Αριθμοί και Σχήματα

Στράτος Πρασίδης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

6 Δεκεμβρίου 2022

Φυσικοί Αριθμοί

Ορίζουμε τους φυσικούς αριθμούς:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ιδιότητες:

- Δύο πράξεις ορίζονται και είναι κλειστές στους φυσικούς αριθμούς: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.
- Κάποιες φορές, η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται αλλά όχι πάντα:

$$3 - 2 = 1,\ 2 - 3 \notin \mathbb{N},\ 6 : 3 = 2,\ 5 : 2 \notin \mathbb{N}.$$

- Είναι αριθμοί όπου για κάθε έναν έχουμε τον επόμενό του. Ουσιαστικά ορίζονται από την πράξη $+1$ ξεκινώντας από το 0.

Από τον ορισμό τους, οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποιες, πιο τεχνικές, ιδιότητες:

1. (Αρχή της Καλής Διάταξης) Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
2. (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής) Έστω $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n. Υποθέτουμε ότι
    1. Για κάποιον φυσικό αριθμό n, η $P(k)$ αληθεύει.
    2. Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει.

    Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq k$.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Είναι πολύ χρήσιμες ιδιότητες στις αποδείξεις που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς ή που ανάγονται σε φυσικούς αριθμούς.

Παραστατικά:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη σκάλα και ξέρουμε δυο πράγματα:

1. Μπορούμε να ανεβούμε στο πρώτο σκαλοπάτι.
2. Εάν μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα σκαλοπάτι, τότε μπορούμε να ανεβούμε στο επόμενο.

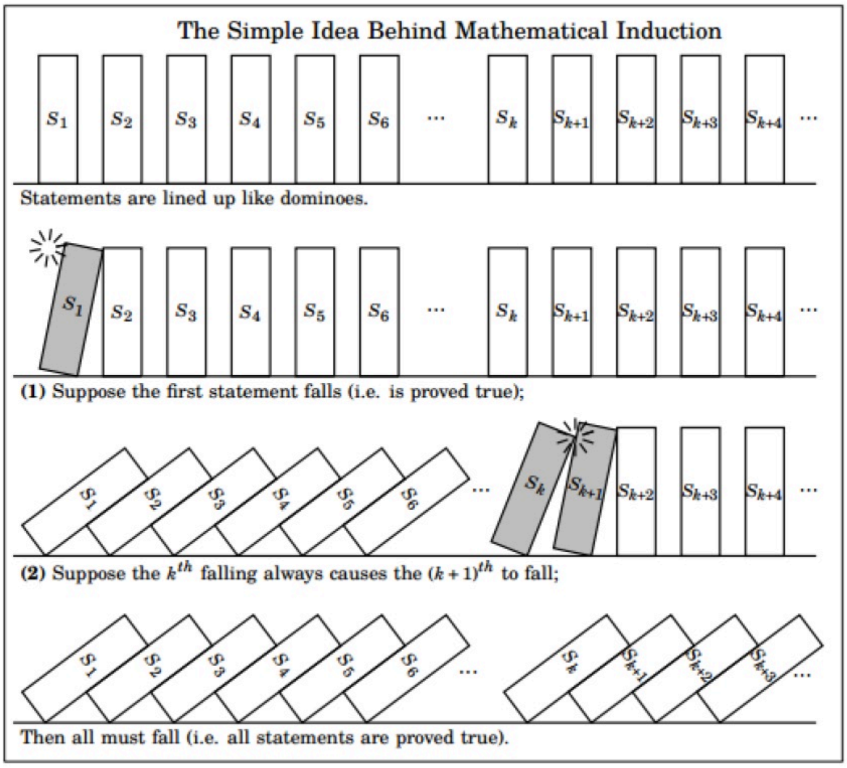
Απ’ αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να φτάσουμε σε κάθε σκαλοπάτι της σκάλας.

Με άλλον τρόπο:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη συλλογή από ντόμινο και ξέρουμε δυο πράγματα:

1. Υποθέτουμε ότι πέφτει το πρώτο ντόμινο.
2. Εάν πέσει κάποιο ντόμινο τότε θα πέσει και το επόμενο.

Απ’ αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι όλα τα ντόμινο θα πέσουν.


The Simple Idea Behind Mathematical Induction
S_1
S_2
S_3
S_4
S_5
S_6
...
S_k
S_{k+1}
S_{k+2}
S_{k+3}
S_{k+4}
...
Statements are lined up like dominoes.
(1) Suppose the first statement falls (i.e. is proved true);
(2) Suppose the k^{th} falling always causes the $(k+1)^{th}$ to fall;
Then all must fall (i.e. all statements are proved true).

Παραδείγματα Επαγωγής-1

(1) Μια ομάδα n πειρατών πρόκειται να μοιράσει έναν θησαυρό, από χρυσό, έτσι ώστε κάθε πειρατής θα πάρει ένα ίσο μερίδιο. Όμως οι πειρατές δεν είναι αντικειμενικοί, και κάθε πειρατής έχει την δικιά του άποψη του τι είναι το $\frac{1}{n}$ του θησαυρού. Να δώσετε μια στρατηγική μοιρασιάς του θησαυρού.

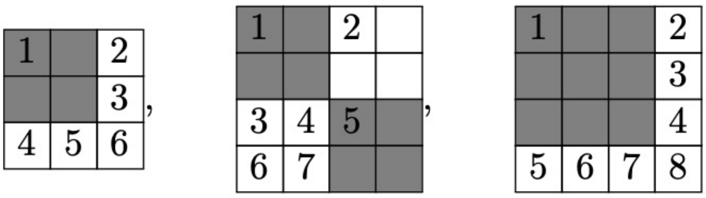
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μέθοδο να μοιραστούν $k - 1$ πειρατές τον θησαυρό. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από k-πειρατές.
Παίρνουμε ένα κομμάτι του θησαυρού και το βάζουμε σε έναν καινούργιο σωρό. Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρις ότου ένας πειρατής δηλώσει ότι αυτό είναι το δίκαιο μερίδιο του θησαυρού γι' αυτόν. Οι υπόλοιποι $k - 1$ πειρατές πιστεύουν ότι αυτό το μερίδιο δεν είναι δίκαιο γι' αυτούς, διαφορετικά θα είχαν επιλέξει τον καινούργιο σωρό νωρίτερα.
Από την υπόθεση της επαγωγής, οι υπόλοιποι πειρατές $k - 1$ μπορούν τώρα να μοιράσουν τον υπόλοιπο θησαυρό.

(2) Δείξτε ότι μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε n τετράγωνα, για κάθε $n \geq 6$. Σ' αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα λίγο διαφορετικό. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο S με $n-3$ υποτετράγωνα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με n υποτετράγωνα:

$$S \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline S & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}.$$

Τότε αν έχουμε 6 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις με 6, 9 , 12, 15 …υποτετράγωμα. Αν έχουμε 7 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 7, 10 , 13, 16 …, και αν έχουμε 8 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 8, 11 , 14, 17 …υποτετράγωνα.
Άρα πρέπει να υποδιαιρέσουμε ένα τετράγωνο σε 6, 7 και 8 τετράγωνα και τότε μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε οποιοδήποτε αριθμό υποτετραγώνων.

Γι΄αυτά τα υποτετράγωνα έχουμε



(3) Ένα ATM μηχάνημα έχει μόνο νομίσματα των €5 και κέρματα των €2. Δείξτε ότι το μηχάνημα μπορεί να δώσει οποιοδήποτε ακέραιο ποσό, μεγαλύτερο των €3, του ζητηθεί.
Έστω n είναι το πόσο για ανάληψη. Θα δώσουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για $n = 4$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι $2 + 2$. Τώρα υποθέτουμε ότι μπορούμε να κάνουμε ανάληψη το ποσό των €k. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε €$k + 1$.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

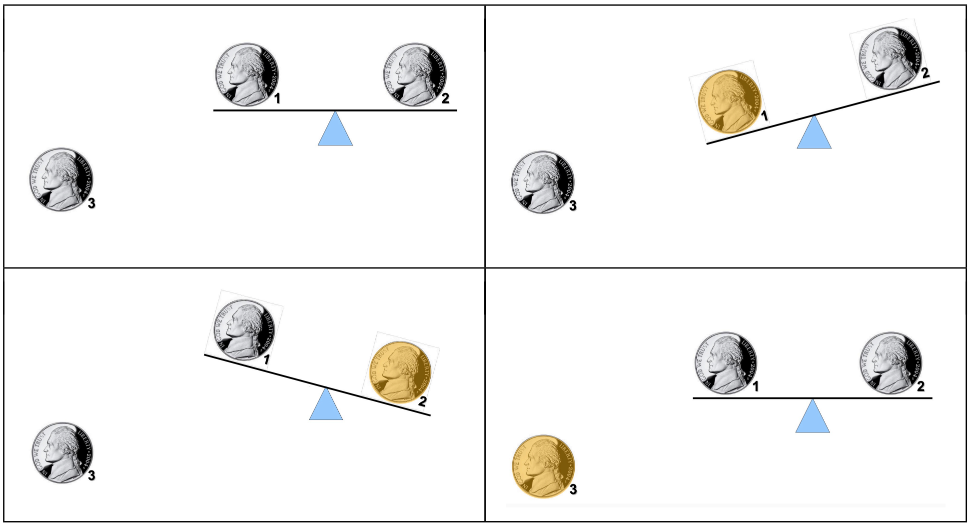
- Αν στο ποσό k υπάρχουν δυο δίευρα, τότε τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με ένα πεντάευρο
- Αν υπάρχει ένα πεντάευρο, τότε το αφαιρούμε και το αντικαθιστούμε με τρία δίευρα.
- Αν υπάρχουν ένα πεντάευρο και ένα δίευρο, τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με τέσσερα δίευρα.

