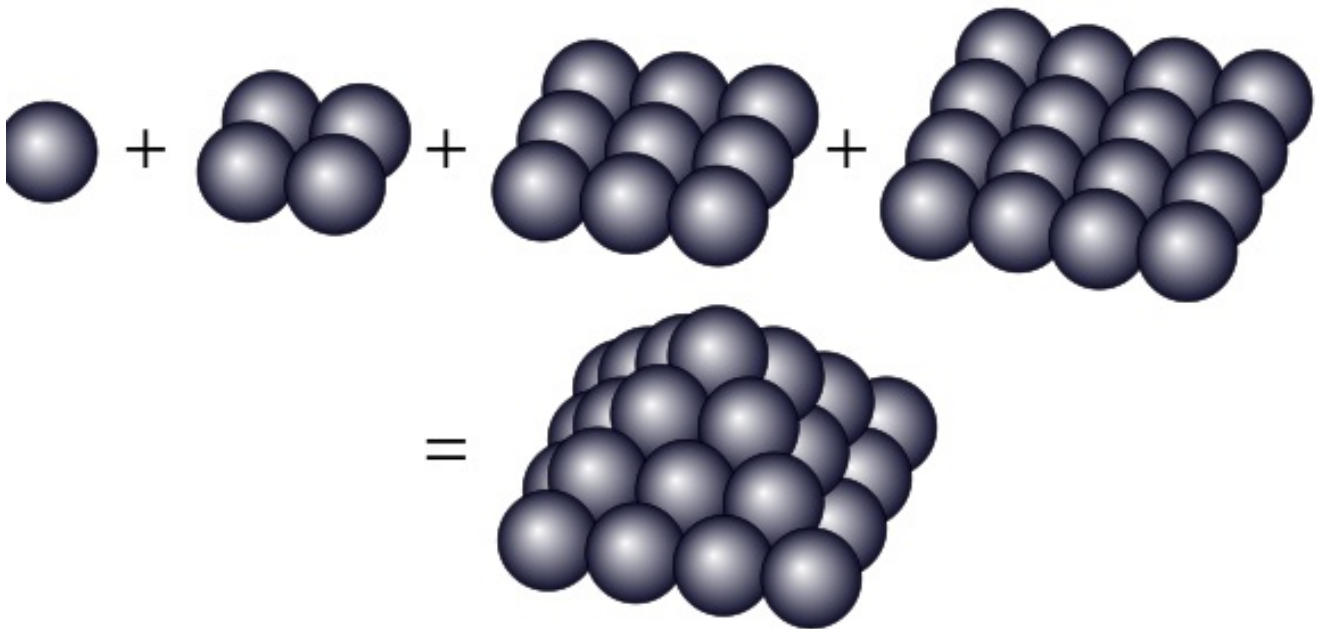
Παρατηρούμε ότι

$$(m + 2)(2m + 3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6.$$

Συνοψίζοντας

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 + (m + 1)^2 = \frac{(m + 1)(m + 2)(2m + 3)}{6}$$

Παραστατικά:



Γι' αυτό αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται **τετράγωνοι πυραμοειδείς αριθμοί**.

(3) Να δείξετε ότι

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2, n \geq 1.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 + (m + 1)^3 = \frac{(m + 1)^2(m + 2)^2}{4}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

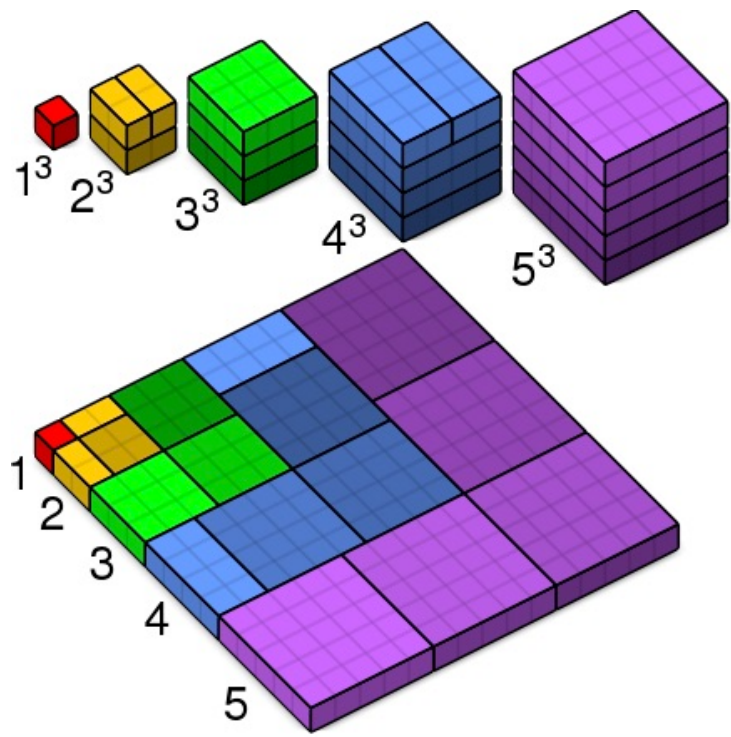
$$\begin{aligned}(1^3 + 2^3 + \dots + m^3) + (m + 1)^3 &= \frac{m^2(m + 1)^2}{4} + (m + 1)^3 \\ &= \frac{m^2(m + 1)^2 + 4(m + 1)^3}{4} \\ &= \frac{(m + 1)^2[m^2 + 4(m + 1)]}{4} \\ &= \frac{(m + 1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} \\ &= \frac{(m + 1)^2(m + 2)^2}{4}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(m + 2)^2 = m^2 + 2 \cdot 2 \cdot m + 2^2 = m^2 + 4m + 4.$$

Οι υπόλοιπες ισότητες είναι συνέπεια του πρώτου παραδείγματος

Γεωμετρικά:

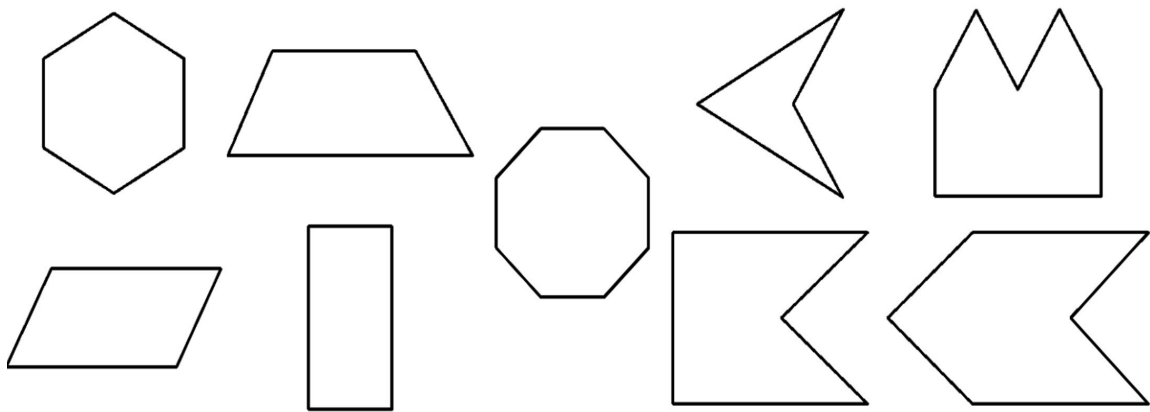


(4) Να δείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός κυρτού n -γώνου είναι $n(n - 3)/2$, για $n \geq 4$.

Διαγώνιος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με μια μη-γειτονική κορυφή.

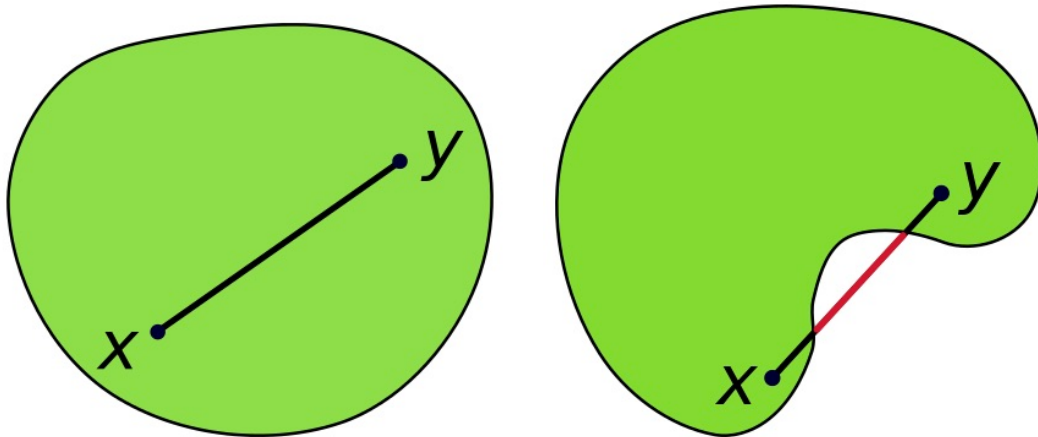
Ένα σχήμα (μια περιοχή) στο επίπεδο ή στον χώρο ονομάζεται **κυρτό** αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία του περιέχεται στο σχήμα.

Κάποια σχήματα

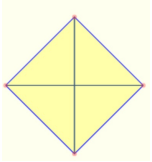
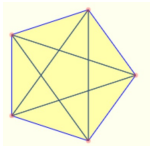
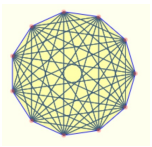
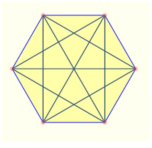
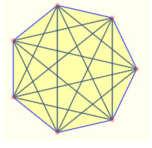
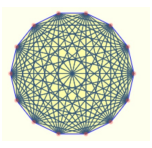
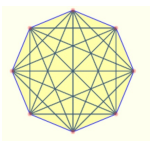
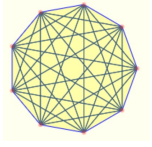
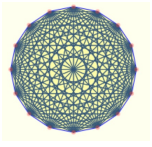


Τα πρώτα πέντε είναι κυρτά και τα άλλα τέσσερα δεν είναι

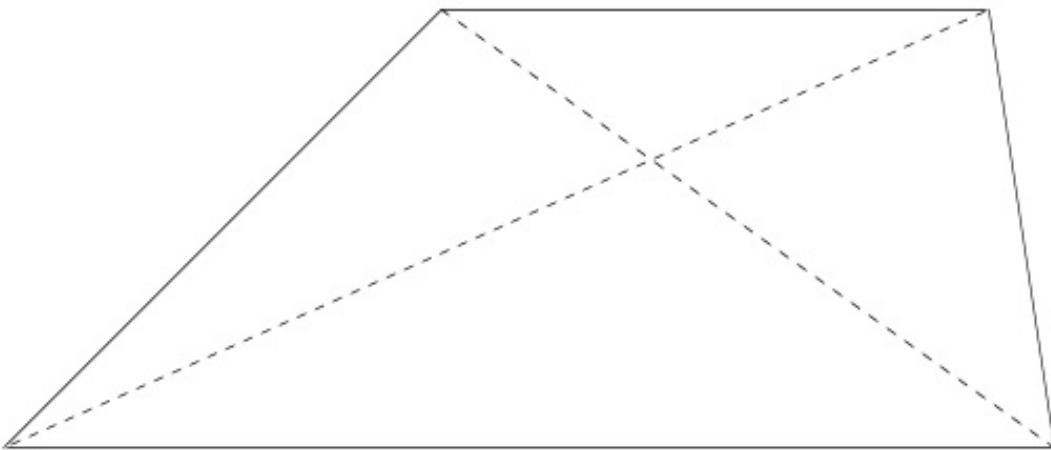
Και πιο παραστατικά:



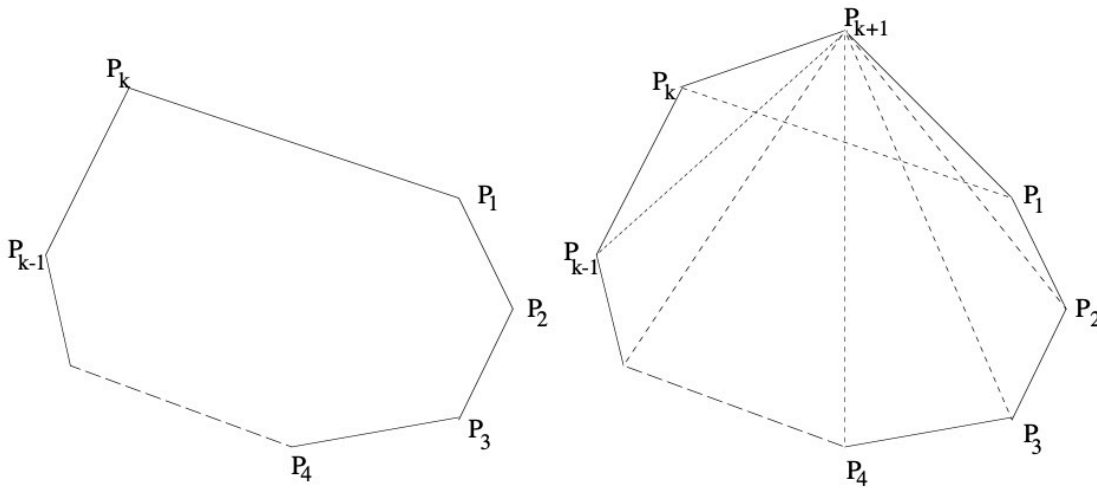
Πρώτα να δούμε κάποια παραδείγματα.

| | | | | | |
|--|----|---|----|---|-----|
|  | 2 |  | 5 |  | 44 |
|  | 9 |  | 14 |  | 77 |
|  | 20 |  | 27 |  | 104 |

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$. Τότε, έχουμε δυο διαγώνιους. Αλλά και $4(4 - 3)/2 = 2$ και η πρόταση ισχύει.



Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$, δηλαδή υποθέτουμε ότι ένα κυρτό k -γώνο έχει $k(k-3)/2$ διαγώνιους. Θα δείξουμε ότι ένα κυρτό $(k+1)$ -γώνο έχει $(k+1)(k-2)/2$ διαγώνιους.



Όταν προσθέσουμε μια ακόμη κορυφή σε ένα κυρτό k -γώνο, οι διαγώνιοι που είχαμε πριν παραμένουν. Από την υπόθεση έχουμε ήδη $k(k-3)/2$ διαγώνιους.

Επίσης, έχουμε τις διαγώνιους από την κορυφή P_{k+1} στις όλες τις κορυφές, εκτός των γειτονικών, P_1 και P_k , δηλαδή επιπλέον $(k-2)$ -διαγώνιους. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το P_1 με το P_k , που ήταν πλευρά, τώρα είναι διαγώνιος. Άρα ο αριθμός των διαγώνιων συνολικά είναι:

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k^2 - 3k}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

(5) Δείξτε ότι $n^2 \geq 2n + 1$, $n \geq 3$.

Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι εκθετική ως προς το n και η δεξιά γραμμική. Σε γενικές γραμμές, εκθετικές συναρτήσεις είναι μεγαλύτερες των γραμμικών, για **μεγάλες τιμές** του n .

Παρατηρούμε ότι η υπόθεση $n \geq 3$ είναι απαραίτητη:

$$n = 0 : 0 < 1.$$

$$n = 1 : 1 < 3.$$

$$n = 2 : 4 < 5.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 3$, $3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Δηλαδή $k^2 \geq 2k + 1$, όπου $k \geq 3$.

Θα δείξουμε ότι $(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Ξεκινάμε αναλύοντας την αριστερή πλευρά της σχέσης:

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 2(k + 1) + 2k > 2(k + 1) + 1,$$

γιατί $2k \geq 6 > 1$.

(6) Να δείξετε ότι

$$n^2 \leq 2^n, \quad n \geq 4.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι δυνάμεις του n ενώ η δεξιά πλευρά είναι δύναμη κάποιου σταθερού αριθμού. Και πάλι, για μεγάλες δυνάμεις, η αριστερή πλευρά γίνεται μικρότερη από την δεξιά:

$$n = 0 : 0 < 1.$$

$$n = 1 : 1 < 2.$$

$$n = 2 : 4 = 4.$$

$$n = 3 : 9 > 8.$$

$$n = 4 : 16 = 16.$$

$$n = 5 : 25 < 32$$

Γι' αυτό ξεκινάμε από το $n \geq 4$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$, γιατί η σχέση ξεκινάει από το 4:

$$4^2 = 16 = 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι $k^2 \leq 2^k$.
Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(k + 1)^2 \leq 2^{k+1}$. Οπότε

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο παράδειγμα στο τέταρτο βήμα.

(7) Δείξτε ότι $(2n)!(n+1) > 4^n(n!)^2$ για $n > 1$.

(Υπενθυμίζουμε ότι $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Η σχέση αυτή είναι πιο πολύπλοκη. Απλά, τα παραγωγικά μεγαλώνουν πολύ γρήγορα σε σχέση με τις δυνάμεις.

$$n = 0 : 1 = 1.$$

$$n = 1 : 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1.$$

$$n = 2 : 4! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72 > 4^2 \cdot (2!)^2 = 16 \cdot 4 = 64.$$

Για $n = 3$, ας συγκρίνουμε το $6! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$ και το $4^3 \cdot (3!)^2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ χωρίς την χρήση υπολογιστών:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \sim 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

και τελικά η αριστερή πλευρά είναι μεγαλύτερη της δεξιάς.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 2$, $4! \cdot 3 = 72 > 4^2 \cdot (2!)^2 = 64$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, $(2k)!(k+1) > 4^k(k!)^2$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$ δηλαδή $(2k+2)!(k+2) > 4^{k+1}((k+1)!)^2$. Ξεκινάμε από την αριστερή πλευρά της σχέσης προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε ώστε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση της επαγωγής:

$$(2k+2)!(k+2) = (2k)!(2k+1)(2k+2)(k+2) = (2k)!(2k+1)2(k+1)(k+2)$$

Εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής,

$$(2k+2)!(k+2) > 2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης είναι μεγαλύτερο του δεξιού μέρους της αρχικής σχέσης

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2$$

Άρα

$$\begin{aligned} 2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 &> 4^{k+1}((k+1)!)^2 = 4 \cdot 4^k(k!)^2(k+1)^2 \Leftrightarrow (2k+1)(k+2) > 2(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2k^2 + 4k + k + 2 &> 2k^2 + 4k + 2 \Leftrightarrow 5k > 4k. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προφανώς ισχύει για $k \geq 2$.

(8) Να δείξετε ότι $n! > 3^n$, $n \geq 7$.

Η ιδέα και πάλι είναι ότι, γενικά, τα παραγοντικά είναι μεγαλύτερα από τις δυνάμεις σταθερού αριθμού γιατί στα παραγοντικά πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς που αυξάνουν ενώ στις δυνάμεις πολλαπλασιάζουμε με έναν σταθερό αριθμό.

Αρχικά ελέγχουμε κάποιες τιμές:

$$n = 0 : 1 = 1, \quad n = 1 : 1 < 3, \quad n = 2 : 2 < 9 \quad n = 3 : 1.2.3 = 6 < 3.3.3 = 27.$$

$$n = 4 : 1.2.3.4 = 24 < 3.3.3.3 = 81, \quad n = 5 : 1.2.3.4.5 = 120 < 3.3.3.3.3 = 243.$$

$n = 6 : 1.2.3.4.5.6 = 720 < 3.3.3.3.3.3 = 729$ $n = 7 : 1.2.3.4.5.6.7 = 5040 > 2187$. Από δω και πέρα, η ανισότητα διατηρείται γιατί στο επόμενο βήμα, πολλαπλασιάζουμε την αριστερή πλευρά με έναν αριθμό μεγαλύτερο του 3 και την δεξιά επί 3.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 7$, κάτι που το κάναμε ήδη:

$$7! = 1.2.3.4..5.6.7 = 5040 > 2187 = 3^7.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 7$, δηλαδή $m! > 3^m$. Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(m + 1)! > 3^{m+1}$.