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ανάληψη €$k + 1$.

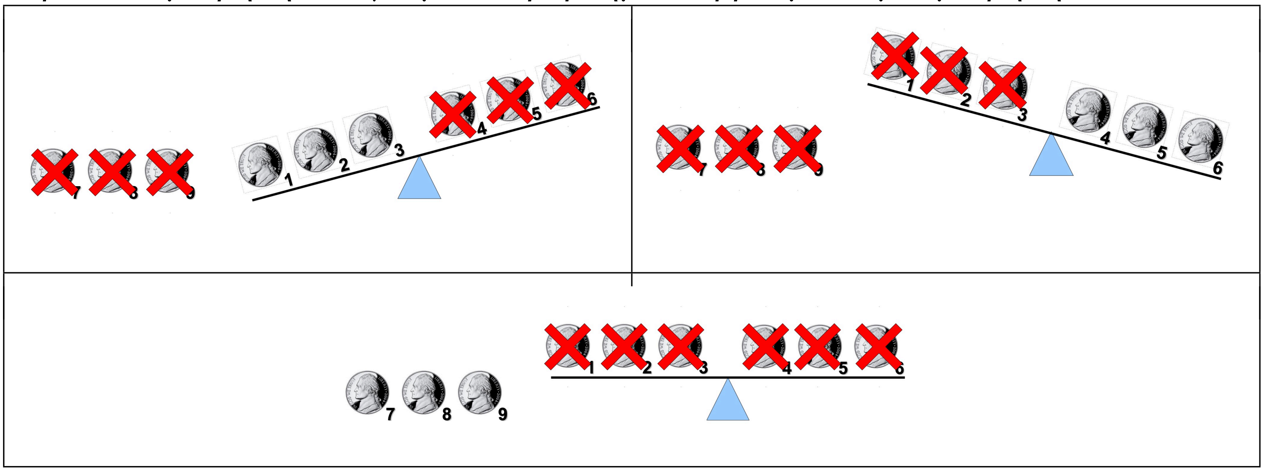
Το πρόβλημα έχει και μια άλλη διαφορετική λύση. Θέλουμε να πάρουμε €n.

- Αν το n είναι άρτιος, τότε μπορούμε να το πάρουμε μόνο με δίευρα.
- An to n είναι περιττός τότε, επειδή το $n-5$ είναι άρτιος, μπορούμε να το πάρουμε ως ένα πεντάευρο και τα υπόλοιπα δίευρα.

(4) Δίνονται τρία ίδια νομίσματα, δυο από τα οποία είναι γνήσια και ένα πλαστό. Το πλαστό νόμισμα ζυγίζει πιο πολύ από τα άλλα. Χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά μόνο μια φορά, να βρείτε το πλαστό νόμισμα.
Ο παρακάτω πίνακας δίνει την απάντηση:



Πιο δύσκολο πρόβλημα: Δίνονται εννιά όμοια νομίσματα έτσι ώστε οκτώ απ’ αυτά είναι όμοια και το άλλο πλαστό, που ζυγίζει περισσότερο. Να βρείτε το πλαστό νόμισμα με δυο ζυγίσματα.Με την παρακάτω μέτρηση, ανάγουμε το πρόβλημα να βρούμε σε μια μέτρηση το πλαστό νόμισμα.



Εδώ παρατηρούμε ένα μοτίβο:

1. Εάν δεν κάνουμε καμία μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή ενός νομίσματος, γιατί γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πλαστό.
2. Εάν κάνουμε μια μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή τριών νομισμάτων.
3. Εάν κάνουμε δυο μετρήσεις, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή εννιά νομισμάτων.

Παρατηρούμε ότι $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$.

Να δείξετε ότι με n μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή 3^n νομισμάτων.

Θα αποδείξουμε την πρόταση με μαθηματική επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για $n = 0$, όπως ήδη παρατηρήσαμε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για k.
Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι με $n = k$ μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό νόμισμα από μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Θα δείξουμε την πρόταση για $n = k + 1$.

Χωρίζουμε την συλλογή των 3^{k+1} νομισμάτων σε τρεις ομάδες των 3^k νομισμάτων. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε A, B και C. Τοποθετούμε τα νομίσματα των A και B στην ζυγαριά. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Η A είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην A.
2. Η B είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην B.
3. ΟΙ A και B έχουν το ίδιο βάρος. Τότε το πλαστό είναι στην C.

Σε κάθε περίπτωση το πλαστό βρίσκεται σε μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Από την υπόθεση της επαγωγής, με k μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό.
Με την αρχική μέτρηση, συνολικά κάναμε $k+1$ μετρήσεις, αποδεικνύοντας την πρόταση.

(5) Όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα (**βρείτε το λάθος**).

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε σε κάθε συλλογή k αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Θα δείξουμε ότι σε κάθε συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Παίρνουμε μια συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων. Από την υπόθεση τα πρώτα k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα τελευταία k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Άρα όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Παραδείγματα Επαγωγής-2

(1) Να δείξετε ότι

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned}
1+2 &= 3 = \frac{2.3}{2} \\
1+2+3 &= 6 = \frac{3.4}{2} \\
1+2+3+4 &= 10 = \frac{4.5}{2} \quad \text{(Αγία Τετράκτυς)} \\
1+2+3+4+5 &= 15 = \frac{5.6}{2}
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2}{2} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$(1+2+\cdots+m)+(m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να δειχτεί χωρίς την χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής, πολύ απλά. Η μέθοδος αυτή επινοήθηκε από τον Gauss όταν ήταν μαθητής δημοτικού. Το πρόβλημα που έβαλε ο δάσκαλος στους μαθητές τους ήταν οι μαθητές να βρουν το άθροισμα

$$1 + 2 + \cdots + 100.$$

Ο δάσκαλος παρατήρησε ότι ο Gauss τελείωσε πολύ γρήγορα. Ο Gauss παρατήρησε ότι

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 50 + 51 = 101.$$

και έχουμε 50 τέτοια ζευγάρια. Άρα το άθροισμα είναι

$$101.50 = 5050.$$

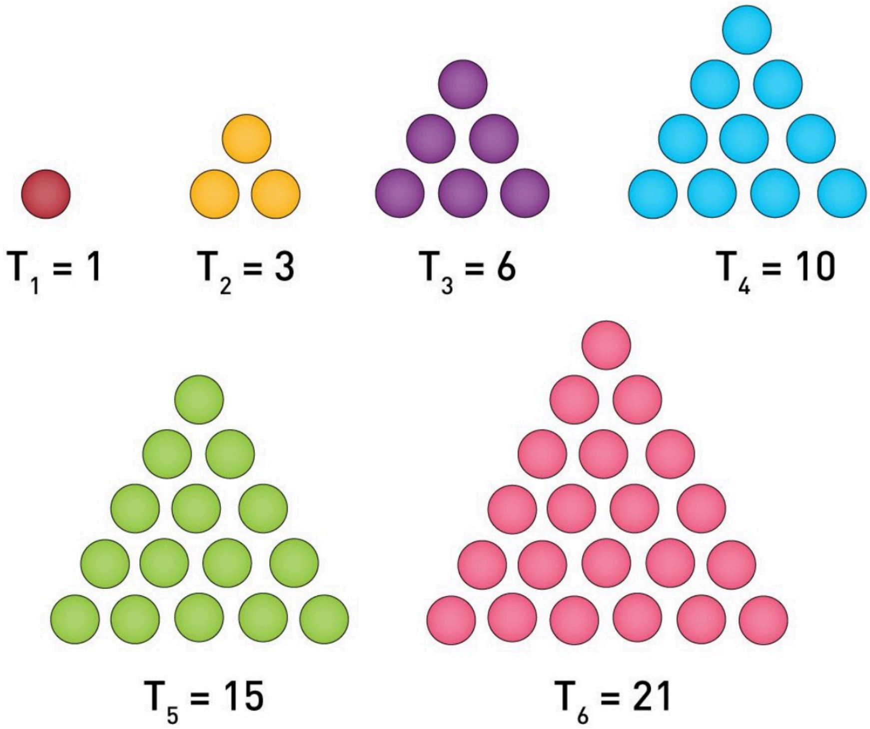
Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω πιο συστηματικά. Έστω