Υπολογίζουμε

$$(m + 1)! = (m + 1).m! > (m + 1)3^m > 3.3^m = 3^{m+1}$$

κι αυτό γιατί $m > 7$ και επομένως $m + 1 > 3$.

(9) Μπορεί ναδειχτεί ότι $(2 + \sqrt{3})^n$ μπορεί να γραφτεί ως $a_n + b_n\sqrt{3}$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ισχύει $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

Αυτή η σχέση βγαίνει ουσιαστικά από την ανάπτυξη της δεξιάς πλευράς, κάνοντας όλους τους πολλαπλασιασμούς και χρησιμοποιώντας ότι $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Και πάλι ας κάνουμε κάποιους υπολογισμούς για να δούμε πως δουλεύει η διαδικασία:

$$n = 0 : (2 + \sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1, b_0 = 0 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1.$$

$$n = 1 : (2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1 \Rightarrow 2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1.$$

$$n = 2 : (2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow \\ a_2 = 7, b_2 = 4 \Rightarrow 7^2 - 3 \cdot 4^2 = 49 - 3 \cdot 16 = 1.$$

$$n = 3 : (2 + \sqrt{3})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3\sqrt{3} = \\ 26 + 15\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 26, b_3 = 15 \Rightarrow 26^2 - 3 \cdot 15^2 = 676 - 3 \cdot 225 = 1.$$

Παρατηρούμε ότι $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$.

Μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς διαφορετικά για $n = 3$:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^3 &= (2 + \sqrt{3})^2(2 + \sqrt{3}) = (7 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= 14 + 7\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 4 \cdot 3 = 26 + 15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

όπως παραπάνω.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Οπότε

$$a_0^2 - 3b_0^2 = 1^2 - 3 \cdot 0^2 = 1,$$

οπότε ισχύει. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$(2 + \sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}, \quad a_m^2 - 3b_m^2 = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 = 1$.

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^{m+1} &= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^m = (2 + \sqrt{3})(a_m + b_m\sqrt{3}) \\ &= 2a_m + 2b_m\sqrt{3} + a_m\sqrt{3} + 3b_m \\ &= (2a_m + 3b_m) + (a_m + 2b_m)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Άρα, $a_{m+1} = 2a_m + 3b_m$ και $b_{m+1} = a_m + 2b_m$. Τότε

$$\begin{aligned}a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 &= (2a_m + 3b_m)^2 - 3(a_m + 2b_m)^2 \\ &= 4a_m^2 + 12a_mb_m + 9b_m^2 - 3(a_m^2 + 4a_mb_m + 4b_m^2) \\ &= 4a_m^2 + \cancel{12a_mb_m} + 9b_m^2 - 3a_m^2 - \cancel{12a_mb_m} - 12b_m^2 \\ &= a_m^2 - 3b_m^2 = 1.\end{aligned}$$

(10) (Ανισότητα του Bernoulli) Δείξτε ότι $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ για $n \geq 1$ και $x \geq -1$.

Αν ελέγξουμε την σχέση για κάποιες τιμές του x :

$x = -1$: $0 \geq 1 - n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

$x = 0$: $1^n \geq 1$.

$x = 1$: $2^n \geq 1 + n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική.

$x = 2$: $3^n \geq 1 + 2n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική, όπως και πριν.

Τώρα ελέγχουμε ως προς τις τιμές του n :

$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$, προφανές.

$n = 2$: $(1 + x)^2 = \cancel{1} + \cancel{2x} + x^2 \geq \cancel{1} + \cancel{2x}$, προφανές γιατί $x^2 \geq 0$, για κάθε x .

$n = 3$: $(1 + x)^3 = \cancel{1} + \cancel{3x} + 3x^2 + x^3 \geq \cancel{1} + \cancel{3x}$. Για να δούμε ότι ισχύει, πρέπει να δείξουμε ότι

$$0 \leq 3x^2 + x^3 = x^2(3 + x)$$

Το $x^2 \geq 0$ και $3 + x > 0$ γιατί $x \geq -1 \Rightarrow 3 + x \geq 3 - 1 = 2 > 0$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$, $1 + x = 1 + x$. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, για $x \geq -1$. Θα δείξουμε $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x) \underbrace{(1 + x)^k \geq (1 + kx)}_{\text{από την υπόθεση}} (1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

Κι αυτό γιατί $kx^2 \geq 0$.

Είναι μια ενδιαφέρουσα ανισότητα. Για παράδειγμα:

- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$

- $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$

(11) Δείξτε ότι ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Και πάλι ας κάνουμε κάποια παραδείγματα:

$n = 0$: Το σύνολο με κανένα στοιχείο είναι το κενό \emptyset και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό του.

$n = 1$: Το σύνολο έχει ένα στοιχείο $S = \{a\}$ και έχει δυο υποσύνολο, το \emptyset και το $\{a\}$.

$n = 2$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} = S.$$

$n = 3$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S.$$

$n = 4$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c, d\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} = S.$$

Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο στην παραπάνω κατασκευή:

- Πάντα εμφανίζονται το \emptyset και το σύνολο S .
- Τα υποσύνολα ενός συνόλου είναι επίσης και υποσύνολα κάθε υπερσυνόλου του.
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε τα υποσύνολα ενός συνόλου προσθέτοντας στοιχεία στα υποσύνολα υποσυνόλων του.
- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός υποσυνόλων εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των στοιχείων και όχι από την φύση τους.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύνολο είναι κενό και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό. Άρα η σχέση ισχύει. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για ένα σύνολο με k στοιχεία. Δηλαδή ένα τέτοιο σύνολο έχει 2^k υποσύνολα. Θα δείξουμε ότι ένα σύνολο με $k + 1$ στοιχεία, $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ έχει 2^{k+1} υποσύνολα.

Από την υπόθεση, το σύνολο $\{x_1, \dots, x_k\}$ έχει 2^k υποσύνολα. Για κάθε ένα απ' αυτά τα υποσύνολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμη με την πρόσθεση του x_{k+1} σ' αυτό. Άρα έχουμε ακόμη 2^k υποσύνολα. Συνολικά λοιπόν έχουμε $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ υποσύνολα. Θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη αυτού του παραδείγματος χρησιμοποιώντας το Διώνυμο του Νεύτωνα.

12) Για $n \geq 3$, να δείξετε ότι υπάρχουν n φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Για $n = 3$, έχουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1 \right).$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή υπάρχουν k φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή υπάρχουν $k + 1$ φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k+1}} = 1.$$

Ξεκινάμε με την υπόθεση, δηλαδή υπάρχουν k φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Διαιρούμε δια 2 την παραπάνω σχέση:

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2}.$$

Τώρα προσθέτουμε το $1/2$ και στις δυο πλευρές της εξίσωσης

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Παρατηρούμε

- Επειδή $a_i \neq a_j \Rightarrow 2a_i \neq 2a_j, i \neq j$.
- Επίσης, επειδή $a_i \neq 1, 2a_i \neq 2$, για όλα τα i .

Άρα έχουμε εκφράσει το 1 ως άθροισμα $k + 1$ κλασμάτων με αριθμητή 1.

(13) Να βρεθεί ο τύπος για το άθροισμα

$$S_n = 2 + 5 + \cdots + (3n - 1)$$

και να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Υπολογίζουμε το άθροισμα για κάποιες τιμές του n :

$$n = 1: S_1 = 2.$$

$$n = 2: S_2 = 2 + 5 = 7.$$

$$n = 3: S_3 = 2 + 5 + 8 = 15.$$

$$n = 4: S_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26.$$

$$n = 5: S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40.$$

$$n = 6: S_6 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 57.$$

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα με το άθροισμα $1 + 2 + \dots + n$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο όρος $n/2$ θα βρίσκεται στο S_n . Έτσι υπολογίζουμε το $2/n \cdot S_n$:

$$\frac{2}{1}S_1 = 2, \quad \frac{2}{2}S_2 = 7, \quad \frac{2}{3}S_3 = 10, \quad \frac{2}{4}S_4 = 13, \quad \frac{2}{5}S_5 = 16, \quad \frac{2}{6}S_6 = 19.$$

$$\frac{2}{n}S_n = 3n + 1 \Rightarrow S_n = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$

$$S_1 = 2 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$S_k = \frac{k(3k + 1)}{2}.$$

Θέλουμε να δείξουμε την εξίσωση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(3(k+1) + 1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+3+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(k+1)(3k+4) = 3k^2 + 4k + 3k + 4 = 3k^2 + 7k + 4$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$S_{k+1} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}.$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (3(k+1) + 1) = S_k + (3k + 2) = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 \\ &= \frac{k(3k+1) + 2(3k+2)}{2} = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(14) Να βρεθεί ο τύπος για το άθροισμα

$$P_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n + 1)$$

και να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Υπολογίζουμε το άθροισμα για κάποιες τιμές του n :

$$n = 1: P_1 = 2.$$

$$n = 2: P_2 = 2 + 6 = 8.$$

$$n = 3: P_3 = 2 + 6 + 12 = 20.$$

$$n = 4: P_4 = 2 + 6 + 12 + 20 = 40.$$

$$n = 5: P_5 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70.$$

$$n = 6: P_6 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 = 112.$$

$$P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα με το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο όρος $n(n+1)/6$ θα βρίσκεται στο S_n . Έτσι υπολογίζουμε το $6/n(n+1) \cdot P_n$:

$$\frac{6}{1 \cdot 2} P_1 = 6, \quad \frac{6}{2 \cdot 3} P_2 = 8, \quad \frac{6}{3 \cdot 4} P_3 = 10, \quad \frac{6}{4 \cdot 5} P_4 = 12, \quad \frac{6}{5 \cdot 6} P_5 = 14, \quad \frac{6}{6 \cdot 7} P_6 = 16.$$

$$\frac{6}{n(n+1)} P_n = 2n + 4 \Rightarrow P_n = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$

$$P_1 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$P_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Θέλουμε να δείξουμε την εξίσωση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$P_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(15) Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1, \quad n \geq 1.$$

Φυσικά ισχύει για $n = 1$ ($1/2 < 1$). Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} < 1,$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < 1.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση άμεσα έχουμε

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) + \frac{1}{2^{k+1}} < 1 + \frac{1}{2^{k+1}}$$

που δεν οδηγεί πουθενά. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε άλλη μέθοδο.

Αρχικά, κάνουμε κάποιες πράξεις:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

και η ανισότητα ισχύει από την υπόθεση.

(16) Εξετάστε αν ισχύει ο τύπος:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 .$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 .$$

Θα δείξουμε την σχέση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2} \left(k + 1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(k^2 + 2 \cdot k \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(k^2 + 3k + \frac{9}{4} \right) .$$

και τελικά

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2} \cdot \frac{4k^2 + 12k + 9}{4} = \frac{4k^2 + 12k + 9}{8} .$$

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + k + 1 = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + k + 1.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + k + 1 &= \frac{1}{2} \left(k^2 + 2 \cdot k \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + k + 1 = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{1}{8} + k + 1 \\ \frac{4k^2 + 4k}{8} + \frac{1}{8} + \frac{8k + 8}{8} &= \frac{4k^2 + 12k + 9}{8} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

ΒΡΕΙΤΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ

Δεν ισχύει για $n = 1$:

$$1 \neq \frac{9}{8}.$$

Το Διώνυμο του Νεύτωνα

Ήδη χρησιμοποιήσαμε τον διώνυμο του Νεύτωνα για $n = 2, 3$. Το διώνυμο μας δίνει το ανάπτυγμα του $(a + b)^n$ ως προς τις δυνάμεις του a και του b . Ειδικότερα ισχύει

$$(a + b)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} a^{n-s} b^s, \quad C_s^n = \binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!}$$

Οι συντελεστές C_s^n δίνουν τον αριθμό των επιλογών s αντικειμένων από μια συλλογή n αντικειμένων, χωρίς επανάθεση και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους.

Θα το εξετάσουμε αυτό πιο αναλυτικά. Ξεκινάμε με μια συλλογή n αντικειμένων. Έχουμε n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, $n - 1$ επιλογές για το δεύτερο και $n - s + 1$ για το s αντικείμενο. Μ' αυτόν τον τρόπο επιλέξαμε s αντικείμενα αλλά με δεδομένη σειρά.

Η ερώτηση τώρα είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε s αντικείμενα. Και πάλι χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο. Για το πρώτο έχουμε s επιλογές, για το δεύτερο $s - 1$ επιλογές, και τελικά για το τελευταίο 1 επιλογή. Δηλαδή έχουμε $s(s - 1) \dots 1 = s!$ επιλογές.

Άρα τελικά έχουμε

$$\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \binom{n}{s} = C_s^n.$$

Κάποιες βασικές ιδιότητες τους είναι:

- 1 $C_0^n = 1 = C_n^n$. Κι αυτό γιατί υπάρχει μόνο ένας τρόπος να επιλέξουμε 0 ή n αντικείμενα από μια συλλογή n αντικειμένων.
- 2 $C_s^n = C_{n-s}^n$. Αυτό ισχύει γιατί η επιλογή s αντικειμένων ισοδυναμεί με την επιλογή των υπόλοιπων $n-s$ αντικειμένων.
- 3 $C_1^n = C_{n-1}^n = n$. Επειδή υπάρχουν n διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε ένα αντικείμενο από μια συλλογή n αντικειμένων.

Οι συντελεστές του διωνύμου δίνονται από το τρίγωνο του Pascal:

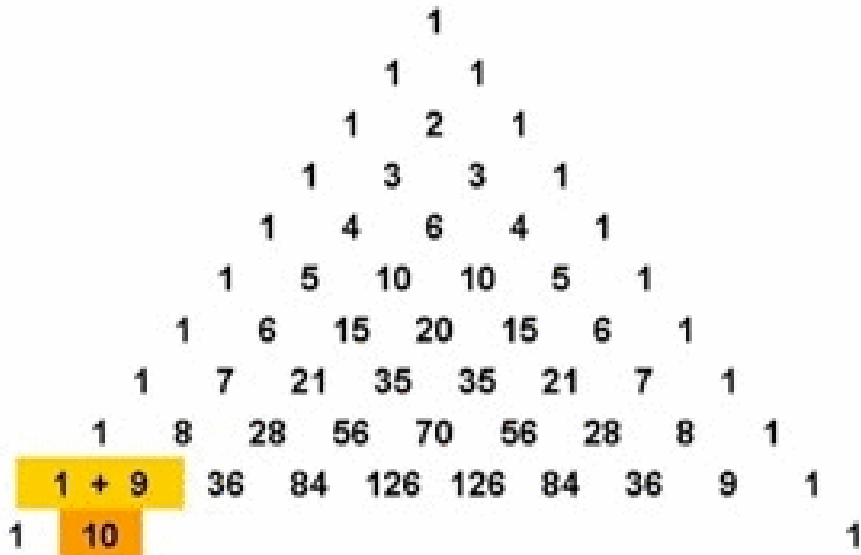
$$\begin{array}{l} (a + b)^1 : \qquad \qquad \qquad 1 \qquad 1 \\ (a + b)^2 : \qquad \qquad \qquad 1 \qquad 2 \qquad 1 \\ (a + b)^3 : \qquad \qquad 1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\ (a + b)^4 : \qquad \qquad 1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\ (a + b)^5 : \qquad 1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\ (a + b)^6 : \qquad 1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1 \\ (a + b)^7 : 1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1 \end{array}$$

Κάθε γραμμή αρχίζει και τελειώνει με το 1. Οι όροι της γραμμής δημιουργούνται από την προηγούμενη προσθέτοντας δυο διαδοχικούς όρους. Έτσι έχουμε

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$



Pascal's Triangle



MakeAGIF.com

Στο τρίγωνο του Pascal

$$\begin{array}{r} (a+b)^1 : \qquad \qquad \qquad 1 \qquad 1 \\ (a+b)^2 : \qquad \qquad \qquad 1 \qquad 2 \qquad 1 \\ (a+b)^3 : \qquad \qquad 1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\ (a+b)^4 : \qquad \qquad 1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\ (a+b)^5 : \qquad 1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\ (a+b)^6 : \qquad 1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1 \\ (a+b)^7 : \qquad 1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1 \end{array}$$

- Οι κόκκινοι αριθμοί είναι οι τριγωνικοί αριθμοί.
- Το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι τετράγωνο.

Η επόμενη είναι μια χρήσιμη σχέση μεταξύ των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n+1}{s} = \binom{n}{s-1} + \binom{n}{s}.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \binom{n}{s-1} + \binom{n}{s} &= \frac{n!}{(n-s+1)!(s-1)!} + \frac{n!}{(n-s)!s!} = \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!} \left(\frac{1}{n-s+1} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!} \frac{s+n-s+1}{s(n-s+1)} = \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!} \frac{n+1}{s(n-s+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-s)!s!} = \binom{n+1}{s} \end{aligned}$$

Διώνυμο του Νεύτωνα

Για κάθε a και b ισχύει

$$(a + b)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} a^{n-s} b^s, \quad n \geq 1.$$

Θα δώσουμε μια απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$(a + b)^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} a^{k-s} b^s$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$,

$$(a + b)^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^{k+1-s} b^s.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k = (a+b) \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} a^{k-s} b^s = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} a^{k-s+1} b^s + \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} a^{k-s} b^{s+1} \\ &= \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} a^{k-s+1} b^s + \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k}{s-1} a^{k-(s-1)} b^{(s-1)+1}\end{aligned}$$

όπου αντικαθιστούμε, στο δεύτερο άθροισμα, το s με το $s-1$.

$$\begin{aligned}&= \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} a^{k-s+1} b^s + \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k}{s-1} a^{k-s+1} b^s \\ &= a^{k+1} + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} a^{k-s+1} b^s + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s-1} a^{k-s+1} b^s + b^{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a^{k+1} + \sum_{s=1}^k \left[\binom{k}{s} + \binom{k}{s-1} \right] a^{k-s+1} b^s + b^{k+1} \\ &= a^{k+1} + \sum_{s=1}^k \binom{k+1}{s} + b^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^{k+1-s} b^s \end{aligned}$$

Παραδείγματα

(1) Να αναπτύξετε το άθροισμα $(2a - 1)^4$.

Τους συντελεστές τους παίρνουμε από το τρίγωνο του Pascal:

$$(2a-1)^4 = (2a)^4 + 4(2a)^3(-1) + 6(2a)^2(-1)^2 + 4(2a)(-1)^3 + (-1)^4 = 16a^4 - 32a^3 + 24a^2 - 8a + 1.$$

(2) Να απλοποιήσετε το άθροισμα $(1 - \sqrt{2})^5$.

Τους συντελεστές τους παίρνουμε από το τρίγωνο του Pascal:

$$\begin{aligned}(1 - \sqrt{2})^5 &= 1 - 5\sqrt{2} + 10(\sqrt{2})^2 - 10(\sqrt{2})^3 + 5(\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^5 \\ &= 1 - 5\sqrt{2} + 20 - 20\sqrt{2} + 20 - 4\sqrt{2} = 41 - 29\sqrt{2}\end{aligned}$$

Να θυμηθούμε:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{2})^2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ (\sqrt{2})^4 &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ (\sqrt{2})^5 &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2\sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Στο διώνυμο του Νεύτωνα θέτουμε $a = b = 1$ και έχουμε

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι το C_s^n είναι ο αριθμός των υποσυνόλων με s στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων, γιατί ένα υποσύνολο s στοιχείων είναι η επιλογή s στοιχείων από μια συλλογή n στοιχείων, χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την σειρά. Άρα ο παραπάνω τύπος μας δίνει τον συνολικό αριθμό των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, όπως δείξαμε πριν με επαγωγή.

(4) Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

(η κατάληξη των αθροισμάτων εξαρτάται από το αν ο n είναι περιττός ή άρτιος).

Στο διώνυμο του Νεύτωνα θέτουμε $a = 1$, $b = -1$ και έχουμε

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$$

(5) Να δείξετε ότι

$$\binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s}^2.$$

Ξεκινάμε από μια βασική ισότητα $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ και εφαρμόζουμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$\sum_{s=0}^{2n} \binom{2n}{s} x^s = \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x^s \right) \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x^s \right).$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει για κάθε x . Άρα οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων στις δυο πλευρές είναι ίσοι. Εξετάζουμε τους συντελεστές του x^n .

Στην δεξιά πλευρά το x^n το έχουμε ως $x^0 x^n, x x^{n-1}, \dots, x^n x^0$. Άρα

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{0}$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι

$$\binom{n}{s} = \binom{n}{n-s}$$

Επομένως

$$\binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s}^2.$$

(6) Να δείξετε ότι

$$\sum_{s=0}^n s \binom{n}{s} = n2^{n-1}.$$

Διαφορίζουμε το παρακάτω διώνυμο του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x^s \Rightarrow ((1+x)^n)' = \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} x^s \right)' \\ &\Rightarrow n(1+x)^{n-1} = \sum_{s=1}^n s \binom{n}{s} x^{s-1} \end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση θέτουμε $x = 1$:

$$n2^{n-1} = \sum_{s=1}^n s \binom{n}{s} = \sum_{s=0}^n s \binom{n}{s}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να αποδειχθούν με μαθηματική επαγωγή αν και η απόδειξη είναι πιο πολύπλοκη. Γενικά μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε πολλές σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των διωνύμων του Νεύτωνα.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε εξισώσεις από το διώνυμο του Νεύτωνα επιλέγοντας διάφορες τιμές για το a και το b .

- $a = 1, b = 2$:

$$3^n = (1 + 2)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} 2^s.$$

- $a = 1, b = -2$ ή $a = 2, b = -3$:

$$\begin{aligned} (-1)^n &= (1 - 2)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-2)^s = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^s 2^s \\ &= (2 - 3)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} 2^s (-3)^{n-s} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^{n-s} 2^s 3^{n-s} \end{aligned}$$

- $a = 1, b = \sqrt{2}$:

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (\sqrt{2})^s = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} 2^{\frac{s}{2}}.$$

Ακέραιοι Αριθμοί

Το σύνολο των ακεραίων ορίζεται ως

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Δηλαδή είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αρνητικούς τους. Στο \mathbb{Z} ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, επεκτείνοντας τον ορισμό από τους φυσικούς.

Επίσης και η αφαίρεση είναι κλειστή πράξη στους ακέραιους, κάτι που δεν ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς. Όμως, δεν είναι κλειστό ως προς την διαίρεση, όπως κανείς εύκολα μπορεί να δει ($2/3$ δεν είναι ακέραιος). Για την διαίρεση ισχύει:

Αλγόριθμος Διαίρεσης

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά q (πηλίκο) και r (υπόλοιπο) έτσι ώστε

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Δεν θα δώσουμε την απόδειξη που είναι συνέπεια της Καλής Διάταξης των φυσικών αριθμών. Είναι η κλασική διαίρεση των ακεραίων.

Παραδείγματα

(1) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = 354$, $b = 17$.

Απλά εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 354 & 17 \\ 34 & 20 \\ \hline 14 & \end{array}$$

Άρα $354 = 17 \cdot 20 + 14$.

(2) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = 423$, $b = -19$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 423 & 19 \\ 38 & 22 \\ \hline 43 & \\ 38 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Άρα $423 = 19 \cdot 22 + 5 = (-19)(-22) + 5$.

(3) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -5476$, $b = 25$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 5476 & 25 \\ 50 & 219 \\ \hline 47 & \\ 25 & \\ \hline 226 & \\ 225 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Άρα $5476 = 25 \cdot 219 + 1 \Rightarrow -5476 = -25 \cdot 219 - 1 = 25(-219) - 1$. Πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-5476 = 25(-219) + (24 - 25) = 25(-219) - 25 + 24 = 25(-220) + 24.$$

Άρα $q = -220$, $r = 24$.

(4) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -23457$, $b = 37$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 23457 & 37 \\ \hline \cancel{f}22 & 633 \\ \hline 125 & \\ 111 & \\ \hline 147 & \\ 111 & \\ \hline 36 & \end{array}$$

Άρα $23457 = 37 \cdot 633 + 36 \Rightarrow -23457 = -37 \cdot 633 - 36 = 37(-633) - 36$. Όπως και πριν, πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-23457 = 37(-633) + (1 - 37) = 37(-633) - 37 + 1 = 37(-634) + 1.$$

Άρα $q = -634$, $r = 1$.

(5) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -32478$, $b = -41$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 32478 & 41 \\ 287 & 792 \\ \hline 377 & \\ 369 & \\ \hline 88 & \\ 82 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Άρα $32478 = 41 \cdot 792 + 6 \Rightarrow -32478 = -41 \cdot 792 - 6 = (-41) \cdot 792 - 6$. Όπως και πριν, πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-32478 = (-41) \cdot 792 + (35 - 41) = (-41) \cdot 793 + 35.$$

Άρα $q = 793$, $r = 35$.

Η έννοια της διαιρετότητας είναι βασική στην θεωρία των ακεραίων:

- 1 Για $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, το b διαιρεί το a , b/a αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a = kb$. Το b ονομάζεται και παράγοντας ή διαιρέτης του a .
- 2 Ένας θετικός ακέραιος p ονομάζεται **πρώτος** αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το p .

Τα πολλαπλάσια του 2 ονομάζονται **άρτιοι** και αν δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ονομάζονται περιττοί.

Ιδιότητες Διααιρετότητας

- ① $\pm 1/a$, για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.
- ② $a/\pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$.
- ③ $\pm a/a$, για κάθε $a \neq 0$.
- ④ $a/b \Rightarrow \pm a/\pm b$.
- ⑤ Αν b/a , τότε b/na , για $n \in \mathbb{Z}$:

$$b/a \Rightarrow a = kb \Rightarrow na = (nk)b \Rightarrow b/na.$$

- ⑥ Αν b/a_1 και b/a_2 τότε $b/a_1 \pm a_2$: Θα το δείξουμε για το άθροισμα. Η απόδειξη για την διαφορά είναι όμοια:

$$\left. \begin{array}{l} b/a_1 \Rightarrow a_1 = k_1 b, k_1 \in \mathbb{Z} \\ b/a_2 \Rightarrow a_2 = k_2 b, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + a_2 = k_1 b + k_2 b = (k_1 + k_2)b \Rightarrow b/a_1 + a_2.$$

- ⑦ Ο b/a αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια b είναι 0.

Η τελευταία παρατήρηση επάγει το ακόλουθο:

- Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 2 (Φυσικά ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός).
- Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 3.
- Το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 4.
- Γενικά, το γινόμενο n διαδοχικών αριθμών είναι διαιρετό δια n .

Για να το δούμε, έστω $a + i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, n διαδοχικοί αριθμοί. Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια n είναι r ($0 \leq r < n$). Δηλαδή, $a = nq + r$. Παρατηρούμε ότι

$$a + i = nq + r + i$$

Τότε, για κάποιο i , $r + i = n$. Δηλαδή $i = n - r \geq 0$. Γι' αυτό το συγκεκριμένο i ,

$$a + i = nq + n = n(q + 1) \Rightarrow n/a + i.$$

Μοναδική Παραγοντοποίηση Ακεραίων

Έστω $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Τότε

- 1 Υπάρχει ένας πρώτος παράγοντας του a .
- 2 Αν ένας πρώτος p/ab τότε διαιρεί ή τον a ή τον b ή και τους δύο.
- 3 $a = \pm p_1 p_2 \dots p_s$, όπου p_i είναι πρώτος και το γινόμενο είναι μοναδικό εκτός από την σειρά των παραγόντων

- Αν ένας αριθμός b/xy τότε δεν είναι απαραίτητο ο b/x ή b/y . Για παράδειγμα $6/4 \cdot 3$ αλλά $6 \nmid 3$ και $6 \nmid 4$.
- Στην παραγοντοποίηση του $a \in \mathbb{Z}$ συνήθως συλλέγουμε τους ίδιους πρώτους και γράφουμε

$$a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}.$$

Η μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτους και η ιδιότητα (2) της παραπάνω πρότασης, μας δίνει ένα κριτήριο διαιρετότητας. Έστω

$$a = p_1^{r_1} \dots p_v^{r_v}, \quad b = q_1^{s_1} \dots q_w^{s_w}.$$

είναι η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων. Τότε

$$b/a \Leftrightarrow \text{για κάθε } 1 \leq i \leq w \text{ υπάρχει } 1 \leq j \leq v \text{ έτσι ώστε } q_i = p_j, \quad s_i \leq r_j$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πρώτοι παράγοντες του b είναι παράγοντες του a και η δύναμή τους στο b είναι μικρότερη ή ίση με την αντίστοιχη δύναμη στο a .

Για παράδειγμα

$$a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29, \quad b = 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 29$$

τότε b/a και

$$a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29 = kb = (3^3 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)(5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 29)$$

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Ευκλείδης: Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι p_1, \dots, p_s . Έστω $N = p_1 \dots p_s + 1$. Τότε ο N πρέπει να έχει έναν πρώτο παράγοντα p_i . Αλλά

$$\left. \begin{array}{l} p_i/N \\ p_i/p_1 \dots p_s \end{array} \right\} \Rightarrow p_i/N - p_1 \dots p_s \Rightarrow p_i/1$$

και το τελευταίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Υπάρχουν πολλές εικασίες πάνω στους πρώτους. Η βασικότερη είναι η εικασία του Riemann που δίνει πληροφορίες για την κατανομή των πρώτων αριθμών. Συνήθως, οι εικασίες μπλέκουν την πολλαπλασιαστική φύση των πρώτων με προσθετικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η εικασία του Goldbach ρωτάει αν κάθε άρτιος μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δυο περιττών πρώτων. Θα αναφέρουμε και την εικασία των δίδυμων πρώτων: Δύο πρώτοι ονομάζονται δίδυμοι αν η διαφορά τους είναι ίση με 2. Η εικασία ρωτά αν υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι.

Η ακολουθία των πρώτων αριθμών ξεκινάει με:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ...

Ο μεγαλύτερος πρώτος είναι ο $2^{82,589,933} - 1$ με 24, 862, 048 ψηφία. Η τιμή του είναι

148894445742041325547806458472397916603026273992795324185

271289425213239361064475310309971132180337174752834401423587560 ...

παραλείπουμε 24, 861, 808 ψηφία

... 062107557947958297531595208807192693676521782184472526640076912114

355308311969487633766457823695074037951210325217902591

Μια μέθοδος για να βρούμε όλους τους πρώτους, μικρότερους ενός αριθμού n , χρησιμοποιούμε το **κόσκινο του Ερατοσθένη**:

- Ξεκινάμε διαγράφοντας τα πολλαπλάσια του 2 (όλους τους άρτιους).
- Στην συνέχεια διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 3.
- Συνεχίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο, διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του ακεραίου που δεν έχει ήδη διαγραφεί.

Κόσκινο του Ερατοσθένη

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Prime numbers |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | |
| 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | |
| 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | |

Ισχύει μια πρόταση που βοηθάει στο κόσκινο του Ερατοσθένη:

Κάθε ακέραιος n , που δεν είναι πρώτος, έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{n}$:

Γνωρίζουμε ότι ο n έχει έναν πρώτο διαιρέτη p . Αν $p \leq \sqrt{n}$, τελειώσαμε.

Αν $p > \sqrt{n}$ και p/n . Άρα $n = kp$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$n = kp > k\sqrt{n} \Rightarrow (\sqrt{n})^2 > k\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > k.$$

Έστω τώρα q ένας πρώτος διαιρέτης του k . Τότε $q \leq k$ και τελικά

$$\sqrt{n} > k \geq q \Rightarrow q < \sqrt{n}.$$

Ας εξετάσουμε τον $n = 211$. Το 211 θα έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{211} < 15$ ($15^2 = 225$). Οι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του 15 είναι: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κανένας απ' αυτούς δεν διαιρεί το 211. Άρα ο 211 είναι πρώτος.

Το 2020 δεν είναι πρώτος γιατί είναι άρτιος και επομένως διαιρείται δια 2. Έχουμε την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.

Ας εξετάσουμε λοιπόν τον $n = 2021$. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{2021} < 45$ κι αυτό γιατί $45^2 = 2025$.

Εξετάζουμε λοιπόν τους πρώτους μικρότερους του 45: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

2, 3, 5 εύκολα μπορούμε να δούμε ότι δεν διαιρούν το 2021.

$2021 = 7 \cdot 288 + 5$, $2021 = 11 \cdot 83 + 8$, $2021 = 13 \cdot 155 + 6$, $2021 = 17 \cdot 118 + 15$, $2021 = 19 \cdot 106 + 7$

$2021 = 23 \cdot 87 + 20$, $2021 = 29 \cdot 69 + 20$, $2021 = 31 \cdot 65 + 6$, $2021 = 37 \cdot 54 + 23$, $2021 =$

$41 \cdot 49 + 12$, $2021 = 43 \cdot 47$ Άρα $43/2021$ και $2021 = 43 \cdot 47$ είναι η ανάλυση σε πρώτους

παράγοντες του 2021.

Εικασίες Στους Πρώτους

Θα διατυπώσουμε κάποιες (ακόμη άλυτες) εικασίες στους πρώτους:

- (Εικασία του Goldback) Κάθε άρτιος ακέραιος $n > 2$ είναι το άθροισμα δυο πρώτων. Αποδείχθηκε για όλους τους αριθμούς μικρότερους του $4 \cdot 10^{17}$.
- (Περιττή Εικασία του Goldback) Κάθε περιττός ακέραιος $n > 5$ είναι το άθροισμα τριών πρώτων. Αρκεί να αποδειχθεί για όλους τους αριθμούς μεγαλύτερους του 10^{43000} .
- Κάθε άρτιος αριθμός είναι η διαφορά δυο πρώτων.
- Υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι (που διαφέρουν κατά 2). Για παράδειγμα

$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103),$
 $(107, 109), (137, 139), \dots$

Το μεγαλύτερο ζεύγος δίδυμων πρώτων είναι $2996863034895 \times 2^{1290000} \pm 1$ με 388,342 ψηφία.

- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $n^2 + 1$;
- Υπάρχει πάντα ένας πρώτος μεταξύ n^2 και $(n + 1)^2$;

Παραδείγματα

(1) Να δείξετε ότι $6/n^3 - n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 0$ ισχύει γιατί $6/0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $6/k^3 - k$. Θα δείξουμε ότι $6/(k+1)^3 - (k+1)$. Από την υπόθεση $k^3 - k = 6\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Κάνουμε τους υπολογισμούς, εφαρμόζοντας το διώνυμο του Νεύτωνα.

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k(k+1)$$

Παρατηρούμε ότι αν ο k είναι άρτιος τότε το $k(k+1)$ είναι άρτιος. Αν ο k είναι περιττός, τότε το $k+1$ είναι άρτιος και ο $k(k+1)$ είναι άρτιος. Σε κάθε περίπτωση $k(k+1) = 2\mu$ είναι άρτιος. Άρα

$$(k+1)^3 - (k+1) = 6\ell + 3 \cdot 2\mu = 6(\ell + \mu) \Rightarrow 6/(k+1)^3 - (k+1).$$

Θα δώσουμε μια άλλη λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Θα εξετάσουμε την γενική περίπτωση. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης στο a και n :

$$a = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Παρατηρούμε ότι, για $m \in \mathbb{N}$,

$$a^m = (qn + r)^m = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (qn)^{m-s} r^s = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} q^{m-s} n^{m-s} r^s = \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m}{s} (qn)^{m-s} r^s + r^m.$$

Για $0 \leq s \leq m-1$, $m-s > 0$, και επομένως όλοι οι όροι του πρώτου αθροίσματος έχουν το n σαν παράγοντα:

$$a^m = nQ + r^m$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του a^m δια n είναι το ίδιο με το υπόλοιπο της διαίρεσης του r^m δια n .

Τώρα θα δείξουμε ότι $6/n^3 - n$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση.

| | | | | | | |
|--------------------------|---|---|------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| Υπόλοιπο δια 6 του n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Υπόλοιπο δια 6 του n^3 | 0 | 1 | $2^3 = 8 \sim 2$ | $3^3 = 27 \sim 3$ | $4^3 = 64 \sim 4$ | $5^3 = 125 \sim 5$ |

Παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του n και του n^3 δια 6 είναι ίσα. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $n^3 - n$ δια 6 είναι 0. Άρα το 6 διαιρεί το $n^3 - n$.

(2) Δείξτε ότι $9/5^{2n} + 3n - 1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ ισχύει γιατί $9/0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $9/5^{2k} + 3k - 1$. Θα δείξουμε ότι $9/5^{2(k+1)} + 3(k+1) - 1$. Επειδή $9/5^{2k} + 3k - 1$,

$$5^{2k} + 3k - 1 = 9\ell \Rightarrow 5^{2k} = 9\ell - 3k + 1.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 5^{2k+2} + 3k + 3 - 1 &= 5^2 \cdot 5^{2k} + 3k + 2 = 25(9\ell - 3k + 1) + 3k + 2 \\ &= 9(25\ell) - 75k + 25 + 3k + 2 \\ &= 9(25\ell) - 72k + 27 = 9(25\ell - 8k + 3). \end{aligned}$$

Άρα $9/5^{2(k+1)} + 3(k+1) - 1$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(3) Δείξτε ότι $2304/7^{2n} - 48n - 1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ ισχύει γιατί $2304/0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $2304/7^{2k} - 48k - 1$. Θα δείξουμε ότι $2304/7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$. Επειδή $2304/7^{2k} - 48k - 1$,

$$7^{2k} - 48k - 1 = 2304\ell \Rightarrow 7^{2k} = 2304\ell + 48k + 1.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 7^{2k+2} - 48k - 48 - 1 &= 7^2 \cdot 7^{2k} - 48k - 49 = 49(2304\ell + 48k + 1) - 48k - 49 \\ &= 2304(49\ell) + 2352k + 49 - 48k - 49 \\ &= 2304(49\ell) - 2304k = 2304(49\ell - k). \end{aligned}$$

Άρα $2304/7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(4) Δείξτε ότι $17/3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ έχουμε $17/3 \cdot 5 + 2$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $17/3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$. Θα δείξουμε ότι $17/3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4}$. Επειδή $17/3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$,

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17\ell \Rightarrow 2^{3k+1} = 17\ell - 3 \cdot 5^{2k+1}.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} &= 3 \cdot 5^2 \cdot 5^{2k+1} + 2^3 \cdot 2^{3k+1} = 75 \cdot 5^{2k+1} + 8(17\ell - 3 \cdot 5^{2k+1}) \\ &= 75 \cdot 5^{2k+1} + 17(8\ell) - 24 \cdot 5^{2k+1} = 51 \cdot 5^{2k+1} + 17(8\ell) = 17(3 \cdot 5^{2k+1} + 8\ell) \end{aligned}$$

Άρα $17/3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4}$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(5) Δείξτε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών κύβων είναι διαιρετό δια 9.