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

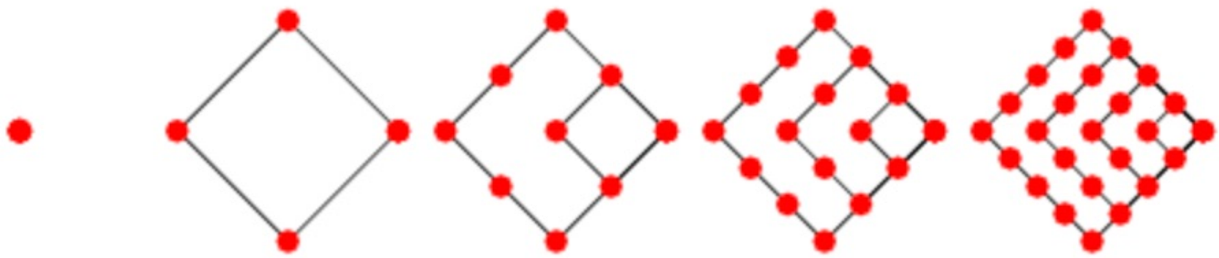
Γράφουμε το S με δυο τρόπους και προσθέτουμε

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + 2 + \cdots + n \\ S_n & = & n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \Rightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

Οι αριθμοί S_n ονομάζονται τριγωνικοί γιατί μπορούν να κατανεμηθούν σε τρίγωνο:



Συνεχίζοντας αυτήν ορολογία, ορίζουμε τους τετραγωνικούς αριθμούς, ως αριθμούς που μπορούν να αναπαρασταθούν σε τετράγωνα:



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots$$

Θέτουμε $Q_n = n^2$ για τον n-οστό τετράγωνο αριθμό. Παρατηρούμε

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n + 1.$$

Ξεκινάμε με το επόμενο σχήμα:

Παρατηρούμε ότι

1. Ο συνολικός αριθμός των τριγώνων είναι n^2.
2. Ο αριθμός των πράσινων τριγώνων είναι

$$1, 3, 6, 10, 15, 21$$

   δηλαδή S_n.
3. Ο αριθμός των άσπρων τριγώνων είναι

$$0, 1, 3, 6, 10$$

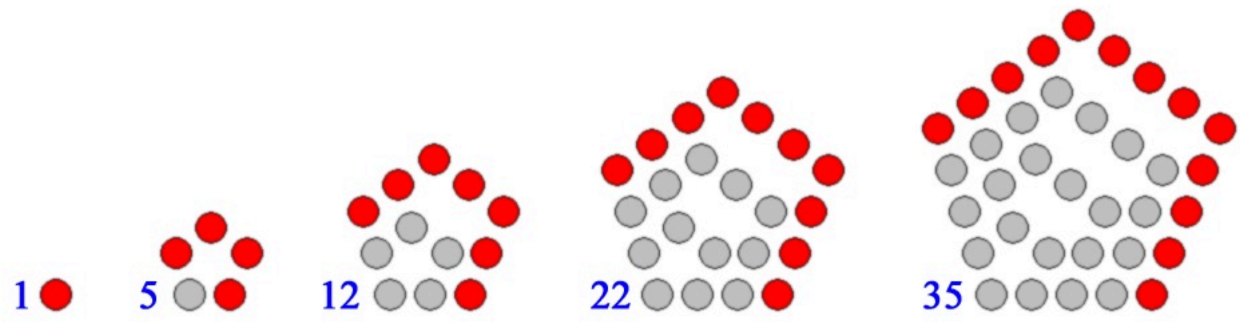
   δηλαδή S_{n-1}.

Άρα $S_n + S_{n-1} = n^2$.

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση:

$$
\begin{aligned}
S_n + S_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)+(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2
\end{aligned}
$$

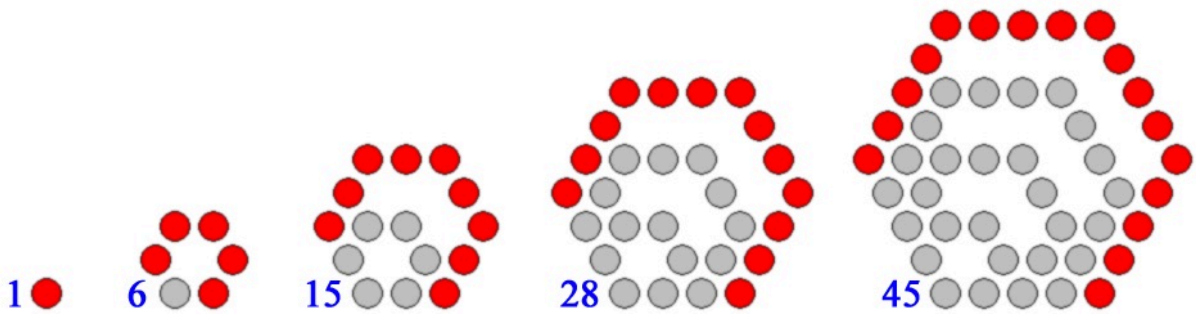
Επίσης υπάρχουν πεντάγωνοι αριθμοί:



με γενική φόρμουλα

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

και εξάγωνοι



με γενική φόρμουλα:

$$H_n = 2n^2 - n$$

.

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε s- γωνικούς αριθμούς αν μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα κανονικό s-γωνο. Ο τύπος για τον n-οστο τέτοιο αριθμό δίνεται:

$$P(s,n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2} = (s-2)\frac{n(n-1)}{2} + n.$$

Για $n = 3$:

$$P(3,n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.$$

(2) Να δείξετε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 &= 5 = \frac{2.3.5}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 &= 14 = \frac{3.4.7}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 &= 30 = \frac{4.5.9}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 &= 55 = \frac{5.6.11}{6}
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}
(1^2 + 2^2 + \cdots + m^2) + (m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\
&= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} \\
&= \frac{(m+1)(2m^2 + m + 6m + 6)}{6} \\
&= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6}
\end{aligned}$$

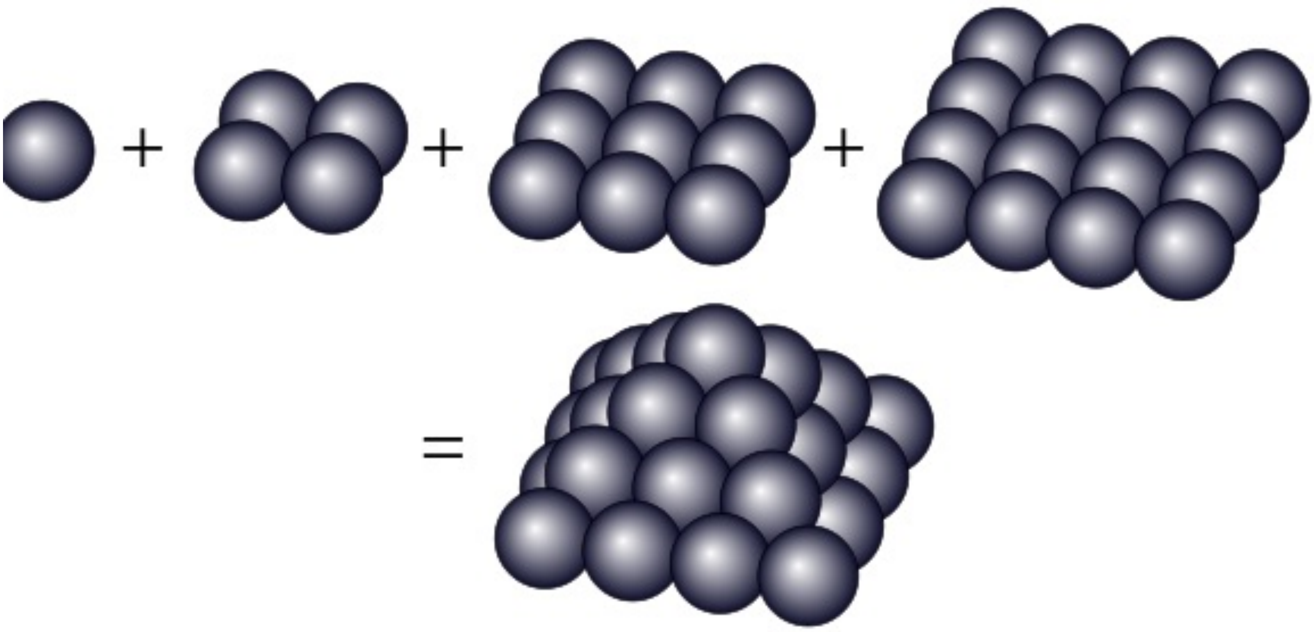
Παρατηρούμε ότι

$$(m+2)(2m+3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6.$$

Συνοψίζοντας

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Παραστατικά:



Γι’ αυτό αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται τετράγωνοι πυραμοειδείς αριθμοί.

(3) Να δείξετε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + n)^2, n \geq 1.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2^2}{4} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 + (m+1)^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

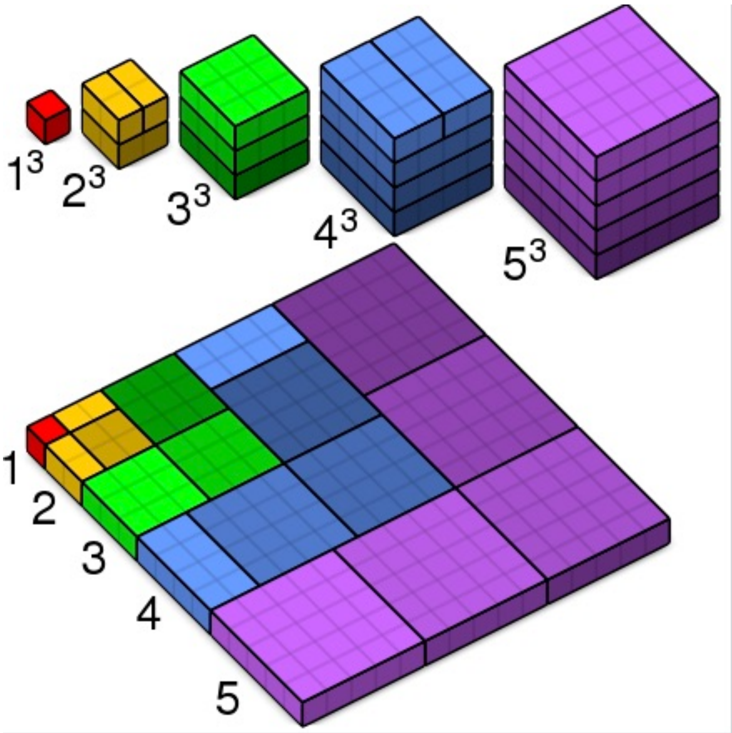
$$\begin{aligned}
(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3) + (m+1)^3 &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\
&= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2[m^2 + 4(m+1)]}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(m+2)^2 = m^2 + 2.2.m + 2^2 = m^2 + 4m + 4.$$

Οι υπόλοιπες ισότητες είναι συνέπεια του πρώτου παραδείγματος

Γεωμετρικά:

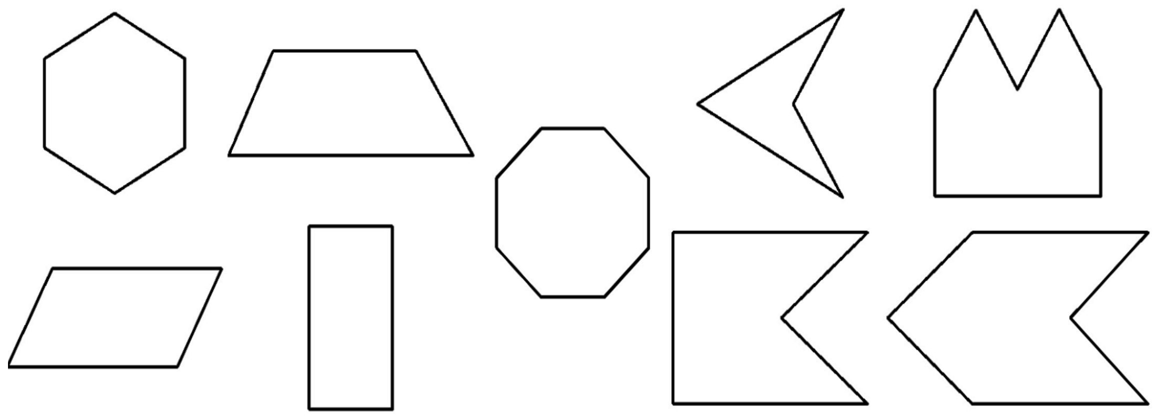


(4) Να δείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός κυρτού n-γώνου είναι $n(n-3)/2$, για $n \geq 4$.

Διαγώνιος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με μια μη-γειτονική κορυφή.

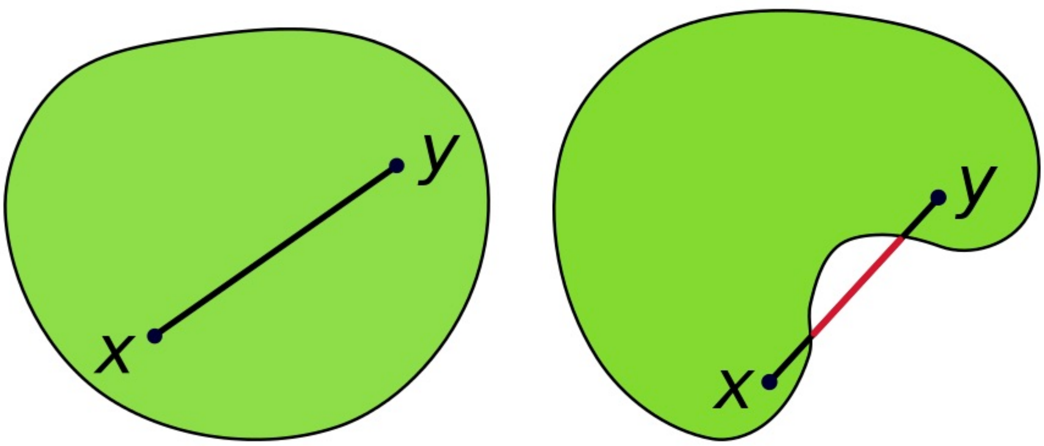
Ένα σχήμα (μια περιοχή) στο επίπεδο ή στον χώρο ονομάζεται **κυρτό** αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία του περιέχεται στο σχήμα.

Κάποια σχήματα

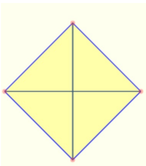
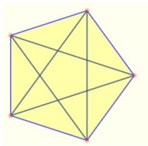
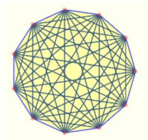
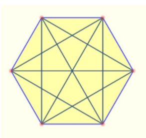
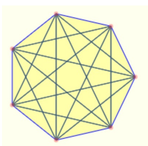
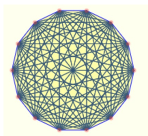
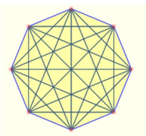
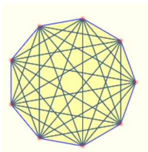
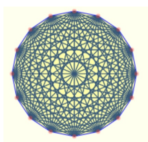


Τα πρώτα πέντε είναι κυρτά και τα άλλα τέσσερα δεν είναι

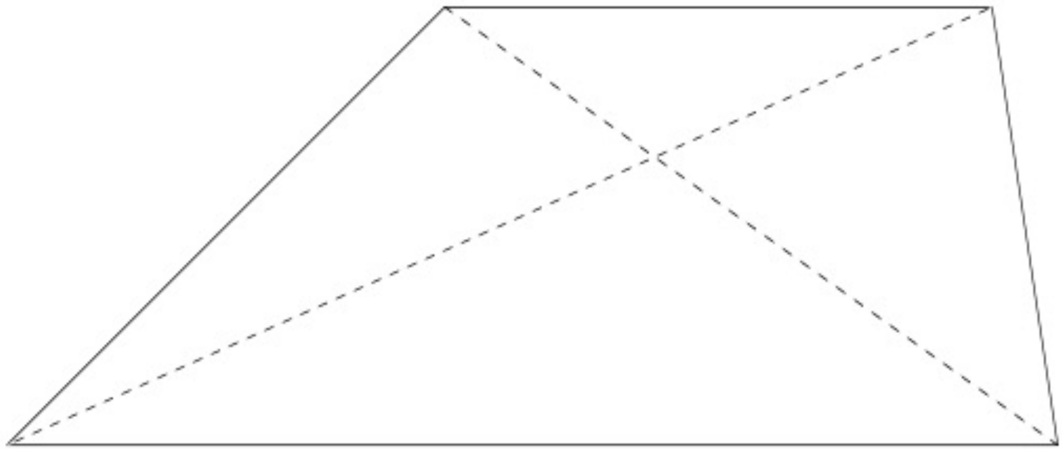
Και πιο παραστατικά:



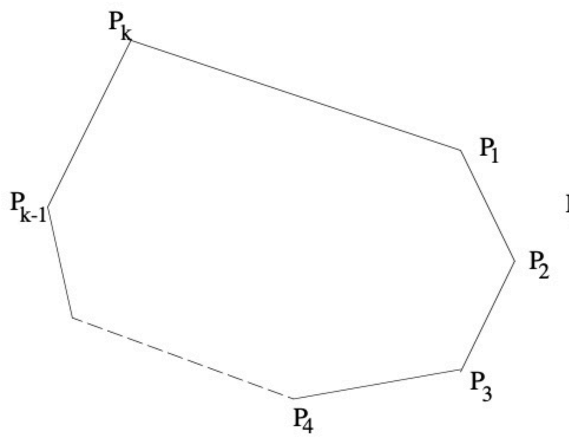
Πρώτα να δούμε κάποια παραδείγματα.

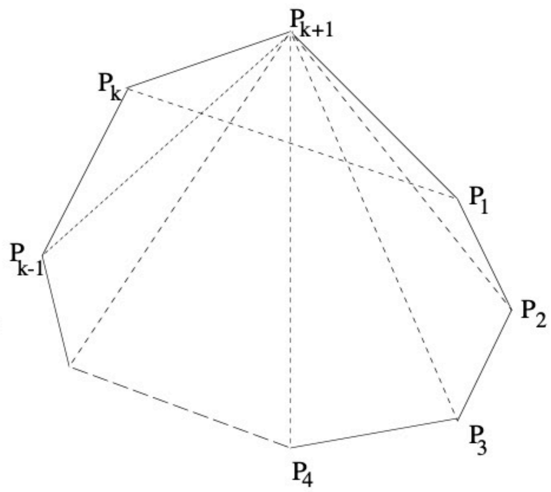
	2		5		44
	9		14		77
	20		27		104

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$. Τότε, έχουμε δυο διαγώνιους. Αλλά και $4(4-3)/2 = 2$ και η πρόταση ισχύει.



Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$, δηλαδή υποθέτουμε ότι ένα κυρτό k-γώνο έχει $k(k-3)/2$ διαγώνιους. Θα δείξουμε ότι ένα κυρτό $(k+1)$-γώνο έχει $(k+1)(k-2)/2$ διαγώνιους.





Όταν προσθέσουμε μια ακόμη κορυφή σε ένα κυρτό k-γώνο, οι διαγώνιοι που είχαμε πριν παραμένουν. Από την υπόθεση έχουμε ήδη $k(k-3)/2$ διαγώνιους.
Επίσης, έχουμε τις διαγώνιους από την κορυφή P_{k+1} στις όλες τις κορυφές, εκτόςτων γειτονικών, P_1 και P_k, δηλαδή επιπλέον $(k-2)$-διαγώνιους. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το P_1 με το P_k, που ήταν πλευρά, τώρα είναι διαγώνιος. Άρα ο αριθμός των διαγώνιων συνολικά είναι:

$$\frac{k(k-3)}{2}+k-2+1=\frac{k^2-3k}{2}+k-1=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

(5) Δείξτε ότι $n^2 \geq 2n + 1$, $n \geq 3$.
Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι εκθετική ως προς το n και η δεξιά γραμμική. Σε γενικές γραμμές, εκθετικές συναρτήσεις είναι μεγαλύτερες των γραμμικών, για **μεγάλες τιμές** του n.
Παρατηρούμε ότι η υπόθεση $n \geq 3$ είναι απαραίτητη:
$n = 0: \ 0 < 1.$
$n = 1: \ 1 < 3.$
$n = 2: 4 < 5.$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 3$, $3^2 = 9 > 7 = 2.3 + 1$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Δηλαδή $k^2 \geq 2k + 1$, όπου $k \geq 3$.
Θα δείξουμε ότι $(k+1)^2 \geq 2(k+1) + 1 = 2k + 3$. Ξεκινάμε αναλύοντας την αριστερή πλευρά της σχέσης:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 2(k+1) + 2k > 2(k+1) + 1,$$

γιατί $2k \geq 6 > 1$.

(6) Να δείξετε ότι

$$n^2 \leq 2^n, \ n \geq 4.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι δυνάμεις του n ενώ η δεξιά πλευρά είναι δύναμη κάποιου σταθερού αριθμού. Και πάλι, για μεγάλες δυνάμεις, η αριστερή πλευρά γίνεται μικρότερη από την δεξιά:
$n = 0: \ 0 < 1.$
$n = 1: \ 1 < 2.$
$n = 2 : 4 = 4.$
$n = 3 : 9 > 8.$
$n = 4 : 16 = 16.$
$n = 5 : 25 < 32$
Γι' αυτό ξεκινάμε από το $n \geq 4$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$, γιατί η σχέση ξεκινάει από το 4:

$$4^2 = 16 = 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι $k^2 \leq 2^k$.
Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$. Οπότε

$$2^{k+1} = 2.2^k \geq 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο παράδειγμα στο τέταρτο βήμα.

(7) Δείξτε ότι $(2n)!(n+1) > 4^n (n!)^2$ για $n > 1$.
(Υπενθυμίζουμε ότι $n! = 1.2.\ldots.n$).
Η σχέση αυτή είναι πιο πολύπλοκη. Απλά, τα παραγωγικά μεγαλώνουν πολύ γρήγορα σε σχέση με τις δυνάμεις.
$n = 0: \; 1 = 1.$
$n = 1: \; 2.2 = 4.1.$
$n = 2: 4!.3 = 1.2.3.4.3 = 72 > 4^2.(2!)^2 = 16.4 = 64.$
Για $n = 3$, ας συγκρίνουμε το $6!.4 = 1.2.3.4.5.6.4$ και το $4^3.(3!)^2 = 4.4.4.1.2.3.1.2.3$ χωρίς την χρήση υπολογιστών:

$$1.\bcancel{2.3}.\cancel{4}.5.\xcancel{6}.\cancel{4} \sim \cancel{4.4}.4.1.\bcancel{2.3}.1.\xcancel{2.3}.$$

και τελικά η αριστερή πλευρά είναι μεγαλύτερη της δεξιάς.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 2$, $4!.3 = 72 > 4^2.(2!)^2 = 64$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, $(2k)!(k+1) > 4^k(k!)^2$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$ δηλαδή $(2k+2)!(k+2) > 4^{k+1}((k+1)!)^2$. Ξεκινάμε από την αριστερή πλευρά της σχέσης προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε ώστε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση της επαγωγής:

$$(2k+2)!(k+2) = (2k)!(2k+1)(2k+2)(k+2) = (2k)!(2k+1)2(k+1)(k+2)$$

Εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής,

$$(2k+2)!(k+2) > 2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης είναι μεγαλύτερο του δεξιού μέρους της αρχικής σχέσης

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2$$

Άρα

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2 = 4.4^k(k!)^2(k+1)^2 \Leftrightarrow (2k+1)(k+2) > 2(k+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2k^2+4k+k+2 > 2k^2+4k+2 \Leftrightarrow 5k > 4k.$$

Η τελευταία σχέση προφανώς ισχύει για $k \geq 2$.

(8) Να δείξετε ότι $n! > 3^n$, $n \geq 7$.
Η ιδέα και πάλι είναι ότι, γενικά, τα παραγοντικά είναι μεγαλύτερα από τις δυνάμεις σταθερού αριθμού γιατί στα παραγοντικά πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς που αυξάνουν ενώ στις δυνάμεις πολλαπλασιάζουμε με έναν σταθερό αριθμό.
Αρχικά ελέγχουμε κάποιες τιμές:
$n = 0: \; 1 = 1, \quad n = 1: \; 1 < 3, \quad n = 2: \; 2 < 9 \quad n = 3: \; 1.2.3 = 6 < 3.3.3 = 27.$
$n = 4: \; 1.2.3.4 = 24 < 3.3.3.3 = 81, \quad n = 5: \; 1.2.3.4.5 = 120 < 3.3.3.3.3 = 243.$
$n = 6: 1.2.3.4.5.6 = 720 < 3.3.3.3.3.3 = 729 \quad n = 7: 1.2.3.4.5.6.7 = 5040 > 2187$.Από δω και πέρα, η ανισότητα διατηρείται γιατί στο επόμενο βήμα, πολλαπλασιάζουμε την αριστερή πλευρά με έναν αριθμό μεγαλύτερο του 3 και την δεξιά επί 3.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 7$, κάτι που το κάναμε ήδη:

$$7! = 1.2.3.4..5.6.7 = 5040 > 2187 = 3^7.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 7$, δηλαδή $m! > 3^m$. Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(m + 1)! > 3^{m+1}$.
Υπολογίζουμε

$$(m + 1)! = (m + 1).m! > (m + 1)3^m > 3.3^m = 3^{m+1}$$

κι αυτό γιατί $m > 7$ και επομένως $m + 1 > 3$.

(9) Μπορεί να δειχτεί ότι $(2+\sqrt{3})^n$ μπορεί να γραφτεί ως $a_n + b_n\sqrt{3}$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ισχύει $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
Αυτή η σχέση βγαίνει ουσιαστικά από την ανάπτυξη της δεξιάς πλευράς, κάνοντας όλους τους πολλαπλασιασμούς και χρησιμοποιώντας ότι $(\sqrt{3})^2 = 3$.
Και πάλι ας κάνουμε κάποιους υπολογισμούς για να δούμε πως δουλεύει η διαδικασία:

$$\begin{aligned}
n=0: \quad & (2+\sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1, b_0 = 0 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1.\\
n=1: \quad & (2+\sqrt{3})^1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1 \Rightarrow 2^2 - 3.1^2 = 1.\\
n=2: \quad & (2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2.2.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow\\
& a_2 = 7, b_2 = 4 \Rightarrow 7^2 - 3.4^2 = 49 - 3.16 = 1.\\
n=3: \quad & (2+\sqrt{3})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{3} + 3.2.(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 3.2.3 + 3\sqrt{3} =\\
& 26 + 15\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 26, b_3 = 15 \Rightarrow 26^2 - 3.15^2 = 676 - 3.225 = 1.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}.(\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$.

Μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς διαφορετικά για $n = 3$:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^3 &= (2+\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3}) = (7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \\ &= 14 + 7\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 4.3 = 26 + 15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

όπως παραπάνω.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Οπότε

$$a_0^2 - 3b_0^2 = 1^2 - 3.0^2 = 1,$$

οπότε ισχύει. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$(2+\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}, \quad a_m^2 - 3b_m^2 = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 = 1$.