Δηλαδή πρέπει να δείξουμε $9/n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 0$, $9/0^3 + 1^3 + 2^3$. Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n = k$, δηλαδή $9/k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$. Θα δείξουμε ότι $9/(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$. Από την υπόθεση,

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9\ell \Rightarrow (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9\ell - k^3.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 &= 9\ell - k^3 + (k+3)^3 = 9\ell - k^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\ &= 9\ell + 9k^2 + 27k + 27 = 9(\ell + k^2 + 3k + 3). \end{aligned}$$

Άρα $9/(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(6) Αποδείξτε ότι ο αριθμός

$$z_n = \frac{2n^5}{5} + \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} - \frac{7n}{30}$$

είναι ακέραιος για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$, $z_0 = 0 \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $z_k \in \mathbb{Z}$ και θα δείξουμε ότι ο

$$z_{k+1} = \frac{2(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^4}{2} - \frac{2(k+1)^3}{3} - \frac{7(k+1)}{30} \in \mathbb{Z}.$$

Αναπτύσσουμε έναν προς έναν τους όρους

$$\frac{2(k+1)^5}{5} = \frac{2(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)}{5} = \frac{2k^5}{5} + \frac{2}{5} + (2k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k) = \frac{2k^5}{5} + \frac{2}{5} + s$$

με $s \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{(k+1)^4}{2} = \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} = \frac{k^4}{2} + \frac{1}{2} + (2k^3 + 3k^2 + 2k) = \frac{k^4}{2} + \frac{1}{2} + t$$

με $t \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2(k+1)^3}{3} = \frac{2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)}{3} = \frac{2k^3}{3} + \frac{2}{3} + (2k^2 + 2k) = \frac{2k^3}{3} + \frac{2}{3} + v$$

με $v \in \mathbb{Z}$

$$\frac{7(k+1)}{30} = \frac{7k}{30} + \frac{7}{30}.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω:

$$z_{k+1} = \left(\frac{2k^5}{5} + \frac{k^4}{2} - \frac{2k^3}{3} - \frac{7k}{30} \right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} + s + t + v = z_k + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} + w,$$

όπου $z_k \in \mathbb{Z}$, από την υπόθεση και $w \in \mathbb{Z}$. Επίσης

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} = \frac{12}{30} + \frac{15}{30} - \frac{20}{30} - \frac{7}{30} = 0$$

Άρα $z_{k+1} = z_k + w \in \mathbb{Z}$.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Το $d \in \mathbb{N}$ είναι ο **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** των a και b (συμβολίζεται (a, b)) αν

- (1) Το d είναι θετικός κοινός διαιρέτης των a και b , δηλαδή d/a και d/b .
- (2) Αν c είναι κοινός διαιρέτης των a και b (c/a και c/b), τότε c/d .

Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με

- (2') Αν c είναι θετικός κοινός διαιρέτης των a και b , τότε $c \leq d$.

Παραδείγματα

- ① $(2, 3) = 1.$
- ② $(12, 8) = 4.$
- ③ $(54, 18) = 18.$
- ④ $(234, 42) = 6.$

Ιδιότητες του Μ.Κ.Δ.

- ① $(0, b) = |b|, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
- ② $(1, b) = 1, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
- ③ $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b), a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
- ④ $(ra, rb) = r(a, b), r \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- ⑤ $(a + kb, b) = (a, b), k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Θα αποδείξουμε την τελευταία ιδιότητα:

Έστω $d = (a, b)$ και $d' = (a + kb, b)$.

Τότε d/a και d/b . Άρα d/kb και $d/a + kb$ και, από τον ορισμό, d/d' .

Όμοια, $d'/a + kb$ και d'/b . Άρα d'/kb και $d'/a + kb - kb$, που σημαίνει ότι d'/a . Άρα d'/d .

Έχουμε d/d' και d/d , που σημαίνει ότι $d = \pm d'$. Αλλά και οι δυο αριθμοί είναι θετικοί, επομένως $d = d'$.

Η ιδιότητα αυτή δίνει ότι, αν $a = bq + r$, τότε $(a, b) = (b, r)$.

Ισχύει ότι: Ο Μ.Κ.Δ. δυο αριθμών είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους στην μικρότερη δύναμη.

Ουσιαστικά το παραπάνω είναι συνέπεια του ορισμού. Έστω d είναι ο γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων των a και b στην μικρότερη δύναμη. Έστω

$$a = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \cdots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \cdots y_w^{t_w}$$

όπου p_1, \dots, p_r είναι οι κοινοί πρώτοι και $m_i = \min\{s_i, t_i\}$, ο ελάχιστος εκθέτης κάθε κοινού πρώτου. Θέτουμε $d = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$

- Τότε ο d διαιρεί και το a και το b .
- Αν το c διαιρεί το a και το b , τότε το c είναι ένα γινόμενο κάποιων κοινών πρώτων παραγόντων και κάθε πρώτος είναι στην δύναμη μικρότερη και από τις αντίστοιχες δυνάμεις αυτού του πρώτου στα a και b .

Θα δώσουμε παραδείγματα τις τελευταίας παρατήρησης:

- $a = 3^5 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 17^3 \cdot 23^2 \cdot 37$, $b = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 19 \cdot 21$

$$(a, b) = 3^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2.$$

- $a = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17^2 \cdot 23^2 \cdot 41^2$, $b = 5^3 \cdot 7^4 \cdot 17 \cdot 41$

$$(a, b) = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17 \cdot 41.$$

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Το παρακάτω θεώρημα δίνει τον τρόπο υπολογισμού του Μ.Κ.Δ. δυο ακεραίων.

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \dots & & \dots \\ r_k &= r_{k+1}q_{k+2} + r_{k+2}, & 0 \leq r_{k+2} < r_{k+1} \\ \dots & & \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}, & \end{aligned}$$

Τότε $(a, b) = r_n$ (το τελευταίο μη-μηδενικό υπόλοιπο).

Παρατηρήσεις

- ① Η διαδικασία κάποτε σταματάει γιατί έχουμε μια ακολουθία από θετικούς ακέραιους:

$$0 \leq r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < b.$$

- ② Το Θεώρημα ισχύει γιατί, από τις ιδιότητες του Μ.Κ.Δ.,

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$

γιατί r_n/r_{n-1} .

Πριν ξεκινήσουμε τα παραδείγματα, θα δώσουμε και μια άλλη ιδιότητα του Μ.Κ.Δ.

Βασική Ιδιότητα του Μ.Κ.Δ.

Έστω $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

- 1 Έστω $d = (a, b)$. Τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $d = as + bt$.
- 2 Ο Μ.Κ.Δ. είναι η μικρότερη θετική τιμή των συνδυασμών $as + bt$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

Δυο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ονομάζονται **σχετικά πρώτοι** αν $(a, b) = 1$. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ισχυρότερο για τους σχετικά πρώτους ακέραιους:

Δηλαδή οι a, b δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη και κατ' επέκταση δεν έχουν κανέναν πρώτο κοινό διαιρέτη.

$$(12, 35) = 1, (18, 49) = 1, (21, 65) = 1.$$

Για τους σχετικά πρώτους αριθμούς, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Δυο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ είναι σχετικά πρώτοι αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $1 = as + bt$.

Πρέπει να αποδείξουμε δυο προτάσεις:

- Αν $(a, b) = 1$, τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$.
- Αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$, τότε $(a, b) = 1$.

Είναι προφανές ότι το δεύτερο αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $(a, b) = d > 1$: Τότε από την Βασική Ιδιότητα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $d = as + bt$. Επίσης, $kd = a(ks) + b(kt)$, $k \in \mathbb{Z}$ και kd δεν είναι ο Μ.Κ.Δ. αν $k > 1$.

Και οι δυο προτάσεις είναι αποτέλεσμα της Βασικής Ιδιότητας. Θα δώσουμε μια εύκολη απόδειξη της δεύτερης πρότασης:

Έστω ότι υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$. Έστω $(a, b) = d$. Τότε

$$\left. \begin{array}{l} d/a \\ d/b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d/as \\ d/bt \end{array} \right\} \Rightarrow d/as + bt \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

Ιδιότητες των Σχετικά Πρώτων Αριθμών

(1) Αν οι a και c είναι σχετικά πρώτοι και b/c , τότε οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.

Έχουμε $(a, c) = 1$. Άρα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$, $as + ct = 1$.

Επίσης b/c , που σημαίνει ότι $c = bk$, $k \in \mathbb{Z}$. Συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις έχουμε:

$$as + b(kt) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1.$$

(2) Έστω $(a, b) = 1$ και a/bc , τότε a/c .

Έχουμε $(a, b) = 1$. Άρα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$, $as + bt = 1$.
Πολλαπλασιάζουμε την σχέση επί c , $asc + btc = c$. Τώρα

$$\left. \begin{array}{l} a/asc \\ a/(bc)t \end{array} \right\} \Rightarrow a/asc + bct \Rightarrow a/c,$$

(3) Έστω $(a, b) = 1$, a/c , και b/c , τότε ab/c .

Έχουμε $c = ak = bl$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Τότε $b/bl \Rightarrow b/ak$. Από την προηγούμενη άσκηση, b/k γιατί $(a, b) = 1$. Άρα $k = bm$.
Συνδυάζοντας τις σχέσεις, $c = abm \Rightarrow ab/c$.

(4) Έστω $(a, b) = 1$. Τότε $(a + b, a - b) = 1$ ή 2 .

Έστω $d = (a + b, a - b)$. Τότε

$$\left. \begin{array}{l} d/a + b \\ d/a - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d/a + b + a - b \\ d/a + b - a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d/2a \\ d/2b \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε ότι το d δεν μπορεί να διαιρεί συγχρόνως και το a και το b , γιατί είναι σχετικά πρώτοι. Άρα $d/2$, που σημαίνει $d = 1, 2$.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί ο $(6240, 12)$ και να γραφτεί στην μορφή $6240s + 12t$.

Παρατηρούμε ότι $6240 = 12 \cdot 520$. Άρα $12/6240$ και $(6240, 12) = 12$. Επομένως:

$$12 = 6240 \cdot 0 + 12 \cdot 1$$

(2) Να βρεθεί ο $(345, 24)$ και να γραφτεί στην μορφή $345s + 24t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$345 = 24 \cdot 14 + 9$$

$$24 = 9 \cdot 2 + 6$$

$$9 = 6 \cdot 1 + 3$$

$$6 = 3 \cdot 2$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned} 3 &= 9 - 6 = 9 - (24 - 9 \cdot 2) = 9 - 24 + 9 \cdot 2 \\ &= 9 \cdot 3 - 24 = (345 - 24 \cdot 14) \cdot 3 - 24 = 3 \cdot 345 - 42 \cdot 24 - 24 \\ &= 3 \cdot 345 - 43 \cdot 24. \end{aligned}$$

(3) Να βρεθεί ο $(11247, 342)$ και να γραφτεί στην μορφή $11247s + 342t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$11247 = 342 \cdot 32 + 303$$

$$342 = 303 \cdot 1 + 39$$

$$303 = 39 \cdot 7 + 30$$

$$39 = 30 \cdot 1 + 9$$

$$30 = 9 \cdot 3 + 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned} 3 &= 30 - 9 \cdot 3 = 30 - (39 - 30) \cdot 3 = 30 - 39 \cdot 3 + 30 \cdot 3 \\ &= 30 \cdot 4 - 39 \cdot 3 = (303 - 39 \cdot 7) \cdot 4 - 39 \cdot 3 = 303 \cdot 4 - 39 \cdot 28 - 39 \cdot 3 \\ &= 303 \cdot 4 - 39 \cdot 31 = 303 \cdot 4 - (342 - 303) \cdot 31 = 303 \cdot 4 - 342 \cdot 31 + 303 \cdot 31 \\ &= 303 \cdot 35 - 342 \cdot 31 = (11247 - 342 \cdot 32) \cdot 35 - 342 \cdot 31 \\ &= 11247 \cdot 35 - 342 \cdot 1120 - 342 \cdot 31 \\ &= 35 \cdot 11247 - 1151 \cdot 342 \end{aligned}$$

(4) Να βρεθεί ο $(15347, 225)$ και να γραφτεί στην μορφή $11247s + 342t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$15347 = 225 \cdot 68 + 47$$

$$225 = 47 \cdot 4 + 37$$

$$47 = 37 \cdot 1 + 10$$

$$37 = 10 \cdot 3 + 7$$

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 3 \cdot 2 = 7 - (10 - 7) \cdot 2 = 7 - 10 \cdot 2 + 7 \cdot 2 \\ &= 7 \cdot 3 - 10 \cdot 2 = (37 - 10 \cdot 3) \cdot 3 - 10 \cdot 2 = 37 \cdot 3 - 10 \cdot 9 - 10 \cdot 2 \\ &= 37 \cdot 3 - 10 \cdot 11 = 37 \cdot 3 - (47 - 37) \cdot 11 = 37 \cdot 3 - 47 \cdot 11 + 37 \cdot 11 = 37 \cdot 14 - 47 \cdot 11 \\ &= (225 - 47 \cdot 4) \cdot 14 - 47 \cdot 11 = 225 \cdot 14 - 47 \cdot 56 - 47 \cdot 11 = 225 \cdot 14 - 47 \cdot 67 \\ &= 225 \cdot 14 - (15347 - 225 \cdot 68) \cdot 67 = 225 \cdot 14 - 15237 \cdot 67 + 225 \cdot 4556 - 15347 \cdot 67 + 225 \cdot 4570 \end{aligned}$$

(5) Εάν p είναι πρώτος και $a \in \mathbb{Z}$, τότε $(a, p) = 1$ ή p .

Έχουμε δυο περιπτώσεις:

- $p \nmid a$. Τότε $(a, p) = 1$, γιατί δεν μπορούν να έχουν άλλους κοινούς παράγοντες..
- $p \mid a$. Τότε $(a, p) = p$.

(6) Να δείξετε ότι $30/n^5 - n$, για $n \in \mathbb{N}$.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε απ' ευθείας την μαθηματική επαγωγή. Θα δείξουμε τις δυσκολίες. Προφανώς η πρόταση ισχύει για $n = 0$ γιατί $30/0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $30/k^5 - k$. Αυτό σημαίνει ότι $k^5 - k = 30m$, $m \in \mathbb{N}$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $30/(k + 1)^5 - (k + 1)$.

Όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}(k + 1)^5 - (k + 1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1, \quad (\text{Διώνυμο του Νεύτωνα}) \\ &= (k^5 - k) + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\ &= 30m + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k\end{aligned}$$

Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι

$$30/5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \Leftrightarrow 6/k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k$$

Αυτό δεν είναι αδύνατο αλλά θέλει περισσότερη ανάλυση.

Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μέθοδο. Παρατηρούμε ότι

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n((n^2)^2 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

Τώρα το $2/n(n + 1)$ ως γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων και συνεπώς $2/n^5 - n$.

Επίσης $3/(n - 1)n(n + 1)$ ως γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, οπότε $3/n^5 - n$.

Αλλά $(2, 3) = 1$, είναι σχετικά πρώτοι, άρα $2 \cdot 3/n^5 - n \Rightarrow 6/n^5 - n$.

Έχουμε ότι $30 = 6 \cdot 5$ και $(5, 6) = 1$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $5/n^5 - n$. Έχουμε δει δυο τρόπους για να το αποδείξουμε:

- Ο πρώτος είναι με επαγωγή.
- Ο δεύτερος είναι με την χρήση υπολοίπων.

Πρώτα θα δείξουμε επαγωγικά ότι $5/n^5 - n$, $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς ισχύει για $n = 0$ ($5/0$).

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $5/k^5 - k$. Αυτό σημαίνει ότι $k^5 - k = 5m$, $m \in \mathbb{N}$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή ότι $5/(k + 1)^5 - (k + 1)$.

Όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}(k + 1)^5 - (k + 1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1, \quad (\text{Διώνυμο του Νεύτωνα}) \\ &= (k^5 - k) + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k = 5m + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \\ &= 5(m + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)\end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι $5/(k + 1)^5 - (k + 1)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη

Η δεύτερη μέθοδος χρησιμοποιεί τα υπόλοιπα.

| | | | | | |
|--------------------------|---|---|-------------------|--------------------|---------------------|
| Υπόλοιπο δια 5 του n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Υπόλοιπο δια 5 του n^5 | 0 | 1 | $2^5 = 32 \sim 2$ | $3^5 = 343 \sim 3$ | $4^5 = 1024 \sim 4$ |

Παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του n και του n^5 δια 5 είναι ίσα. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $n^5 - n$ δια 5 είναι 0. Άρα το 5 διαιρεί το $n^5 - n$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** $\ell = [a, b]$ δυο ακεραίων είναι ο θετικός ακέραιος έτσι ώστε

- 1 $a/\ell, b/\ell$, δηλαδή το ℓ είναι πολλαπλάσιο και του a και του b .
- 2 Αν a/m και b/m τότε ℓ/m , δηλαδή ℓ διαιρεί κάθε κοινό πολλαπλάσιο των a και b .

$$[2, 3] = 6, [6, 8] = 24, [12, 6] = 12, [9, 2] = 18.$$

Ας υπολογίσουμε τον $[12, 15]$: Γράφουμε τα πολλαπλάσια του καθενός:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135 ...

Βλέπουμε ότι το 60 είναι το πρώτο πρώτο κοινό πολλαπλάσιο. Άρα $[12, 15] = 60$.
Επίσης το επόμενο κοινό πολλαπλάσιο είναι το 120 και $60/120$.

Και για τρεις αριθμούς $[9, 15, 18]$: Γράφουμε τα πολλαπλάσια του καθενός:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, ...

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180 ...

18, 36, 54, 72, 90.

Βλέπουμε ότι το 90 είναι το πρώτο πρώτο κοινό πολλαπλάσιο. Άρα $[9, 15, 18] = 90$.

Όπως και με τον Μ.Κ.Δ., έχουμε την επόμενη πρόταση για τον υπολογισμό του Ε.Κ.Π.:

Έστω

$$a = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}$$

όπου p_1, \dots, p_r είναι οι κοινοί πρώτοι και $M_i = \max\{s_i, t_i\}$, ο μεγαλύτερος εκθέτης κάθε κοινού πρώτου. Θέτουμε $\ell = p_1^{M_1} \dots p_r^{M_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}$, το γινόμενο κοινών και μη-κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη. Τότε

- Ο ℓ είναι κοινό πολλαπλάσιο των a και b ($a/\ell, b/\ell$).
- Αν το m είναι κοινό πολλαπλάσιο των a και b , τότε το m έχει σαν παράγοντες όλους τους πρώτους που εμφανίζονται στην διάσπαση των a και b στην μεγαλύτερη δύναμη και συνεπώς ℓ/m

Άρα $\ell = [a, b]$.

Η πρόταση ισχύει και για πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί ο $[24, 42]$.

Ξεκινάμε με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες.

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow [24, 42] = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$$

(2) Να βρεθεί ο $[18, 28, 54]$.

Ξεκινάμε με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες.

$$18 = 2 \cdot 3^2, \quad 28 = 2^2 \cdot 7, \quad 54 = 2 \cdot 3^3 \Rightarrow [18, 28, 54] = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 756.$$

Μ.Κ.Δ και Ε.Κ.Π.

Θα δείξουμε την σχέση μεταξύ Μ.Κ.Δ και Ε.Κ.Π.