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{m+1} &= (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m = (2+\sqrt{3})(a_m + b_m\sqrt{3})\\ &= 2a_m + 2b_m\sqrt{3} + a_m\sqrt{3} + 3b_m\\ &= (2a_m + 3b_m) + (a_m + 2b_m)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Άρα, $a_{m+1} = 2a_m + 3b_m$ και $b_{m+1} = a_m + 2b_m$. Τότε

$$\begin{aligned}a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 &= (2a_m + 3b_m)^2 - 3(a_m + 2b_m)^2\\ &= 4a_m^2 + 12a_m b_m + 9b_m^2 - 3(a_m^2 + 4a_m b_m + 4b_m^2)\\ &= 4a_m^2 + \cancel{12a_m b_m} + 9b_m^2 - 3a_m^2 - \cancel{12a_m b_m} - 12b_m^2\\ &= a_m^2 - 3b_m^2 = 1.\end{aligned}$$

(10) (Ανισότητα του Bernoulli) Δείξτε ότι $(1+x)^n \geq 1+nx$ για $n \geq 1$ και $x \geq -1$.

Αν ελέγξουμε την σχέση για κάποιες τιμές του x:
$x=-1$: $0 \geq 1-n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$.
$x=0$: $1^n \geq 1$.
$x=1$: $2^n \geq 1+n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική.
$x=2$: $3^n \geq 1+2n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική, όπως και πριν.

Τώρα ελέγχουμε ως προς τις τιμές του n:
$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$, προφανές.
$n = 2$: $(1 + x)^2 = \cancel{1 + 2x} + x^2 \geq \cancel{1 + 2x}$, προφανές γιατί $x^2 \geq 0$, για κάθε x.
$n = 3$: $(1 + x)^3 = \cancel{1 + 3x} + 3x^2 + x^3 \geq \cancel{1 + 3x}$. Για να δούμε ότι ισχύει, πρέπει να δείξουμε ότι

$$0 \leq 3x^2 + x^3 = x^2(3 + x)$$

Το $x^2 \geq 0$ και $3 + x > 0$ γιατί $x \geq -1 \Rightarrow 3 + x \geq 3 - 1 = 2 > 0$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$, $1 + x = 1 + x$. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, για $x \geq -1$. Θα δείξουμε $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)\underbrace{(1 + x)^k \geq (1 + kx)}_{\text{από την υπόθεση}}(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

Κι αυτό γιατί $kx^2 \geq 0$.

Είναι μια ενδιαφέρουσα ανισότητα. Για παράδειγμα:

- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1+n.\dfrac{1}{n}=2.$
- $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n \geq 1+n.\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2n+1}{n+1}.$

(11) Δείξτε ότι ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Και πάλι ας κάνουμε κάποια παραδείγματα:
$n = 0$: Το σύνολο με κανένα στοιχείο είναι το κενό $\emptyset$ και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό του.
$n = 1$: Το σύνολο έχει ένα στοιχείο $S = \{a\}$ και έχει δυο υποσύνολο, το $\emptyset$ και το $\{a\}$.
$n = 2$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} = S.$$

$n = 3$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S.$$

$n = 4$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c, d\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\begin{aligned}&\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},\\ &\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} = S.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο στην παραπάνω κατασκευή:

- Πάντα εμφανίζονται το $\emptyset$ και το σύνολο S.
- Τα υποσύνολα ενός συνόλου είναι επίσης και υποσύνολα κάθε υπερσυνόλου του.
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε τα υποσύνολα ενός συνόλου προσθέτοντας στοιχεία στα υποσύνολα υποσυνόλων του.
- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός υποσυνόλων εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των στοιχείων και όχι από την φύση τους.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύνολο είναι κενό και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό. Άρα η σχέση ισχύει. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για ένα σύνολο με k στοιχεία. Δηλαδή ένα τέτοιο σύνολο έχει 2^k υποσύνολα. Θα δείξουμε ότι ένα σύνολο με $k+1$-στοιχεία, $S = \{x_1, \dots x_{k+1}\}$ έχει 2^{k+1} υποσύνολα.
Από την υπόθεση, το σύνολο $\{x_1, \dots x_k\}$ έχει 2^k υποσύνολα. Για κάθε ένα απ' αυτά τα υποσύνολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμη με την πρόσθεση του x_{k+1} σ' αυτό. Άρα έχουμε ακόμη 2^k υποσύνολα. Συνολικά λοιπόν έχουμε $2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$ υποσύνολα.
Θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη αυτού του παραδείγματος χρησιμοποιώντας το Διώνυμο του Νεύτωνα.

12) Για $n \geq 3$, να δείξετε ότι υπάρχουν n φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Για $n = 3$, έχουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{3}{2.3} + \frac{2}{2.3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1 \right).$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή υπάρχουν k φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υπάρχουν $k + 1$ φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} = 1.$$

Ξεκινάμε με την υπόθεση, δηλαδή υπάρχουν k φυσικοί, όλοι διαφορετικοί, έτσι ώστε

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Διαιρούμε δια 2 την παραπάνω σχέση:

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2}.$$

Τώρα προσθέτουμε το $1/2$ και στις δυο πλευρές της εξίσωσης

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Παρατηρούμε

- Επειδή $a_i \neq a_j \Rightarrow 2a_i \neq 2a_j$, $i \neq j$.
- Επίσης, επειδή $a_i \neq 1$, $2a_i \neq 2$, για όλα τα i.

Άρα έχουμε εκφράσει το 1 ως άθροισμα $k+1$ κλασμάτων με αριθμητή 1.

(13) Να βρεθεί ο τύπος για το άθροισμα

$$S_n = 2 + 5 + \cdots + (3n - 1)$$

και να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Υπολογίζουμε το άθροισμα για κάποιες τιμές του n:
$n = 1$: $S_1 = 2$.
$n = 2$: $S_2 = 2 + 5 = 7$.
$n = 3$: $S_3 = 2 + 5 + 8 = 15$.
$n = 4$: $S_4 = 2 + 5 + 8 + 11 = 26$.
$n = 5$: $S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$.
$n = 6$: $S_6 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 57$.

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα με το άθροισμα $1+2+\cdots+n$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο όρος $n/2$ θα βρίσκεται στο S_n. Έτσι υπολογίζουμε το $2/n.S_n$:

$$\frac{2}{1}S_1 = 2,\ \frac{2}{2}S_2 = 7,\ \frac{2}{3}S_3 = 10,\ \frac{2}{4}S_4 = 13,\ \frac{2}{5}S_5 = 16,\ \frac{2}{6}S_6 = 19.$$

$$\boxed{\frac{2}{n}S_n = 3n+1 \Rightarrow S_n = \frac{n(3n+1)}{2}.}$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$

$$S_1 = 2 = \frac{1(3.1+1)}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$S_k = \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Θέλουμε να δείξουμε την εξίσωση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(3(k+1)+1}{2} = \frac{(k+1)(3k+3+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(k+1)(3k+4) = 3k^2 + 4k + 3k + 4 = 3k^2 + 7k + 4$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$S_{k+1} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2}.$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (3(k+1)+1) = S_k + (3k+2) = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 \\ &= \frac{k(3k+1)+2(3k+2)}{2} = \frac{3k^2+k+6k+4}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(14) Να βρεθεί ο τύπος για το άθροισμα

$$P_n = 1.2 + 2.3 + \cdots + n.(n+1)$$

και να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή.

Υπολογίζουμε το άθροισμα για κάποιες τιμές του n:
$n = 1$: $P_1 = 2$.
$n = 2$: $P_2 = 2 + 6 = 8$.
$n = 3$: $P_3 = 2 + 6 + 12 = 20$.
$n = 4$: $P_4 = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$.
$n = 5$: $P_5 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70$.
$n = 6$: $P_4 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 = 112$.

$$\boxed{P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$$

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα με το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο όρος $n(n+1)/6$ θα βρίσκεται στο S_n. Έτσι υπολογίζουμε το $6/n(n+1).P_n$:

$$\frac{6}{1.2}P_1 = 6,\ \frac{6}{2.3}P_2 = 8,\ \frac{6}{3.4}P_3 = 10,\ \frac{6}{4.5}P_4 = 12,\ \frac{6}{5.6}P_5 = 14,\ \frac{6}{6.7}P_6 = 16.$$

$$\boxed{\frac{6}{n(n+1)}P_n = 2n+4 \Rightarrow P_n = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.}$$

Θα αποδείξουμε τον τύπο χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$

$$P_1 = 1.2\frac{1.2.3}{3}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$P_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Θέλουμε να δείξουμε την εξίσωση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$P_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Υπολογίζουμε, χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(15) Να δείξετε ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1, \quad n \geq 1.$$

Φυσικά ισχύει για $n=1$ $(1/2<1)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}<1,$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}<1.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση άμεσα έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}<1+\frac{1}{2^{k+1}}$$

που δεν οδηγεί πουθενά. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε άλλη μέθοδο.

Αρχικά, κάνουμε κάποιες πράξεις:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\ &< \frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\end{aligned}$$

και η ανισότητα ισχύει από την υπόθεση.