Για δυο μη-μηδενικούς ακέραιους a και b ισχύει,

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$a \cdot b = a, b.$$

Μια σημαντική παρατήρηση που ισχύει για όλους τους αριθμούς είναι:

$$\max\{r, s\} + \min\{r, s\} = r + s.$$

Έστω

$$a = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}.$$

Για του κοινούς πρώτους p_i :

- Στο γινόμενο $a \cdot b$ εμφανίζονται με εκθέτη $s_i + t_i$.
- Στο γινόμενο a, b εμφανίζονται με εκθέτη $\max\{s_i, t_i\} + \min\{s_i, t_i\}$, που από την παρατήρηση είναι ίσο με $s_i + t_i$.

Άρα οι εκθέτες των κοινών πρώτων είναι ίσοι.

Το γινόμενο των μη-κοινών εκθετών εμφανίζεται στο $a \cdot b$ και στο $[a, b]$.

Άρα όλοι οι πρώτοι παράγοντες του $a \cdot b$ εμφανίζονται στο $[a, b]$, με τον ίδιο εκθέτη. Συνεπώς οι δυο αριθμοί είναι ίσοι.

Παράδειγμα

Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των

$$a = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19^2, \quad b = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19.$$

και να επαληθεύσετε ότι $a \cdot b = a, b$.

Από την θεωρία έχουμε

$$[a, b] = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2, \quad (a, b) = 2^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19.$$

$$a, b = (2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^2)(2^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19) = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^8 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^3.$$

Και για το γινόμενο

$$ab = (2^{12} \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19^2)(2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19) = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^8 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19^3.$$

Ρητοί Αριθμοί

Το σύνολο των ρητών αριθμών ορίζεται ως

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

δηλαδή οι ρητοί αριθμοί είναι πηλίκια ακεραίων. Φυσικά η διαίρεση δεν είναι κλειστή πράξη στους ακέραιους και επομένως ένας ρητός δεν είναι απαραίτητα ακέραιος. Ο a ονομάζεται **αριθμητής** και ο b **παρονομαστής** του κλάσματος. Απαιτούμε ο παρονομαστής να μην είναι 0, γιατί η διαίρεση δια 0 δεν έχει νόημα. Βασικά οι ρητοί αριθμοί αναπαριστούν αναλογίες. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το επόμενο:

Μια πίτα κόβεται σε 5 ίσα κομμάτια και δίνονται σε έναν από τους καλεσμένους 2 κομμάτια. Σ' αυτήν την περίπτωση ο καλεσμένος πήρε τα $\frac{2}{5}$ της πίτας. Τώρα, αν αντί για 5 κομμάτια διαιρέσουμε την πίτα σε 10 ίσα κομμάτια και δώσουμε στον ίδιο καλεσμένο 4 κομμάτια, παρατηρούμε ότι ο καλεσμένος, τελικά, πήρε την ίδια ποσότητα από την πίτα. Κι αυτό γιατί για να κόψουμε την πίτα σε 10 ίσα κομμάτια, μετά την διαίρεση σε 5 ίσα κομμάτια, κόψαμε κάθε κομμάτι στην μέση.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει και την βασική ιδιότητα των ρητών:

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Χρησιμοποιώντας, αυτήν την σχέση μπορούμε να δείξουμε

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = cb.$$

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της βασικής σχέσης:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db} \iff ad = cb$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των ρητών περιέχει το σύνολο των ακεραίων. Το $n \in \mathbb{Z}$ γράφεται ως $n/1 \in \mathbb{Q}$. Ένα κλάσμα $\frac{a}{b}$, με a και b σχετικά πρώτοι ονομάζεται **ανάγωγο**. Δηλαδή ένα ανάγωγο κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω.

Όπως στους ακέραιους έχουμε πράξεις και στους ρητούς:

Πρόσθεση: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Πολλαπλασιασμός: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Οι παραπάνω κανόνες είναι πολύ γενικοί και τις περισσότερες φορές έχουμε διαγραφές που απλοποιούν την μορφή του κλάσματος. Ειδικά με την πρόσθεση έχουμε την εξής απλοποίηση: Για το άθροισμα

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

έστω $\ell = [b, d]$, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και $\ell = bb_1 = dd_1$. Τότε

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab_1}{bb_1} + \frac{cd_1}{dd_1} = \frac{ab_1}{\ell} + \frac{cd_1}{\ell} = \frac{ab_1 + cd_1}{\ell},$$

Ας εξετάσουμε τον λόγο που πρέπει οι παρονομαστές να είναι ίδιοι. Θυμόμαστε ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι πράξεις που συνδυάζουν ίδια αντικείμενα.

Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προσθέσουμε 3 πορτοκάλια και 4 μήλα. Δεν μπορούμε να δηλώσουμε τι είναι το αποτέλεσμα.

Αλλά μπορούμε να πούμε ότι έχουμε 7 **φρούτα**. Δηλαδή, για να κάνουμε την πρόσθεση, ανάγουμε τα αντικείμενα σε μια άλλη κατηγορία όπου ανήκουν και τα δυο. Θα μπορούσαμε να πούμε 7 φαγώσιμα, 7 καρπούς ή οποιαδήποτε κατηγορία όπου και τα δύο ανήκουν.

Το ίδιο γίνεται και με τα κλάσματα. Όταν οι παρονομαστές είναι διαφορετικοί, ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες και έτσι δεν μπορούν να προστεθούν. Για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε το άθροισμα $1/2 + 1/3$. Το πρώτο κλάσμα είναι το μισό μιας ολότητας και το δεύτερο το $1/3$.

Δηλαδή υποδηλώνουν διαφορετικά «είδη». Για να προσθέσουμε, πρέπει να τα ανάγουμε στο ίδιο επίπεδο (όπως τα πορτοκάλια και μήλα σε φρούτα). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να δηλώνουν ίδια μέρη του όλου, δηλαδή να έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Φυσικά και άλλα πολλαπλάσια του κοινού παρονομαστή θα είναι επιτρεπτά.

Παρατηρούμε ότι οι ρητοί είναι κλειστοί ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, την αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, όπως οι ακέραιοι. Επιπλέον οι μη-μηδενικοί ρητοί είναι κλειστοί και ως προς την διαίρεση. Γι' αυτό και ξεκινάμε με την έννοια του αντίστροφου ενός ρητού:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Αυτός είναι και ο γνωστός τύπος για τα σύνθετα κλάσματα:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Παραδείγματα

(1) Να βρεθούν τα αθροίσματα και να αναχθεί το αποτέλεσμα στην ανάγωγη μορφή:

$$(i) \frac{1}{2} + \frac{1}{5}, (ii) \frac{3}{8} + \frac{7}{12}, (iii) \frac{3}{10} + \frac{1}{18}, (iv) \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}.$$

(i) Παρατηρούμε ότι $[2, 5] = 10$ και $10 = 2.5 = 5.2$. Έχουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1.5}{2.5} + \frac{1.2}{5.2} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $[8, 12] = 24$ και $24 = 8.3 = 2.12$. Έχουμε

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{3.3}{8.3} + \frac{7.2}{12.2} = \frac{9}{24} + \frac{14}{24} = \frac{23}{24}.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $[10, 18] = 90$ και $90 = 10 \cdot 9 = 18 \cdot 5$. Έχουμε

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{18} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 5}{18 \cdot 5} = \frac{27}{90} + \frac{5}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}.$$

(iv) Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές: $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$. Άρα $[4, 6, 15, 18] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ και $180 = 4 \cdot 45 = 6 \cdot 30 = 15 \cdot 12 = 18 \cdot 10$. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} &= \frac{3 \cdot 45}{4 \cdot 45} + \frac{5 \cdot 30}{6 \cdot 30} + \frac{1 \cdot 12}{15 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 10}{18 \cdot 10} = \frac{135}{180} + \frac{150}{180} + \frac{12}{180} + \frac{10}{180} = \\ &= \frac{135}{180} + \frac{150}{180} + \frac{12}{180} + \frac{10}{180} = \frac{307}{180}. \end{aligned}$$

(2) Να απλοποιήσετε τις επόμενες εκφράσεις:

$$(i) \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right), \quad (ii) \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right), \quad (iii) \frac{5}{6} \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{7} - \frac{2}{15} \right),$$

(i) Κάνουμε πρώτα τις προσθέσεις:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{8}{12} + \frac{9}{12} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{12} = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}.$$

Διαφορετικά η απλοποίηση μπορεί να γίνει πριν:

$$\cancel{\frac{2}{3}} \cdot \frac{17}{\cancel{12}6} = \frac{17}{18}.$$

(ii) Κάνουμε πρώτα τις προσθέσεις. Γι' αυτόν τον λόγο, παρατηρούμε ότι ο Ε.Κ.Π.
 $[2, 3, 5, 6] = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{5} \left(\frac{1 \cdot 15}{2 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} \right) = \frac{4}{5} \left(\frac{15}{30} + \frac{20}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} \right) =$$
$$\frac{4}{5} \cdot \frac{15 + 20 + 6 + 5}{30} = \frac{4}{5} \cdot \frac{46}{30} = \frac{2}{5} \cdot \frac{46}{15} = \frac{92}{75}.$$

(iii) Θα δώσουμε μια διαφορετική λύση. Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και μετά θα κάνουμε τις προσθέσεις.

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{7} - \frac{2}{15} \right) &= \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 12}{6 \cdot 7} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 15} = \frac{4}{6} + \frac{5 \cdot 2}{7} - \frac{10}{90} = \\ \frac{2}{3} + \frac{10}{7} - \frac{1}{9} &= \frac{2 \cdot 63 + 10 \cdot 27 - 21}{189} = \frac{126 + 270 - 21}{189} = \frac{375}{189} = \frac{125}{63}.\end{aligned}$$

(3) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{11}{20} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right)$$

Κάνουμε τις πράξεις πρώτα μέσα στην παρένθεση:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} - \frac{2}{15} + \frac{10}{3} + \frac{1}{12}$$

Ο Ε.Κ.Π. $[3, 15, 12] = 60$. Άρα

$$\frac{2 \cdot 20}{3 \cdot 20} - \frac{2 \cdot 4}{15 \cdot 4} + \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 20} + \frac{5}{12 \cdot 5} = \frac{40 + 8 + 200 + 5}{60} = \frac{253}{60}$$

Και τελικά

$$\frac{11}{20} \div \frac{253}{60} = \frac{11}{20} \cdot \frac{60}{253} = \frac{3}{23}$$

γιατί $253 = 11 \cdot 23$.

(4) Να γραφτούν τα παρακάτω ως απλά κλάσματα.

$$(i) \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}, (ii) \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}, (iii) \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}.$$

(i) Κάνουμε τις πράξεις, χρησιμοποιώντας τους κανόνες για τα σύνθετα κλάσματα.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(ii) Και πάλι κάνουμε τις πράξεις ξεκινώντας από το τέλος, χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

(iii) Όπως και το (ii):

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}.$$

(5) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}$$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα απλοποίησης των σύνθετων κλασμάτων:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} + \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{6} = \frac{13}{6}$$

(6) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Ο ευκολότερος τρόπος σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι να ανάγουμε όλα τα κλάσματα με παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, τελικά έχουμε

$$\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2-1}.$$

(7) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1}.$$

Όπως και πριν, ανάγουμε όλα τα κλάσματα με παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών:

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 - x - (x^2 + 2x)}{(x+2)(x-1)}.$$

Απλοποιούμε τις πράξεις

$$\frac{x^2 - x - (x^2 + 2x)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2 - x - x^2 - 2x}{(x+2)(x-1)} = -\frac{3x}{(x+2)(x-1)}.$$

(8) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x-1}.$$

Όπως και πριν, ανάγουμε όλα τα κλάσματα με παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} - \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)} - \frac{x^2-4}{(x+2)(x-1)}$$

Εδώ πάλι χρησιμοποιούμε τον τύπο για την διαφορά τετραγώνων.

$$\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2-1-x^2+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}.$$

Ανισότητες Κλασμάτων

Μια βασική ιδιότητα των κλασμάτων είναι ότι

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$

Για παράδειγμα

$$\frac{14}{23}, \frac{28}{46} \quad 14 \cdot 46 = 23 \cdot 28 = 644 \Rightarrow \frac{14}{23} = \frac{28}{46}$$

Θα επεκτείνουμε την διαδικασία αυτή για ανισότητες. Υποθέτουμε πάντα ότι οι παρονομαστές είναι θετικοί. Αυτό μπορούμε να το υποθέσουμε γιατί:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}, \quad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}.$$

Έχοντας την παραπάνω υπόθεση:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc.$$

Μερικές άμεσες συνέπειες

- Για δυο κλάσματα με τον ίδιο παρονομαστή, το μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μεγαλύτερο αριθμητή.
- Για δυο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή, το μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή.

Παραδείγματα

(1) Να συγκριθούν τα κλάσματα:

$$(i) \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, (ii) -\frac{5}{7}, -\frac{6}{13}, (iii) \frac{12}{17}, \frac{13}{20}.$$

(i) Χρησιμοποιούμε την βασική παρατήρηση:

$$2 \cdot 7 = 14, 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{3}{7}.$$

(ii) Με την ίδια μέθοδο, κάνοντας αρνητικούς τους αριθμητές

$$(-5) \cdot 13 = -65, (-6) \cdot 7 = -42 \Rightarrow -\frac{5}{7} < -\frac{6}{13}.$$

(iii) Όμοια:

$$12 \cdot 20 = 240, 17 \cdot 13 = 221 \Rightarrow \frac{12}{17} > \frac{13}{20}$$

Αν το γινόμενο που περιέχει τον αριθμητή είναι μεγαλύτερο του άλλου γινομένου, τότε το κλάσμα με αυτόν τον αριθμητή είναι μεγαλύτερο του άλλου.

(2) Να συγκριθούν τα κλάσματα:

$$(i) \frac{13}{27}, \frac{15}{37}, (ii) \frac{123}{234}, \frac{234}{445}, (iii) \frac{4589}{11378}, \frac{6872}{13785}.$$

(i) Χρησιμοποιούμε την βασική παρατήρηση:

$$13 \cdot 37 = 481, \quad 27 \cdot 15 = 405 \Rightarrow \frac{13}{27} > \frac{15}{37}.$$

(ii) Με την ίδια μέθοδο:

$$123 \cdot 445 = 54735, \quad 234^2 = 54756 \Rightarrow \frac{123}{234} < \frac{234}{445}.$$

(iii) Όπως και πριν:

$$4598.13785 = 63383430, \quad 6872.11378 = 78189616 \Rightarrow \frac{4589}{11378} < \frac{6872}{13785}.$$

(3) Ο Γιάννης τρέχει 4km σε 30min. Μ' αυτόν τον ρυθμό πόσο θα τρέξει σε 45min;

Έστω λοιπὸν θα τρέξει x km σε 45min. Τότε, αναλογικά, θα ισχύει

$$\frac{4}{30} = \frac{x}{45} \implies 4 \cdot 45 = 30x \implies 180 = 30x \implies x = 6 \text{ km}.$$

(4) Ένα μείγμα πρωινού περιέχει ρύζι, σιτάρι και καλαμπόκι σε αναλογία 2:3:5. Εάν μια σακούλα του μείγματος περιέχει 3 κιλά ρύζι, πόσο καλαμπόκι περιέχει;

Έστω ότι περιέχει x κιλά καλαμπόκι. Χρησιμοποιούμε τις αναλογίες:

$$\frac{\text{ρύζι}}{\text{καλαμπόκι}} = \frac{2}{5} = \frac{3}{x} \implies 2x = 15 \implies x = 7.5$$

(5) Ο Γιώργος έχει 30 βόλους, 18 από τους οποίους είναι κόκκινοι και οι 12 μπλε. Η Μαρία έχει 20 βόλους οι οποίοι είναι είτε κόκκινοι είτε μπλε. Αν ο λόγος των κόκκινων βόλων προς τους μπλε είναι ίδιος για τον Γιώργο και την Μαίρη, τότε πόσους κόκκινους και πόσους μπλε βόλους έχει η Μαίρη;

Έστω η Μαίρη έχει x μπλε βόλους. Άρα θα έχει $20 - x$ κόκκινους βόλους. Τώρα οι αναλογίες κόκκινων προς μπλε είναι ίδια για τον Γιώργο και την Μαίρη. Άρα

$$\frac{\text{κόκκινοι}}{\text{μπλε}} = \frac{18}{12} = \frac{20 - x}{x},$$

όπου το δεύτερο κλάσμα είναι του Γιώργου και το τρίτο της Μαίρης. Άρα

$$\frac{3}{2} = \frac{20 - x}{x} \Rightarrow 3x = 2(20 - x) = 40 - 2x \Rightarrow 3x + 2x = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8.$$

Άρα η Μαίρη έχει 8 μπλε και $20 - 8 = 12$ κόκκινους βόλους.

(6) Υπάρχουν συνολικά 42 υπολογιστές στο εργαστήριο. Κάθε ένας απ' αυτούς τρέχει ένα από τα τρία λειτουργικά συστήματα, Windows, MacOS, ή Linux. Η αναλογία MacOS, Windows, Linux είναι 2:5:7. Να βρείτε τον αριθμό των υπολογιστών που τρέχει κάθε λειτουργικό σύστημα.

Έστω ότι x υπολογιστές τρέχουν MacOS, y τρέχουν Windows και z τρέχουν Linux. Γνωρίζουμε ότι

$$x + y + z = 42.$$

Θα εκφράσουμε τα y και z ως προς x :

$$\frac{\text{MacOS}}{\text{Windows}} = \frac{2}{5} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2y = 5x \Rightarrow y = \frac{5}{2}x$$
$$\frac{\text{MacOS}}{\text{Linux}} = \frac{2}{7} = \frac{x}{z} \Rightarrow 2z = 7x \Rightarrow z = \frac{7}{2}x$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση:

$$x + \frac{2x}{5} + \frac{7x}{2} = 42 \Rightarrow \frac{2x}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{7x}{2} = 42 \Rightarrow \frac{14x}{2} = 42 \Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6.$$

Άρα έχουμε

- 6 υπολογιστές που τρέχουν MacOS,
- $\frac{5}{2} \cdot 6 = 5 \cdot 3 = 15$ υπολογιστές που τρέχουν Windows,
- $\frac{7}{2} \cdot 6 = 7 \cdot 3 = 21$ υπολογιστές που τρέχουν Linux.

Άρρητοι

Ένας αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος**. Θα ξεκινήσουμε με το πιο κλασικό παράδειγμα.

Πυθαγόρας

Η $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Έστω ότι η $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχει ένα ανάγωγο κλάσμα έτσι ώστε

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1.$$

Μ' αυτήν την υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αρχικά αυτό σημαίνει:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $2b^2$ είναι άρτιος, και ο a^2 είναι άρτιος. Δηλαδή $2/a^2 \Rightarrow 2/a$, γιατί ο 2 είναι πρώτος και αν διαιρεί ένα γινόμενο, τότε διαιρεί έναν από τους παράγοντες.

Άρα $a = 2k$ και $a^2 = 4k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

Επειδή ο b^2 είναι άρτιος, ο b είναι άρτιος και $b = 2\ell$. Αυτό σημαίνει:

$$(a, b) \geq 2$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι. Συνεπώς η $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.

Η ίδια ακριβώς απόδειξη αποδεικνύει το επόμενο:

Αν ο p είναι πρώτος, \sqrt{p} είναι άρρητος αριθμός.

Έστω ότι η \sqrt{p} είναι ρητός. Τότε υπάρχει ένα ανάγωγο κλάσμα έτσι ώστε

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1.$$

Μ' αυτήν την υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αρχικά αυτό σημαίνει:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow pb^2 = a^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο pb^2 διαιρείται δια p , άρα και ο a^2 διαιρείται δια p . Δηλαδή $p/a^2 \Rightarrow p/a$, γιατί ο p είναι πρώτος και αν διαιρεί ένα γινόμενο, τότε διαιρεί έναν από τους παράγοντες. Άρα $a = pk$ και $a^2 = p^2k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$pb^2 = p^2k^2 \Rightarrow b^2 = pk^2$$

Επειδή ο b^2 διαιρείται δια p , ο b διαιρείται δια p και $b = p\ell$. Αυτό σημαίνει:

$$(a, b) \geq p$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι. Συνεπώς η \sqrt{p} δεν είναι ρητός.

Η ίδια ιδέα αποδεικνύει και το γενικό αποτέλεσμα:

Αν ο m είναι θετικός ακέραιος που δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε η \sqrt{m} είναι άρρητος αριθμός.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, θα ξεκινήσουμε με κάποιες παρατηρήσεις. Έστω

$$m = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}.$$

η ανάλυση του m σε πρώτους παράγοντες. Τότε

$$m^2 = p_1^{2s_1} \dots p_n^{2s_n},$$

δηλαδή στο τετράγωνο του m οι εκθέτες είναι άρτιοι.

Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν στην ανάλυση σε πρώτους

$$m = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}.$$

οι εκθέτες είναι άρτιοι, τότε ο m είναι τέλειο τετράγωνο.

Δηλαδή υποθέτουμε ότι $s_i = 2r_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε

$$m = p_1^{2r_1} \dots p_n^{2r_n} = (p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n})^2.$$

Έστω ότι η \sqrt{m} είναι ρητός και στην ανάλυση του σε πρώτους παράγοντες

$$m = p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n},$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα s_i που δεν είναι άρτιος και είναι περιττός. Κι αυτό σύμφωνα μ' αυτά που αναφέραμε πριν. Όπως και πριν, υπάρχει ένα ανάγωγο κλάσμα έτσι ώστε

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}, \quad (a, b) = 1.$$

Μ' αυτήν την υπόθεση θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αρχικά αυτό σημαίνει:

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow m = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow mb^2 = a^2.$$

Θέτουμε $s_i = 2r_i + 1$, $r_i \in \mathbb{N}$. Τότε

$$p_i^{2r_i+1} / mb^2 \Rightarrow p_i^{2r_i+1} / a^2$$

Επειδή $p_i^{2r_i+1}/a^2$ έχουμε

- p_i/a^2 και p_i/a . Άρα ο p_i είναι διαιρέτης του a .
- Ο p_i εμφανίζεται σε άρτια δύναμη στον a^2 . Έστω αυτή η δύναμη είναι $2t$.
- Επειδή $p_i^{2r_i+1}/a^2$, $2t > 2r_i + 1$.

Ανακεφαλαιώνοντας:

$$m = p_i^{2r_i+1} m', \quad p_i \nmid m', \quad a^2 = p_i^{2t} a'$$

οπότε

$$mb^2 = a^2 \Rightarrow p_i^{2r_i+1} m' b^2 = p_i^{2t} a' \Rightarrow m' b^2 = p_i^{2t-2r_i-1} a'$$

Επειδή $2t > 2r_i + 1$, $2t - 2r_i - 1 > 0$ και $p_i/m' b^2$. Επειδή $p_i \nmid m'$, p_i/b^2 και p_i/b . Άρα

$$(a, b) \geq p_i$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.

Συνεπώς η \sqrt{m} δεν είναι ρητός.

Διαφορετικά, από την εξίσωση $mb^2 = a^2$, το mb^2 είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε

- Όλοι οι εκθέτες των πρώτων στο mb^2 είναι άρτιοι.
- Όλοι οι εκθέτες των πρώτων στο b^2 είναι άρτιοι.
- Οι εκθέτες των πρώτων στο mb^2 είναι το άθροισμα των εκθετών του b^2 συν τους αντίστοιχους εκθέτες του m .
- Άρα οι εκθέτες των πρώτων στο m είναι η διαφορά των εκθετών του mb^2 μείον τους αντίστοιχους εκθέτες του b^2 .
- Άρα οι εκθέτες των πρώτων στο m είναι άρτιοι ως διαφορά άρτιων αριθμών.

Το τελευταίο είναι άτοπο από την αρχική υπόθεση στο m .

Συνεπώς η \sqrt{m} δεν είναι ρητός.

Επειδή το σύνολο των ρητών είναι κλειστό ως προς τις τέσσερις βασικές πράξεις (εκτός της διαίρεσης δια 0) ισχύουν τα παρακάτω:

- 1 Το άθροισμα (ή η διαφορά) ενός ρητού και ενός αρρήτου είναι άρρητος.
- 2 Το γινόμενο ενός ρητού και ενός αρρήτου είναι άρρητος.
- 3 Το αντίστροφο ενός αρρήτου είναι άρρητος.
- 4 Το πηλίκο ενός ρητού δια ενός αρρήτου (ή αντίστροφα) είναι άρρητος.

Το άθροισμα ή το γινόμενο δυο αρρήτων μπορεί να είναι ρητός:

$$1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ αλλά } (1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}.$$

Το γινόμενο είναι ακόμη απλούστερο:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ αλλά } \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Παραδείγματα

(1) Να δείξετε ότι $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Θα πάρουμε το τετράγωνο

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Γνωρίζουμε

$$\sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}.$$

(2) Να δείξετε ότι $\sqrt{2}/\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Χρησιμοποιούμε μια ιδιότητα των κλασμάτων για να κάνουμε τον αριθμητή ή τον παρονομαστή ακέραιο:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Αλλά

$$\sqrt{10} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{5} \notin \mathbb{Q}.$$

(3) Να γράψετε το κλάσμα $1/\sqrt{3} - \sqrt{2}$ με ακέραιο παρονομαστή.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο διαφοράς τετραγώνων: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Δημιουργούμε το δεξί μέρος της εξίσωσης:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

(4) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Η μέθοδος είναι ίδια με αυτήν για την $\sqrt{2}$. Έτσι έστω

$$\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}, (a, b) = 1.$$

Τότε

$$2 = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow 2b^3 = a^3.$$

Τότε το $2b^3$ είναι άρτιος και επομένως ο a^3 είναι άρτιος, που σημαίνει ότι και ο a είναι άρτιος. Άρα $a = 2k$. Άρα

$$2b^3 = (2k)^3 = 8k^3 \Rightarrow b^3 = 4k^3.$$

Άρα ο b^3 είναι άρτιος και άρα ο b είναι άρτιος. Συνεπώς

$$(a, b) \geq 2$$

άτοπο. Άρα η $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι ρητός.

Και οι υπόλοιπες αποδείξεις για το ότι οι τετραγωνικές ρίζες είναι άρρητες γενικεύονται και σε ανώτερες ρίζες. Το γενικό αποτέλεσμα είναι:

Έστω $m \in \mathbb{N}$ δεν είναι τέλεια n δύναμη. Τότε $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$.

Δυνάμεις

Θα θυμηθούμε τον ορισμό των δυνάμεων και τις βασικές ιδιότητές τους.

- Για $n = 1, 2, \dots$, ορίζουμε

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

- $a^0 = 1, a \neq 0$.
- Για $n \in \mathbb{Z}, n < 0, n = -m$, για $m > 0$,

$$a^n = \frac{1}{a^m}$$

- Για $n \in \mathbb{Q}, n = \frac{p}{q}, q > 0$, ορίζουμε

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Ιδιότητες Δυνάμεων

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
- $(a^n)^m = a^{nm}$.
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{2^4 \cdot 3^4}{6^2}.$$

Χρησιμοποιούμε ότι $6 = 2 \cdot 3$. Έχουμε

$$\frac{2^4 \cdot 3^4}{6^2} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{(2 \cdot 3)^2} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{2^2 \cdot 3^2} = 2^{4-2} \cdot 3^{4-2} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36.$$

(2) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2} \frac{2^2}{3^3}.$$

Από τις ιδιότητες

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2} \frac{2^2}{3^3} = \left(\frac{3^2}{2}\right)^2 \frac{2^2}{3^3} = \frac{(3^2)^2 2^2}{2^2 3^3} = \frac{3^4 2^2}{2^2 3^3} = \frac{3^{4-3}}{2^{2-2}} = 3.$$

(3) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{5 \cdot (3^2 \cdot 10)^2}{3^2 60^2}.$$

Χρησιμοποιούμε ότι $60 = 2 \cdot 3 \cdot 10$.

$$\frac{5 \cdot (3^2 \cdot 10)^2}{3^2 60^2} = \frac{5 \cdot (3^2)^2 \cdot 10^2}{3^2 (2 \cdot 3 \cdot 10)^2} = \frac{5 \cdot 3^4 \cdot 10^2}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10^2} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}.$$

(4) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$3 \left((2 \cdot 3)^{-1} \frac{1}{2^3} \right)^{-1} (3 \cdot 2^2)^{-2}$$

Απλοποιούμε από μέσα προς τα έξω:

$$3(6^{-1} \cdot 2^{-3})^{-1} \cdot \frac{1}{(3 \cdot 2^2)^2} = 3 \cdot (6^{-1})^{-1} \cdot (2^{-3})^{-1} \cdot \frac{1}{3^2 \cdot (2^2)^2} = 3 \cdot 6 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{3^2 \cdot 2^4} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^3 \frac{1}{3^2 \cdot 2^4} = 1.$$

(5) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3.$$

Παρατηρούμε ότι $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Άρα

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(6) Να γραφεί ως απλή δύναμη του 2:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

Γράφουμε τις ρίζες σαν κλασματικές δυνάμεις:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{4}}}}} = \sqrt{\sqrt{(2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt{(2^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{1}{16}}}.$$

Οπότε τελικά,

$$\sqrt{2^{\frac{1}{16}}} = (2^{\frac{1}{16}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{32}}.$$

(7) Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$L = \left(\frac{36 \cdot s^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{2}}}{s^{-\frac{9}{5}} t^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αρχικά απλοποιούμε το κλάσμα:

$$\frac{36 \cdot s^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{2}}}{s^{-\frac{9}{5}} t^{\frac{1}{2}}} = 36 \cdot s^{\frac{1}{5} - (-\frac{9}{5})} \cdot t^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 36 \cdot s^{\frac{1}{5} + \frac{9}{5}} \cdot t^{-\frac{4}{2}} = 36 s^{\frac{10}{5}} \cdot t^{-2} = 36 \cdot s^2 \cdot t^{-2}$$

Άρα

$$L = (36 \cdot s^2 \cdot t^{-2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36 \cdot s^2 \cdot t^{-2}} = \sqrt{36} \sqrt{s^2} \sqrt{t^{-2}} = \frac{6s}{t}.$$

(7) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{36 + 4x^2 - 24x}$.

Αναλύουμε την παράσταση κάτω από το ριζικό:

$$36 + 4x^2 - 24x = 4(x^2 - 6x + 9) = 4(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) = 4(x - 3)^2$$

Άρα

$$\sqrt{36 + 4x^2 - 24x} = \sqrt{4(x - 3)^2} = 2(x - 3).$$

Δεκαδικοί Αριθμοί

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{12}{5} = 2.4, \quad \frac{1}{3} = 0.33333 = 0.\bar{3} \dots \quad \frac{3}{7} = 0.428571428571 \dots = 0.\overline{428571}$$

Από την άλλη μεριά

$$\sqrt{2} = 1.41421356237, \quad \sqrt[3]{3} = 1.44224957031, \quad \pi = 3.141592654.$$

Παρατηρούμε ότι όταν εκφράσουμε τους ρητούς αριθμούς ως δεκαδικούς τότε οι δεκαδικοί αυτοί είτε τερματίζουν είτε, από κάποιο σημείο και μετά, επαναλαμβάνεται. Το κομμάτι του δεκαδικού που έχει ευθεία από πάνω του, επαναλαμβάνεται.

Αντίθετα οι άρρητοι αριθμοί δεν ικανοποιούν αυτήν την συνθήκη. Δηλαδή δεν υπάρχει επανάληψη στοιχείων μετά από κάποιο σημείο. Δεν μπορούμε να προβλέψουμε τα στοιχεία

Παραδείγματα

(1) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.34 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}.$$

(2) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.16 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}.$$

(3) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.125 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}.$$

(4) Να γράψετε τον δεκαδικό 0.475 ως κλάσμα.

Απλά χρησιμοποιούμε τον ορισμό του δεκαδικού:

$$0.475 = \frac{475}{1000} = \frac{19}{40}.$$

(5) Να γράψετε το κλάσμα $3/7$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

(6) Να γράψετε το κλάσμα $14/25$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{14}{25} = 0.56.$$

(7) Να γράψετε το κλάσμα $4/21$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{190476}$$

(8) Να γράψετε το κλάσμα $26/123$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{26}{123} = 0.\overline{21138}$$

(9) Να γράψετε το κλάσμα $4/21$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{190476}$$

(10) Να γράψετε το κλάσμα $25/123$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{25}{123} = 0.\overline{21138}.$$

(11) Να γράψετε το κλάσμα $37/21$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{37}{21} = 1.\overline{76190}$$

(12) Να γράψετε το κλάσμα $375/147$ σαν δεκαδικό.

Απλά κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{375}{147} = 2.\overline{551020408163265306122448979591836734693877}.$$

(42 ψηφία).

(13) Να γράψετε τον δεκαδικό $0.222 \dots = 0.\overline{2}$ ως κλάσμα.

Θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για να λύσουμε το πρόβλημα.

$$x = 0.222 \dots \Rightarrow 10x = 2.222 \dots = 2 + 0.222 \dots = 2 + x \Rightarrow 9x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}.$$

(14) Να γράψετε τον δεκαδικό $0.2525 \dots = 0.\overline{25}$ ως κλάσμα.

Εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο:

$$x = 0.2525 \dots \Rightarrow 100x = 25.2525 \dots = 25 + 0.2525 \dots = 25 + x \Rightarrow 99x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{99}.$$

(15) Να γράψετε τον δεκαδικό $0.31717\cdots = 0.3\overline{17}$ ως κλάσμα.

Θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για να λύσουμε το πρόβλημα.

$$x = 0.31717\cdots \Rightarrow 100x = 31.71717\cdots$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{array}{r} 100x = 31.71717\cdots \\ x = 0.31717\cdots \\ \hline 99x = 31.4 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα το έχουμε αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Άρα

$$99x = 31.4 = \frac{314}{10} \Rightarrow x = \frac{314}{990} = \frac{157}{495}$$

(16) Να γράψετε τον δεκαδικό $2.1666 \dots = 2.1\overline{6}$ ως κλάσμα.

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο:

$$x = 2.1666 \dots \Rightarrow 10x = 21.6666 \dots$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{array}{r} 10x = 21.666 \dots \\ x = 2.1666 \dots \\ \hline 9x = 19.5 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα το έχουμε αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Άρα

$$9x = 19.5 = \frac{195}{10} \Rightarrow x = \frac{195}{90} = \frac{39}{18}$$

(16) Να γράψετε τον δεκαδικό $5.657878 \dots = 5.65\overline{78}$ ως κλάσμα.

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο:

$$x = 5.657878 \dots \Rightarrow 100x = 565.7878 \dots$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{array}{r} 100x = 565.7878 \dots \\ x = 5.657878 \dots \\ \hline 99x = 560.13 \end{array}$$

Το αποτέλεσμα το έχουμε αφαιρώντας την δεύτερη γραμμή από την πρώτη. Άρα

$$99x = 560.13 = \frac{56013}{100} \Rightarrow x = \frac{18671}{3300}.$$

Γεωμετρία

Ξεκινάμε με μια σύντομη ιστορία:

- Αναπαραστάσεις από τάφους στην Αίγυπτο, δείχνουν ότι το σχοινί ήταν το βασικό όργανο για τους τοπογράφους και τους μηχανικούς. Πράγματι η μετάφραση της ονομασίας αυτής της τάξης των επαγγελματιών είναι «σχοινοέλκτες» ή «τεντωτές σχοινιών».
- Οι Έλληνες απέδωσαν την εφεύρεση της γεωμετρίας στους Αιγύπτιους. Έχουμε πολλά στοιχεία για τα πρώιμα Αιγυπτιακά και Βαβυλωνιακά μαθηματικά γιατί οι λαοί αυτοί διατηρούσαν αρχεία σε παπύρους ή πλακίδια από πηλό, τα οποία διασώθηκαν σε αρκετές περιπτώσεις λόγω του ξηρού κλίματος. Σ' αυτά τα αρχεία μπορούμε να εντοπίσουμε στοιχεία επιρροής από την Ινδία.
- Οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι ήταν αρκετά προηγμένοι στην αριθμητική και την απλή άλγεβρα.

Αιγύπτιοι - Βαβυλώνιοι

- Έλυναν προβλήματα κεφαλαιοποίησης.
- Γνώριζαν να λύνουν τετραγωνικές εξισώσεις (μόνο τις θετικές τους λύσεις).
- Εξαιρετικοί μηχανικοί καθώς έχτιζαν πυραμίδες, πολυώροφα κτήρια.
- Ήξεραν το 3-4-5 ορθογώνιο τρίγωνο και κάποιες μορφές του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.
- Γνώριζαν πως να βρίσκουν εμβαδά και όγκους στερεών.
- Επιπλέον οι Αιγύπτιοι ήταν καλοί μηχανικοί: έχτιζαν πυραμίδες, πολυώροφα κτήρια, αρδευτικά συστήματα και καθόριζαν το όρια των χωραφιών μετά τις πλημμύρες του Νείλου.

Πριν τον Ευκλείδη - Θαλής

Θαλής ο Μιλήσιος [περίπου 624-546 π.Χ.]. Θεωρείται ο πρώτος που εφάρμοσε τους συμπερασματικούς κανόνες της λογικής στην γεωμετρία, παρέχοντας έτσι τις πρώτες μαθηματικές «αποδείξεις». Επινόησε λέξεις για να περιγράψει αρκετές νέες βασικές έννοιες: κόσμος, γεωμετρία και μαθηματικά. Μεταξύ των θεωρημάτων που η απόδειξή τους αποδίδεται στον Θαλή είναι τα εξής:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- Αν δυο ευθείες τέμνονται οι κατά κορυφή γωνίες είναι ίσες.
- Δυο τρίγωνα που ικανοποιούν το Κριτήριο Πλευρά-Γωνία-Πλευρά είναι ισοδύναμα.
- Εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Πριν τον Ευκλείδη - Πυθαγόρας

Πυθαγόρας ο Σάμιος [περίπου 570-500 π.Χ.] Ενδεχομένως να υπήρξε μαθητής του Θαλή. Ταξίδεψε στην Αίγυπτο και ίσως να επισκέφτηκε και την Ινδία. Ίδρυσε μια κλειστή μυστικιστική αδελφότητα στις Ελληνικές αποικίες της Κάτω Ιταλίας η οποία λειτούργησε για 200 χρόνια. Η αδελφότητα, ή καλύτερα η κοινότητα, αυτή ήταν αφοσιωμένη στα μαθηματικά, την φιλοσοφία και τις φυσικές επιστήμες. Όλες οι ανακαλύψεις της κοινότητας αποδίδονταν στον ιδρυτή της, έτσι είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε ποιος ανακάλυψε τι ή ακόμα και πότε. Οι Πυθαγόρειοι απέδιδαν μυστικιστικές ιδιότητες στους αριθμούς και λέγεται πως ο ίδιος ο Πυθαγόρας ισχυρίστηκε ότι «Τα πάντα είναι αριθμοί». Η άποψη αυτή οδήγησε στην ανάπτυξη της αριθμολογίας, Οδήγησε όμως και σε σημαντικά επιτεύγματα στα μαθηματικά, ειδικά στον τομέα της Θεωρίας Αριθμών. Ανάμεσα στις γεωμετρικές τους ανακαλύψεις ήταν οι ιδιότητες των παράλληλων ευθειών, το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου και φυσικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Η πιο εντυπωσιακή ανακάλυψη των Πυθαγορείων ήταν αυτή της ύπαρξης των άρρητων αριθμών

Πριν τον Ευκλείδη - Πλάτωνας

Ένα μέλος της Πυθαγόρειου κοινότητας κατά τα τελευταία χρόνια λειτουργίας της ήταν ο Ιπποκράτης ο Χίος [περίπου 470-410 π.Χ.]. Φαίνεται να ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε μια παρουσίαση της γεωμετρίας ως μια λογική αλυσίδα προτάσεων που βασίζονταν σε ελάχιστους αρχικούς ορισμούς.