(16) Εξετάστε αν ισχύει ο τύπος:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 .$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 .$$

Θα δείξουμε την σχέση για $n = k + 1$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(k^2 + 2.k.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(k^2 + 3k + \frac{9}{4}\right) .$$

και τελικά

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}.\frac{4k^2 + 12k + 9}{4} = \frac{4k^2 + 12k + 9}{8}.$$

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + k + 1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + k + 1.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + k + 1 = \frac{1}{2}\left(k^2 + 2.k.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + k + 1 = \frac{k^2+k}{2} + \frac{1}{8} + k + 1$$
$$\frac{4k^2+4k}{8} + \frac{1}{8} + \frac{8k+8}{8} = \frac{4k^2+12k+9}{8}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

ΒΡΕΙΤΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ

Δεν ισχύει για $n = 1$:

$$1 \neq \frac{9}{8}.$$

Το Διώνυμο του Νεύτωνα

Ήδη χρησιμοποιήσαμε τον διώνυμο του Νεύτωνα για $n = 2, 3$. Το διώνυμο μας δίνει το ανάπτυγμα του $(a + b)^n$ ως προς τις δυνάμεις του a και του b. Ειδικότερα ισχύει

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^{n-s} b^s, \quad C_s^n = \binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!}}$$

Οι συντελεστές C_s^n δίνουν των αριθμό των επιλογών s αντικειμένων από μια συλλογή n αντικειμένων, χωρίς επανάθεση και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους.
Θα το εξετάσουμε αυτό πιο αναλυτικά. Ξεκινάμε με μια συλλογή n αντικειμένων. Έχουμε n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, $n-1$ επιλογές για το δεύτερο και $n-s+1$ για το s αντικείμενο. Μ' αυτόν τον τρόπο επιλέξαμε s αντικείμενα αλλά με δεδομένη σειρά.
Η ερώτηση τώρα είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε s αντικείμενα.Και πάλι χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο. Για το πρώτο έχουμε s επιλογές, για το δεύτερο $s-1$ επιλογές, και τελικά για το τελευταίο 1 επιλογή. Δηλαδή έχουμε $s(s-1)\dots 1 = s!$ επιλογές.

Άρα τελικά έχουμε

$$\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} = \frac{n!}{(n-s)!s!} = \binom{n}{s} = C_s^n.$$

Κάποιες βασικές ιδιότητές τους είναι:

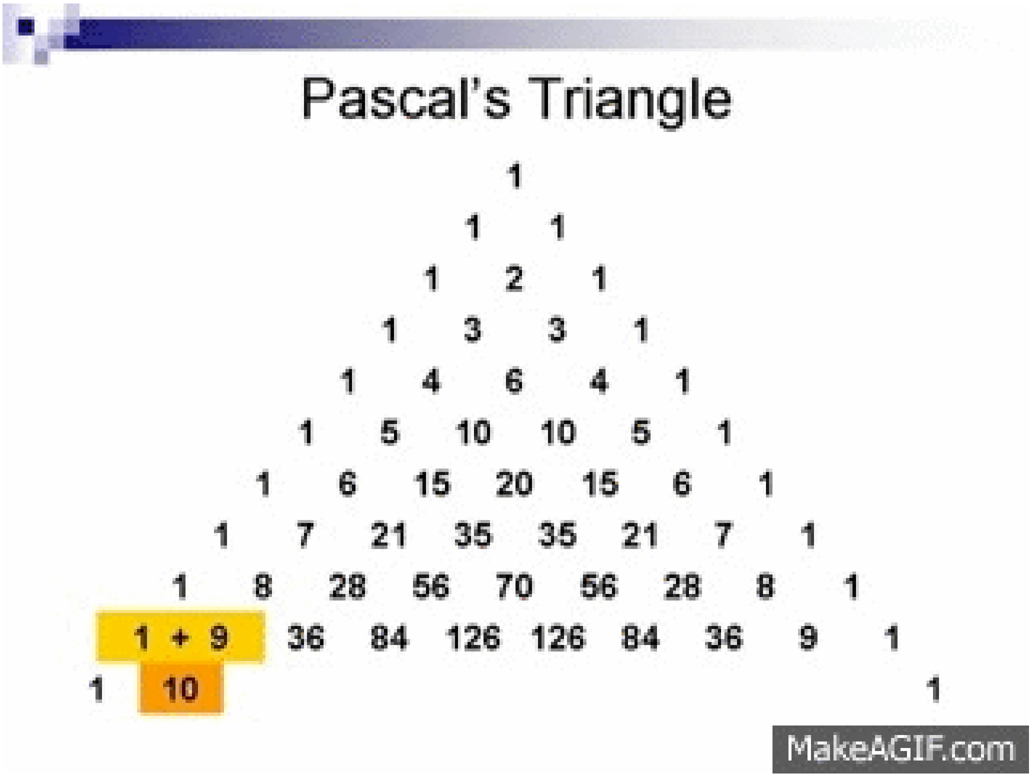
1. $C_0^n = 1 = C_n^n$. Κι αυτό γιατί υπάρχει μόνο ένας τρόπος να επιλέξουμε 0 ή n αντικείμενα από μια συλλογή n αντικειμένων.
2. $C_s^n = C_{n-s}^n$. Αυτό ισχύει γιατί η επιλογή s αντικειμένων ισοδυναμεί με την επιλογή των υπόλοιπων $n-s$ αντικειμένων.
3. $C_1^n = C_{n-1}^n = n$. Επειδή υπάρχουν n διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε ένα αντικείμενο από μια συλλογή n αντικειμένων.

Οι συντελεστές του διωνύμου δίνονται από το τρίγωνο του Pascal:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Κάθε γραμμή αρχίζει και τελειώνει με το 1. Οι όροι της γραμμής δημιουργούνται από την προηγούμενη προσθέτοντας δυο διαδοχικούς όρους. Έτσι έχουμε

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$


Pascal's Triangle
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 + 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 1
MakeAGIF.com

Στο τρίγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & \color{red}{1} & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & \color{red}{3} & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & \color{red}{6} & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & \color{red}{10} & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \color{red}{15} & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & \color{red}{21} & & 7 & & 1
\end{array}
$$

- Οι κόκκινοι αριθμοί είναι οι τριγωνικοί αριθμοί.
- Το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι τετράγωνο.

Η επόμενη είναι μια χρήσιμη σχέση μεταξύ των διωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n+1}{s} = \binom{n}{s-1} + \binom{n}{s}.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{s-1} + \binom{n}{s} &= \frac{n!}{(n-s+1)!(s-1)!} + \frac{n!}{(n-s)!s!} = \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!}\left(\frac{1}{n-s+1} + \frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!}\,\frac{s+n-s+1}{s(n-s+1)} = \frac{n!}{(n-s)!(s-1)!}\,\frac{n+1}{s(n-s+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-s)!s!} = \binom{n+1}{s}
\end{aligned}$$

Στο τρίγωνο του Pascal, αυτό σημαίνει ότι ένα στοιχείο (εκτός του 1) είναι το άθροισμα των δυο επάνω διαγώνιων όρων:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & \color{red}{5} & & \color{red}{10} & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & \color{red}{15} & & \color{blue}{20} & & \color{blue}{15} & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \color{blue}{35} & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Διώνυμο του Νεύτωνα

Για κάθε a και b ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} a^{n-s} b^s, \quad n \geq 1.$$

Θα δώσουμε μια απόδειξη με μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$(a+b)^k = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} a^{k-s} b^s$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$,

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^{k+1-s} b^s.$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s}b^s = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s}b^{s+1}$$

$$= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=1}^{k+1}\binom{k}{s-1}a^{k-(s-1)}b^{(s-1)+1}$$

όπου αντικαθιστούμε, στο δεύτερο άθροισμα, το s με το $s-1$.

$$= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=1}^{k+1}\binom{k}{s-1}a^{k-s+1}b^s$$

$$= a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s}a^{k-s+1}b^s + \sum_{s=1}^{k}\binom{k}{s-1}a^{k-s+1}b^s + b^{k+1}$$

$$= a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \left[\binom{k}{s} + \binom{k}{s-1} \right] a^{k-s+1} b^s + b^{k+1}$$

$$= a^{k+1} + \sum_{s=1}^{k} \binom{k+1}{s} + b^{k+1} = \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} a^{k+1-s} b^s$$

Παραδείγματα

(1) Να αναπτύξετε το άθροισμα $(2a-1)^4$.

Τους συντελεστές τους παίρνουμε από το τρίγωνο του Pascal:

$$(2a-1)^4 = (2a)^4+4(2a)^3(-1)+6(2a)^2(-1)^2+4(2a)(-1)^3+(-1)^4 = 16a^4-32a^3+24a^2-8a+1.$$

(2) Να απλοποιήσετε το άθροισμα $(1-\sqrt{2})^5$.

Τους συντελεστές τους παίρνουμε από το τρίγωνο του Pascal:

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^5 &= 1-5\sqrt{2}+10(\sqrt{2})^2-10(\sqrt{2})^3+5(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^5\\ &= 1-5\sqrt{2}+20-20\sqrt{2}+20-4\sqrt{2}=41-29\sqrt{2}\end{aligned}$$

Να θυμηθούμε:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{2})^2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\\ (\sqrt{2})^4 &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2=2.2=4\\ (\sqrt{2})^5 &= (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2\sqrt{2}=2.2,\sqrt{2}=4.\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Στο διώνυμο του Νεύτωνα θέτουμε $a = b = 1$ και έχουμε

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι το C_s^n είναι ο αριθμός των υποσυνόλων με s στοιχεία ενός συνόλου n στοιχείων, γιατί ένα υποσύνολο s στοιχείων είναι η επιλογή s στοιχείων από μια συλλογή n στοιχείων, χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την σειρά. Άρα ο παραπάνω τύπος μας δίνει τον συνολικό αριθμό των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, όπως δείξαμε πριν με επαγωγή.