Για τον Πλάτωνα [428-347 π.Χ.] είναι γνωστό πως είχε ταξιδέψει στην Αίγυπτο καθώς και ότι είχε επισκεφτεί τους Πυθαγόρειους στην νότια Ιταλία προτού επιστρέψει στην Αθήνα για να ιδρύσει την περίφημη Ακαδημία. Ο Πλάτωνας δεν ήταν μαθηματικός, αλλά είχε την άποψη ότι η γεωμετρία ήταν ένα εξαιρετικό πεδίο πειραματισμού για την λογική σκέψη. Λέγεται πως στην είσοδο της Ακαδημίας στο στο υπέρθυρο υπήρχε η επιγραφή *αγεωμέτρητος μηδείς εισίτω*, δηλαδή απαγορεύεται η είσοδος σε όσους δεν έχουν γνώση της γεωμετρίας. Επίσης, ανέφερε ότι η γεωμετρία ήταν η καλύτερη εκπαίδευση για τη σκέψη και ως τέτοια είναι αναντικατάστατη για φιλόσοφους και πολιτικούς.

Περιγράφοντας την άποψή του περί σωστής εκπαίδευσης, ο Πλάτωνας έγραψε:

*Η Γεωμετρία θα οδηγήσει την ψυχή προς την αλήθεια και θα δημιουργήσει το πνεύμα της φιλοσοφίας. Πιθανότατα τίποτα άλλο δεν μπορεί να έχει παρόμοιο αποτέλεσμα ...σε όλους τους άλλους τομείς της γνώσης, καθώς η εμπειρία μας αποδεικνύει ότι οποιοσδήποτε υπήρξε μελετητής της γεωμετρίας είναι απείρως γρηγορότερος στην κατανόηση από κάποιον που δεν την κατέχει.*¹

Στην συνέχεια, ο Πλάτωνας περιγράφει την γεωμετρία ως «γνώση αυτού που από πάντα υπήρχε» Παρατηρεί επίσης ότι μια τέλεια ευθεία γραμμή ή ένας τέλειος κύκλος δεν μπορούν να υπάρξουν στην φύση. Οι παρατηρήσεις αυτές τον οδήγησαν στο να δεχτεί την ύπαρξη ενός άλλου σύμπαντος ιδεατών μορφών όπου ζούσαν οι ψυχές μας πριν την γέννηση. Η πραγματικότητα που βιώνουμε καθημερινά είναι μια ανεπαίσθητη ηχώ αυτών των τέλειων μορφών, και η γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδεατών αντικειμένων που κατοικούν στο ανθρώπινο μυαλό. Η εκμάθηση της γεωμετρίας είναι ουσιαστικά μια διαδικασία αφύπνισης αυτής της εγγενούς γνώσης και επομένως προετοιμάζει το μυαλό να ανακτήσει μια διαφορετική γνώση της καλοσύνης και της δικαιοσύνης, που είναι ο υπέρτατος στόχος της φιλοσοφίας του.

¹ Πλάτωνας, Πολιτεία, VII

Περισσότερο από 2000 χρόνια αργότερα, ο ρόλος της γεωμετρίας ως εγγενές προϊόν του ανθρώπινου μυαλού, αποτέλεσε την θεμέλιο λίθο της φιλοσοφίας του Immanuel Kant. Ο Πλάτωνας και το όραμά του περί των τέλειων γεωμετρικών μορφών βοήθησε στο να καταστούν τα μαθηματικά μια καθαρά απαγωγική επιστήμη. Αναφέρθηκε με απέχθεια στις πειραματικές επιστήμες και την εφαρμοσμένη μηχανική και αυστηρώς προσδιόρισε τον κανόνα (χάρακας χωρίς κλίμακα) και τον διαβήτη ως τα κατάλληλα εργαλεία για γεωμετρικές κατασκευές. Είναι μια προφανής διαπίστωση ότι οι απόψεις αυτές επηρέασαν την εξέλιξη των ιδεών του Ευκλείδη στην γεωμετρία.

Ο Πλάτωνας στο έργο του *Πολιτεία* γράφει:

Αντιλαμβάνεστε πως οι σπουδαστές της γεωμετρίας, της αριθμητικής και των συναφών επιστημών υποθέτουν το περιττό και το άρτιο και τα σχήματα και τα τρία είδη γωνιών και τα αντίστοιχά τους σε διάφορους κλάδους της επιστήμης. Αυτές είναι οι υποθέσεις τους, τις οποίες αυτοί και όλοι οι υπόλοιποι υποτίθεται ότι γνωρίζουν, και επομένως δεν θεωρούν σκόπιμο να τις εξηγήσουν ούτε στους εαυτούς τους ούτε σε άλλους, αλλά ξεκινούν μ' αυτές και συνεχίζουν μέχρι να φτάσουν επιτέλους και με αρμονικό τρόπο στο συμπέρασμά τους.

Ένας από τους μαθητές του Πλάτωνα, ο οποίος μάλιστα δίδαξε στην Ακαδημία αργότερα, ήταν ο εξαιρετικός μαθηματικός Εύδοξος [408-355 π.Χ.]. Ο Εύδοξος ανέπτυξε μια ενιαία γενική θεωρία αναλογιών (αργότερα εντάχθηκε ως το Τεύχος V στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη) η οποία διαχειρίστηκε με επιτυχία τα προβλήματα με τις σύμμετρες και τις ασύμμετρες ποσότητες. Η ιδέα ήταν ότι θεωρούσε τις ποσότητες αυτές ως τμήματα ευθειών κατάλληλου μήκους αντί να τις μελετά ως αριθμούς. Ο Εύδοξος επίσης ανέπτυξε την *μέθοδο της εξάντλησης*, η οποία ουσιαστικά κάνει χρήση διαδοχικών προσεγγίσεων ή ορίων. Η θεωρία αυτή ήταν ένα προοίμιο του απειροστικού λογισμού που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Ευκλείδης

Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό για τον Ευκλείδη. Διέπρεψε (ένας όρος που χρησιμοποιούμε όταν δεν είμαστε σίγουροι πότε γεννήθηκε ή πέθανε κάποιος, αλλά είμαστε βέβαιοι ότι υπήρξε σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο) γύρω στο 300 π.Χ.. Ίσως να φοίτησε στην Ακαδημία, αλλά έζησε και δίδαξε στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας της Αιγύπτου. Οι μοναδικές προσωπικές πληροφορίες που έχουμε για αυτόν είναι μέσω δυο ανέκδοτων. Ο Πρόκλος [410-485] ο οποίος διεύθυνε την Ακαδημία μερικούς αιώνες αργότερα και σχολίασε το έργο του Ευκλείδη *Τα Στοιχεία*, διηγείται ένα από αυτά για μια συνομιλία μεταξύ του Ευκλείδη και του Βασιλιά Πτολεμαίου του Πρώτου, ωστόσο πρέπει να τονίσουμε πως η ίδια ιστορία έχει ειπωθεί και για άλλους βασιλείς και άλλους μαθηματικούς.

Λέγεται ότι ο Πτολεμαίος κάποτε ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπήρχε συντομότερος δρόμος για την γεωμετρία παρά μέσω των Στοιχείων, και ο Ευκλείδης του αποκρίθηκε πως δεν υπάρχει βασιλική οδός στην γεωμετρία.

Ένας μεταγενέστερος συγγραφέας ο Ιωάννης ο Στοβαίος, μας διηγείται μια άλλη ιστορία:

Κάποιος ο οποίος είχε ξεκινήσει να μελετά γεωμετρία με τον Ευκλείδη, όταν έμαθε το πρώτο θεώρημα, ρώτησε τον Ευκλείδη «Ωραία, αλλά εγώ τι θα κερδίσω μαθαίνοντας αυτά τα πράγματα;» ο Ευκλείδης κάλεσε ένα δούλο του και του είπε «Δώσε του τρεις οβολούς, αφού έχει ανάγκη να κερδίζει κάτι από αυτά που μαθαίνει».

Ο Ευκλείδης έγραψε πλήθος βιβλίων από τα οποία μόνο μερικά σώζονται, αλλά τα *Τα Στοιχεία της Γεωμετρίας* είναι μακράν το πιο γνωστό και με την μεγαλύτερη επιρροή. Η λέξη στοιχείο για τους αρχαίους σήμαινε και γράμμα της αλφαβήτου και χρησιμοποιούταν συχνά ο τίτλος *Στοιχεία* για αντίστοιχα συγγράμματα, όπως τώρα υπάρχει πληθώρα βιβλίων με τον τίτλο *Ανάλυση*. Ήταν γραμμένο σαν διδακτικό βιβλίο και όχι σαν ερευνητική εργασία. Περιέχει μια συλλογή από βασικά θεωρήματα με ευρεία και γενική εφαρμογή. Τα περισσότερα από αυτά ήταν ήδη γνωστά πριν την εποχή του Ευκλείδη, αλλά η επιλογή των θεωρημάτων και η λογική τους διάταξη ήταν αποκλειστικά έργο του Ευκλείδη.

Τα Στοιχεία αποτελούνται από δεκατρία βιβλία ή κεφάλαια. Χονδρικά, το πρώτο απ' αυτά, μαζί με κομμάτια από το τρίτο και το τέταρτο, αποτελούν την ύλη ενός συνηθισμένου μαθήματος γεωμετρίας στο γυμνάσιο. *Τα Στοιχεία* του Ευκλείδη θεωρείται το πιο επιτυχημένο (έχοντας ως μέτρο το πλήθος εκδόσεων που τυπώθηκαν) και σημαντικό βιβλίο μαθηματικών και κατατάσσεται μετά την Βίβλο και το Κοράνι ως ένα από τα πιο σημαντικά βιβλία όλων των εποχών. Κάποτε η μελέτη του θεωρούνταν στοιχειώδης για οποιοδήποτε μορφωμένο άτομο, σήμερα παραμένει μαρτυρία της ομορφιάς των μαθηματικών.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη ξεκινούν, από την αρχή, με μια σειρά από ορισμούς. Δεν υπάρχει πρόλογος, ούτε ενθαρρυντικά μηνύματα ή κίνητρα για τον αναγνώστη. Το ότι ο πρώτος από τους ορισμούς είναι κάπως δυσνόητος δεν αλλοιώνει την τέλεια απλότητα και τάξη του σύμπαντος στο οποίο ετοιμαζόμαστε να εισέλθουμε.

Ορισμός 1. Σημείο είναι αυτό που δεν έχει κανένα μέρος .

Αν τα σημεία είχαν φυσικές διαστάσεις και αν τα ευθύγραμμο τμήματα ήταν κατασκευασμένα από σημεία, τότε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα θα ήταν κατασκευασμένο από ένα συγκεκριμένο πλήθος σημείων. Για παράδειγμα ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους α εκατοστών ας υποθέσουμε ότι αποτελείται από 3.141.592 σημεία, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα μήκους β εκατοστών αποτελείται από 2.718.281 σημεία. Τότε θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3.141.592}{2.718.281}$, οπότε ο λόγος οποιωνδήποτε δυο τμημάτων θα ήταν ρητός αριθμός και επομένως τα δυο ευθύγραμμο τμήματα θα ήταν σύμμετρα. Εφόσον ήταν γνωστό πως υπάρχουν ασύμμετρα τμήματα, πρέπει να είναι αληθές ότι τα σημεία δεν έχουν διαστάσεις. Οπότε φαίνεται ότι ο Ευκλείδης εννοούσε ότι τα σημεία δεν έχει διαστάσεις. Αυτό δεν απαντά την ερώτηση τι πραγματικά είναι ένα σημείο.

Ορισμός 2. *Η γραμμή δεν έχει πλάτος.*

Ορισμός 3. *Τα άκρα μιας γραμμής είναι σημεία.*

Ορισμός 4. *Ευθεία γραμμή είναι μια γραμμή, που τα σημεία της βρίσκονται ομοιόμορφα πάνω της.*

Ο δεύτερος ορισμός μπορούμε να τον δεχτούμε εύκολα. Να σημειωθεί εδώ πως αυτό που ο Ευκλείδης αποκαλεί γραμμή, μπορεί να είναι και καμπύλη, όταν εννοεί ευθεία γραμμή, μιλά συγκεκριμένα για ευθεία γραμμή. Αυτές οι γραμμές ή καμπύλες έχουν μήκος αλλά όχι πλάτος, αν και αυτό εγείρει ερωτήματα για το ποια είναι η έννοια του μήκους και του πλάτους. Ο τρίτος ορισμός λέει ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου ή καμπύλου τμήματος είναι σημεία, ωστόσο υπάρχουν καμπύλες που δεν έχουν τελικά σημεία, όπως ο κύκλος. Συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι όλες οι γραμμές και οι καμπύλες είναι, κατά τον Ευκλείδη, πεπερασμένες σε έκταση. Ο τέταρτος ορισμός έχει νόημα αν τον δούμε ως περιγραφή: κλείστε το ένα σας μάτι και κρατήστε ένα μολύβι μπροστά από το ανοιχτό ώστε να κινείται μακριά από εσάς. Αν κοιτάξετε προς τα κάτω το μολύβι, θα δείτε μόνο μια κυκλική διατομή. Κατά αυτόν τον τρόπο όλες οι διατομές είναι στοιχισμένες στην σειρά ή «βρίσκονται ομοιόμορφα πάνω της». Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για τις καμπύλες.

Σε ένα μοντέρνο απαγωγικό σύστημα, όροι που δεν μπορούν να προσδιοριστούν, ονομάζονται *πρωταρχικοί* επιτρέπονται και όντως είναι χρήσιμοι. Αυτή είναι η πρακτική μας απάντηση στην αναγνώριση ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε τα πάντα. (Ως άσκηση, επιλέξτε μια λέξη στην τύχη μέσα από ένα λεξικό, αναζητήστε την πιο σημαντική από τα συνώνυμα που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή της λέξης και επαναλάβετε την ίδια διαδικασία. Θα ανακαλύψετε πως οι λέξεις που αναζητάτε ή θα σας οδηγήσουν μετά από μια κυκλική πορεία στην αρχική λέξη ή θα καταλήξετε με μια ατελείωτη σειρά από όρους που χρειάζονται ορισμό.) Ενώ η διάκριση μεταξύ πρωταρχικών, μη ορισμένων όρων και ορισμών δεν ήταν ξεκάθαρη στα χρόνια του Ευκλείδη, ο Ευκλείδης φαίνεται ενστικτωδώς να την κατανοεί. Ποτέ δεν αναφέρεται στους αμφισβητήσιμους ορισμούς στις προτάσεις που ακολουθούν. Θα πρέπει να θεωρήσουμε τους αρχικούς ορισμούς του σημείου και της γραμμής ως περιγραφές και όχι ως αυστηρούς ορισμούς, και να τους χρησιμοποιούμε ώστε να γνωρίζει η διαίσθησή μας σχετικά την φύση αυτών των αντικειμένων.

Μετά τους ορισμούς, ακολουθεί μια σειρά από αιτήματα και κάποιες έννοιες που ονομάζονται κοινές έννοιες. Μετά απ' αυτά ακολουθούν τα Θεωρήματα (τα οποία καλούνται προτάσεις) με τις αποδείξεις τους. Στα μαθηματικά τα αξιώματα και τα αιτήματα είναι προτάσεις τις οποίες αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Γι' αυτό τον λόγο, και οι σύγχρονοι και οι παλαιότεροι μαθηματικοί επιμένουν πως το σύνολο των αξιωμάτων πρέπει να παραμείνει όσο το δυνατόν μικρότερο. Δεν θα πρέπει να υποθέτουμε τίποτα που μπορούμε να αποδείξουμε, αν και γίνονται κάποιες εξαιρέσεις σε αυτόν τον κανόνα για λόγους σκοπιμότητας: Σε μια εισαγωγική σειρά μαθημάτων, οι συγγραφείς συχνά υιοθετούν ως αξιώματα προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν σε υψηλότερο επίπεδο. Στην εποχή του Ευκλείδη ήταν κατανοητό πως τα αξιώματα πρέπει να είναι προτάσεις που όλοι αποδέχονται ως προφανείς: αλήθειες για τις οποίες όλοι συμφωνούν πως είναι αληθείς, ακόμη και χωρίς απόδειξη. Τα πέντε αιτήματα του Ευκλείδη είναι τα ακόλουθα:

Πρώτο Ευκλείδειο Αίτημα. *[Είναι πάντα δυνατόν] να φέρουμε ευθεία γραμμή από οποιοδήποτε σημείο σε οποιοδήποτε άλλο σημείο.*

Δεύτερο Ευκλείδειο Αίτημα. *[Είναι πάντα δυνατόν] να προεκτείνουμε ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα σε μια ευθεία γραμμή.*

Τρίτο Ευκλείδειο Αίτημα. *[Είναι πάντα δυνατόν] να κατασκευάσουμε κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα.*

Τέταρτο Ευκλείδειο Αίτημα. *Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

Πέμπτο Ευκλείδειο Αίτημα. *Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δυο άλλες ευθείες και οι εντός και επί τα αυτά γωνίες από την μια πλευρά έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, οι δυο ευθείες, αν επεκταθούν προς το άπειρο, θα τέμνονται από την πλευρά που οι εντός και επί τα αυτά γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο από δυο ορθές.*

Μοντέρνος Ευκλείδης

Πρωταρχικοί Όροι:

- Σημείο.
- Ευθεία.
- Επίπεδο.
- «Πάνω», ανήκει.
- Ενδιάμεσα.
- Ισοδύναμα.

Αξιώματα Hilbert - Σύνδεση

Αξιώματα Σύνδεσης:

- 1 Για κάθε δυο σημεία υπάρχει μια ευθεία που τα περιέχει.
- 2 Κάθε δυο σημεία περιέχονται το πολύ σε μια ευθεία.
- 3 Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δυο σημεία.
- 4 Για οποιαδήποτε τρία μη-συνευθειακά σημεία, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο που να περιέχει αυτά τα σημεία.
- 5 Αν ένα επίπεδο περιέχει δυο διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, τότε κάθε σημείο αυτής της ευθείας ανήκει σ' αυτό το επίπεδο.
- 6 Αν δυο επίπεδα P_1 και P_2 έχουν ένα κοινό σημείο, τότε θα έχουν τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο.
- 7 Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία τα οποία δεν είναι συνεπίπεδα.

Αξιώματα Hilbert - Διάταξη

- 1 Αν το σημείο B βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και C , τότε τα A , B , και C είναι συνευθειακά και το B είναι επίσης μεταξύ των σημείων C και A . Δηλαδή, αν $A - B - C$, τότε $C - B - A$.
- 2 Για οποιαδήποτε δυο σημεία A και C που δεν ταυτίζονται, υπάρχει τουλάχιστον ένα άλλο σημείο B πάνω στην ευθεία που τα βρίσκεται μεταξύ τους.
- 3 Για οποιαδήποτε δυο σημεία A και B , υπάρχει τουλάχιστον ένα ακόμη σημείο C τέτοιο ώστε το B να βρίσκεται μεταξύ των A και C .
- 4 Για τρία συνευθειακά σημεία, μόνο ένα από αυτά μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στα άλλα δυο.
- 5 Έστω ένα επίπεδο και μια ευθεία ℓ πάνω στο επίπεδο, η ℓ διαιρεί τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην ℓ σε δυο ξένα μη-κενά κυρτά σύνολα, S_1 και S_2 τα οποία ονομάζουμε πλευρές της ευθείας, έτσι ώστε για οποιοδήποτε σημείο A που ανήκει στο S_1 και σημείο B που ανήκει στο S_2 , το ευθύγραμμο τμήμα \overline{AB} πρέπει να τέμνει την ευθεία ℓ .

Αξιώματα Hilbert - Ισοδυναμία

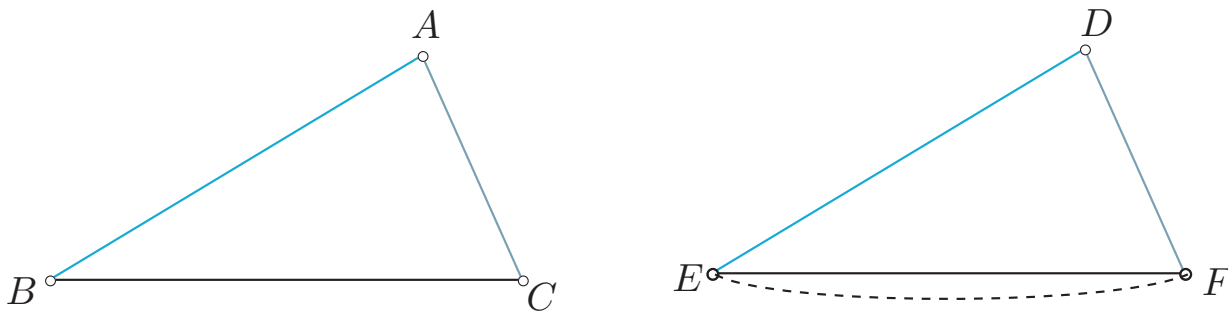
- ① Εάν \overline{AB} είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και A' ένα σημείο σε μια ευθεία ℓ . Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $B' \in \ell$ έτσι ώστε $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.
 - ② Η ισοδυναμία ή ισότητα μηκών είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στα ευθύγραμμα τμήματα.
 - ③ Η ισοδυναμία ή ισότητα μέτρων είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στις γωνίες.
 - ④ Η ισότητα εμβαδών είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στα πολύγωνα.
 - ⑤ Ισοδύναμα τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά.
- ΠΓΠ Αν σε δυο τρίγωνα δυο πλευρές του ενός είναι ίσες με δυο πλευρές του άλλου και οι περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.
- ⑥ Η ισότητα όγκων είναι μια προσθετική σχέση ισοδυναμίας στα πολύεδρα.
 - ⑦ Ισοδύναμα πολύεδρα έχουν ίσους όγκους.

«Απόδειξη» του ΠΓΠ του Ευκλείδη

Πρόταση Ι.4. [ΠΓΠ]

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες, και τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες ίσες, θα έχουν επίσης την μια βάση ίση με την άλλη βάση, τα δύο τρίγωνα θα είναι ίσα, και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι αντίστοιχα ίσες, δηλαδή αυτές που κείται έναντι των ίσων πλευρών.

Απόδειξη της Πρότασης Ι.4: Έστω ABC , DEF είναι δυο τρίγωνα τα οποία έχουν τις δυο πλευρές AB , AC ίσες με τις πλευρές DE , DF του άλλου τριγώνου αντίστοιχα, ειδικότερα την AB με την DE και την AC με την DF , και την γωνία BAC ίση με την γωνία EDF .



Ισχυρίζομαι ότι αν η βάση BC είναι επίσης ίση με την EF , το τρίγωνο ABC θα είναι ίσο με το τρίγωνο DEF , και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι αντίστοιχα ίσες, δηλαδή αυτές που κείται έναντι των ίσων πλευρών, πιο συγκεκριμένα η γωνία ABC με την γωνία DEF , και η γωνία ACB με την γωνία DFE .

Γιατί, αν το τρίγωνο ABC μεταφερθεί πάνω στο τρίγωνο DEF έτσι ώστε το σημείο A να ταυτιστεί με το σημείο D και το ευθύγραμμο τμήμα AB με το DE , τότε το σημείο B θα συμπίπτει με το σημείο E , επειδή η AB πλευρά είναι ίση με την DE .

Επίσης, η AB ταυτίζεται με την DE , η ευθεία γραμμή AC θα ταυτίζεται με την DF , γιατί η γωνία BAC είναι ίση με την γωνία EDF , και επομένως και το σημείο C επίσης θα συμπίπτει στο F , για τον λόγο ότι η AC είναι και πάλι ίση με την DF .

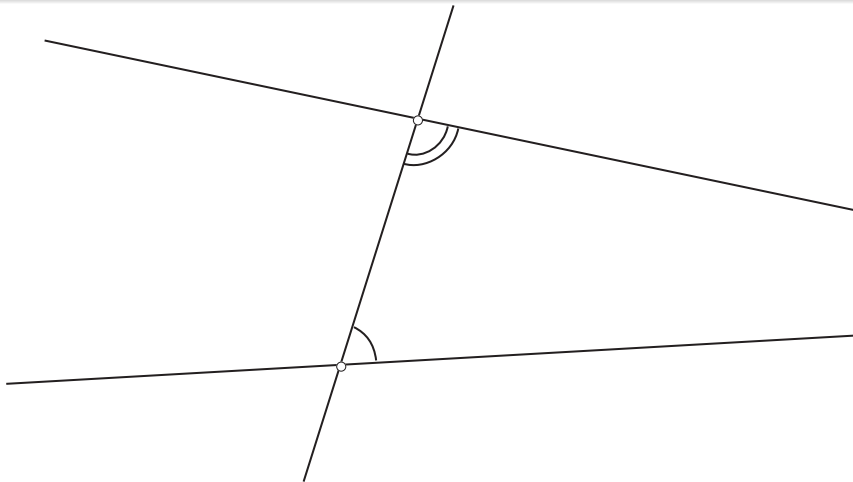
Αλλά το σημείο B επίσης ταυτίζεται με το E . Επομένως η βάση BC θα συμπίπτει με την βάση EF . [Γιατί αν, όταν το σημείο B συμπίπτει με το E και το C με το F , η βάση BC δεν θα συμπίπτει με την EF , δυο ευθείες θα περικλείουν ένα κομμάτι του επιπέδου, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, η βάση BC θα ταυτιστεί με την πλευρά EF] και θα είναι ίση με αυτή.

Συνεπώς, ολόκληρο το τρίγωνο ABC θα συμπίπτει με ολόκληρο το τρίγωνο DEF , και θα είναι ίσο μ' αυτό. Και οι υπόλοιπες γωνίες επίσης θα συμπίπτουν με τις υπόλοιπες γωνίες και θα είναι ίσες μ' αυτές, η γωνία ABC με την γωνία DEF , και η γωνία ACB με την γωνία DFE . ό. 'ε.δ.

Αξίωμα Παραλληλίας

Αξίωμα Παραλληλίας του Ευκλείδη

Έστω δυο ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία έτσι ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών από την μια πλευρά της τέμνουσας να είναι μικρότερο των 180° . Τότε αυτές οι δυο ευθείες θα τέμνονται σ' αυτήν την πλευρά της τέμνουσας.

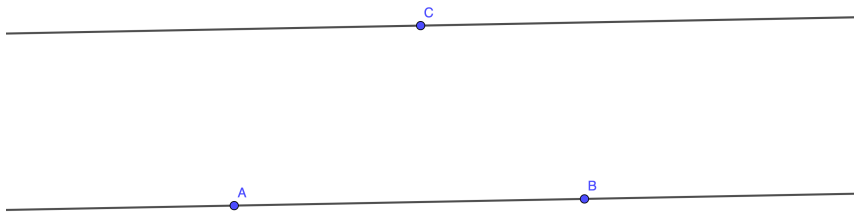


Χρησιμοποιούμε ένα άλλο αξίωμα αντί του κλασικού αξιώματος του Ευκλείδη:

Αξίωμα Παραλληλίας του Playfair

Για μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, υπάρχει ακριβώς μια ευθεία που περιέχει το σημείο και είναι παράλληλη στην δεδομένη ευθεία.

Ευκλείδης \iff Playfair.



Μια άλλη κατασκευή του Ευκλείδη ήταν ή κατασκευή ενός ισόπλευρου τριγώνου. Και πάλι υπάρχει ένα κενό.



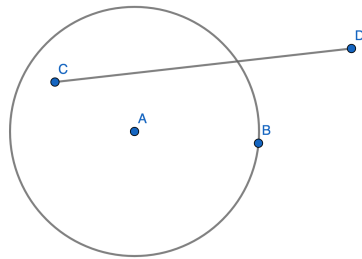
Αξιώματα Συνέχειας

Αξίωμα του Αρχιμήδη: Αν a και b είναι δυο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a < b$, τότε υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $na > b$. Πιο συγκεκριμένα,

- 1 Για δυο ευθύγραμμα τμήματα \overline{AB} και \overline{CD} , υπάρχει ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ και ένα σημείο X στο \overline{CD} έτσι ώστε $\overline{CX} = n \cdot \overline{AB} > \overline{CD}$ και έτσι $C - D - X$.
- 2 Για δυο γωνίες $\angle ABC$ και $\angle DEF$, υπάρχει ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ και μια ημιευθεία \overrightarrow{EX} έτσι ώστε $\angle XEF = n \cdot \angle ABC$ και $\angle XEF > \angle DEF$.

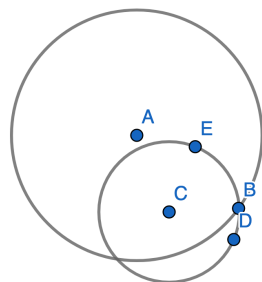
Αρχή Κυκλικής Συνέχειας - 1:

Ένα ευθύγραμμο τμήμα που το ένα του άκρο είναι στο εσωτερικό και το άλλο στο εξωτερικό ενός κύκλου, θα τέμνει τον κύκλο σε ακριβώς ένα σημείο.



Αρχή Κυκλικής Συνέχειας - 2:

Ένας κύκλος που έχει ένα σημείο στο εσωτερικό και το άλλο σημείο στο εξωτερικό ενός κύκλου, θα τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία.



Γεωμετρίες

- Η γεωμετρία όπου υποθέτουμε το Αξίωμα Παραλληλίας ονομάζεται **Ευκλείδεια Γεωμετρία**.
- Η γεωμετρία όπου υποθέτουμε όλα τα Αξιώματα εκτός του Αξιώματος Παραλληλίας, ή κάποιο ισοδύναμό του, ονομάζεται **Ουδέτερη Γεωμετρία**.
- Η γεωμετρία όπου υποθέτουμε όλα τα Αξιώματα και την άρνηση του Αξιώματος Παραλληλίας ονομάζεται **Υπερβολική Γεωμετρία**.

Υπερβολικό Αξίωμα Παραλληλίας. Για μια ευθεία ℓ και ένα σημείο P εκτός της ℓ , υπάρχουν πολλές παράλληλες της ℓ που περιέχουν το P .

Υπάρχει και η **Ελλειπτική Γεωμετρία** όπου δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες. Τα Αξιώματα, εκτός του Αξιώματος Παραλληλίας, αποκλείει αυτήν την περίπτωση.

Μοντέλα

Για να ελέγξουμε τα αξιωματικά συστήματα χρησιμοποιούμε μοντέλα. Τα μοντέλα είναι αναπαραστάσεις των πρωταρχικών όρων έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα.

- Αν υπάρχουν μοντέλα που ικανοποιούν τα αξιώματα, τότε το αξιωματικό σύστημα είναι **συμβατό**. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αντιφάσεις στα αξιώματα του συστήματος.
- Αν υπάρχει ένα μοντέλο όπου ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα εκτός ενός, τότε το αξίωμα αυτό είναι **ανεξάρτητο** των άλλων.

Για παράδειγμα, αν δεχτούμε τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} τότε το \mathbb{R}^2 , το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών είναι ένα μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σημεία είναι ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ευθείες είναι υποσύνολα

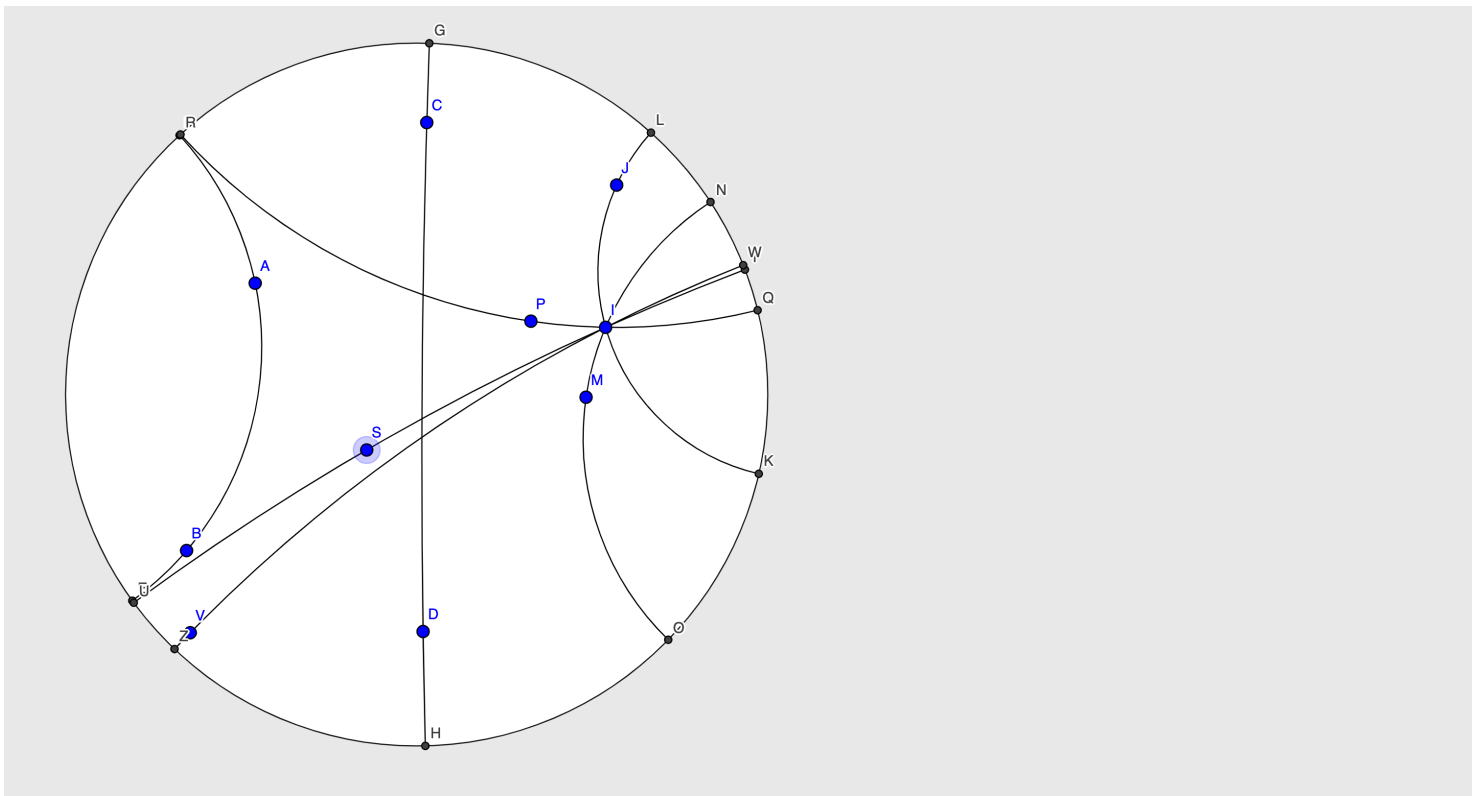
$$\ell = \{(x, mx + n) : m, n \in \mathbb{R}\}.$$

Ένα σημείο ανήκει στην ευθεία αν ανήκει ως στοιχείο της. Ένα σημείο βρίσκεται μεταξύ δυο άλλων ορίζεται με προφανή τρόπο, ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να ορισθεί χρησιμοποιώντας μήκη. Το ίδιο μπορεί να γίνει και για την ισότητα γωνιών. Δυο ευθείες είναι παράλληλες αν η τομή τους είναι κενή. Μ' αυτά τα δεδομένα έχουμε ένα μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, το Καρτεσιανό Μοντέλο.

Τώρα θα δώσουμε ένα μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας:

- Σημεία είναι τα σημεία στο εσωτερικό ενός δίσκου.
- Ευθείες είναι τόξα κύκλων που είναι κάθετοι στον οριακό κύκλο.

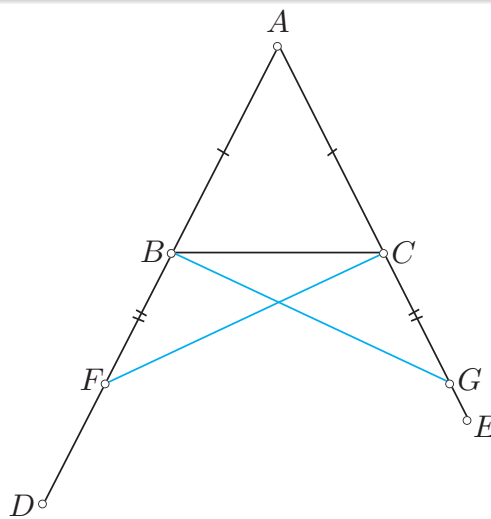
Η διάταξη σημείων πάνω στην ευθεία έχει προφανή ορισμό. Η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται έτσι ώστε οι ευθείες να έχουν άπειρο μήκος. Μπορεί ναδειχθεί ότι αυτό το μοντέλο αυτό ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του Ευκλείδη, **ΕΚΤΟΣ** του αξιώματος παραλληλίας.



Τρίγωνα

Ισοσκελή Τρίγωνα

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, και, αν προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές, οι γωνίες κάτω από την βάση θα είναι επίσης ίσες μεταξύ τους.



Έστω $\triangle ABC$ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο, με $\overline{AB} = \overline{AC}$. Μπορούμε να προεκτείνουμε το \overline{AB} έως το D και το \overline{AC} έως το E . Επιλέγουμε ένα σημείο F στο \overline{BD} . Υποθέτοντας ότι $\overline{AE} > \overline{AF}$, μπορούμε να αφαιρέσουμε τμήμα $\overline{AG} = \overline{AF}$. Αν $\overline{AE} \leq \overline{AF}$, τότε προεκτείνουμε το \overline{AE} αρχικά και στην συνέχεια να επιλέξουμε τμήμα $\overline{AG} = \overline{AF}$.

Φέρουμε τα \overline{FC} και \overline{BG} . Εφόσον $\angle A = \angle A$, θα ισχύει ότι $\triangle FAC \cong \triangle GAB$ από το Κριτήριο ΠΓΠ. Επομένως, έχουμε $\overline{CF} = \overline{BG}$, $\angle AFC = \angle AGB$, και $\angle ABG = \angle ACF$ ως συνέπεια του ορισμού ισότητας τριγώνων.

Έτσι έχουμε,

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \overline{AG} - \overline{AC} = \overline{CG}.$$

Οπότε, $\triangle BFC \cong \triangle CGB$ από το ΠΓΠ, και έτσι $\angle FBC = \angle GCB$, και $\angle BCF = \angle CBG$. Τελικά,

$$\angle ABC = \angle ABG - \angle CBG = \angle ACF - \angle BCF = \angle ACB.$$

□