(4) Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

(η κατάληξη των αθροισμάτων εξαρτάται από το αν ο n είναι περιττός ή άρτιος).

Στο διώνυμο του Νεύτωνα θέτουμε $a = 1$, $b = -1$ και έχουμε

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots.$$

(5) Να δείξετε ότι

$$\binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2.$$

Ξεκινάμε από μια βασική ισότητα $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ και εφαρμόζουμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$\sum_{s=0}^{2n} \binom{2n}{s} x^s = \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s\right)\left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s\right).$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει για κάθε x. Άρα οι συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων στις δυο πλευρές είναι ίσοι. Εξετάζουμε τους συντελεστές του x^n.
Στην δεξιά πλευρά το x^n το έχουμε ως $x^0 x^n$, $x x^{n-1}$, $\ldots x^n x^0$. Άρα

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι

$$\binom{n}{s} = \binom{n}{n-s}$$

Επομένως

$$\binom{2n}{n} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2.$$

Και στο τρίγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^1: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2: & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3: & & & & & \color{red}{1} & & \color{red}{3} & & \color{red}{3} & & \color{red}{1} & & & & \\
(a+b)^4: & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6: & & 1 & & 6 & & 15 & & \color{blue}{20} & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7: & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Το μπλε είναι το άθροισμα των κόκκινων τετραγώνων.

(6) Να δείξετε ότι

$$\sum_{s=0}^{n} s\binom{n}{s} = n2^{n-1}.$$

Διαφορίζουμε το παρακάτω διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s \quad\Rightarrow\quad ((1+x)^n)' = \left(\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s\right)'$$

$$\Rightarrow\quad n(1+x)^{n-1} = \sum_{s=1}^{n} s\binom{n}{s}x^{s-1}$$

Στην παραπάνω εξίσωση θέτουμε $x=1$:

$$n2^{n-1} = \sum_{s=1}^{n} s\binom{n}{s} = \sum_{s=0}^{n} s\binom{n}{s}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να αποδειχθούν με μαθηματική επαγωγή αν και η απόδειξη είναι πιο πολύπλοκη. Γενικά μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε πολλές σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των διωνύμων του Νεύτωνα.
Μπορούμε να δημιουργήσουμε εξισώσεις από το διώνυμο του Νεύτωνα επιλέγοντας διάφορες τιμές για το a και το b.

- $a = 1$, $b = 2$:
$$3^n = (1+2)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 2^s.$$
- $a = 1$, $b = -2$ ή $a = 2$, $b = -3$:
$$\begin{aligned} (-1)^n &= (1-2)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-2)^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^s 2^s \\ &= (2-3)^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 2^s (-3)^{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (-1)^{n-s} 2^s 3^{n-s} \end{aligned}$$
- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$:
$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (\sqrt{2})^s = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 2^{\frac{s}{2}}.$$

$(a+b)^1$:								1		1							$11^1 = 11$
$(a+b)^2$:							1		2		1						$11^2 = 121$
$(a+b)^3$:						1		3		3		1					$11^3 = 1331$
$(a+b)^4$:					1		4		6		4		1				$11^4 = 14641$
$(a+b)^5$:				1		5		10		10		5		1			$11^5 = 161051$
$(a+b)^6$:			1		6		15		20		15		6		1		$11^6 = 1771561$
$(a+b)^7$:		1		7		21		35		35		21		7		1	$11^7 = 19487171$

Τα πρώτα ψηφία φαίνονται άμεσα. Για τα υπόλοιπα, τα προσθέτουμε ανά δυο αν έχουμε δεκάδες:
$n = 5$: $15 + 10 + 10 + 51 = 161051$.
$n = 6$: $16 + 15 + 20 + 1561 = 1771561$.
Αυτό είναι συνέπεια του

$$11^n = (10+1)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} 10^s.$$

Ακέραιοι Αριθμοί

Το σύνολο των ακεραίων ορίζεται ως

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Δηλαδή είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών μαζί με τους αρνητικούς τους. Στο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, επεκτείνοντας τον ορισμό από τους φυσικούς.
Επίσης και η αφαίρεση είναι κλειστή πράξη στους ακέραιους, κάτι που δεν ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς. Όμως, δεν είναι κλειστό ως προς την διαίρεση, όπως κανείς εύκολα μπορεί να δει ($2/3$ δεν είναι ακέραιος). Για την διαίρεση ισχύει:

Αλγόριθμος Διαίρεσης

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά q (πηλίκο) και r (υπόλοιπο) έτσι ώστε

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Δεν θα δώσουμε την απόδειξη που είναι συνέπεια της Καλής Διάταξης των φυσικών αριθμών. Είναι η κλασική διαίρεση των ακεραίων.

Παραδείγματα

(1) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = 354$, $b = 17$.

Απλά εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 354 & 17 \\ \cline{2-2} 34 & 20 \\ \cline{1-1} 14 & \end{array}$$

Άρα $354 = 17.20 + 14$.

(2) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = 423$, $b = -19$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 423 & 19 \\ \cline{2-2} 38 & 22 \\ \hline 43 & \\ 38 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Άρα $423 = 19.22 + 5 = (-19)(-22) + 5$.

(3) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -5476$, $b = 25$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l}
5476 & 25 \\ \cline{2-2}
50 & 219 \\ \cline{1-1}
47 & \\
25 & \\ \cline{1-1}
226 & \\
225 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Άρα $5476 = 25.219 + 1 \Rightarrow -5476 = -25.219 - 1 = 25(-219) - 1$. Πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-5476 = 25(-219) + (24 - 25) = 25(-219) - 25 + 24 = 25(-220) + 24.$$

Άρα $q = -220$, $r = 24$.

(4) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -23457$, $b = 37$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$
\begin{array}{r|l}
23457 & 37 \\ \cline{2-2}
f222 & 633 \\ \cline{1-1}
125 & \\
111 & \\ \cline{1-1}
147 & \\
111 & \\ \cline{1-1}
36 &
\end{array}
$$

Άρα $23457 = 37.633 + 36 \Rightarrow -23457 = -37.633 - 36 = 37(-633) - 36$. Όπως και πριν, πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-23457 = 37(-633) + (1 - 37) = 37(-633) - 37 + 1 = 37(-634) + 1.$$

Άρα $q = -634$, $r = 1$.

(5) Να εφαρμόσετε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης για $a = -32478$, $b = -41$.

Εφαρμόζουμε την γνωστή διαίρεση στους θετικούς αριθμούς:

$$\begin{array}{r|l} 32478 & 41 \\ \cline{2-2} 287 & 792 \\ \hline 377 & \\ 369 & \\ \hline 88 & \\ 82 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

Άρα $32478 = 41.792 + 6 \Rightarrow -32478 = -41.792 - 6 = (-41).792 - 6$. Όπως και πριν, πρέπει όμως το υπόλοιπο να είναι θετικό. Επομένως

$$-32478 = (-41).792 + (35 - 41) = (-41).793 + 35.$$

Άρα $q = 793$, $r = 35$.

Η έννοια της διαιρετότητας είναι βασική στην θεωρία των ακεραίων:

1. Για $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, το b διαιρεί το a, b/a αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $a = kb$. Το b ονομάζεται και παράγοντας ή διαιρέτης του a.
2. Ένας θετικός ακέραιος p ονομάζεται πρώτος αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το p.

Τα πολλαπλάσια του 2 ονομάζονται **άρτιοι** και αν δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ονομάζονται περιττοί.

Ιδιότητες Διαιρετότητας

1. $\pm 1/a$, για κάθε $a \in \mathbb{Z}$.
2. $a/\pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$.
3. $\pm a/a$, για κάθε $a \neq 0$.
4. $a/b \Rightarrow \pm a/\pm b$.
5. Αν b/a, τότε b/na, για $n \in \mathbb{Z}$:

$$b/a \Rightarrow a = kb \Rightarrow na = (nk)b \Rightarrow b/na.$$

6. Αν b/a_1 και b/a_2 τότε $b/a_1 \pm a_2$:Θα το δείξουμε για το άθροισμα. Η απόδειξη για την διαφορά είναι όμοια:

$$\left.\begin{array}{l} b/a_1 \Rightarrow a_1 = k_1 b, k_1 \in \mathbb{Z} \\ b/a_2 \Rightarrow a_2 = k_2 b, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + a_2 = k_1 b + k_2 b = (k_1 + k_2) b \Rightarrow b/a_1 + a_2.$$

7. Ο b/a αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια b είναι 0.

Η τελευταία παρατήρηση επάγει το ακόλουθο:

- Το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 2 (Φυσικά ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός).
- Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 3.
- Το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων είναι διαιρετό δια 4.
- Γενικά, το γινόμενο n διαδοχικών αριθμών είναι διαιρετό δια n.

Για να το δούμε, έστω $a + i$, $i = 0, 1, \ldots n-1$, n διαδοχικοί αριθμοί. Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια n είναι r $(0 \leq r < n)$. Δηλαδή, $a = nq + r$. Παρατηρούμε ότι

$$a + i = nq + r + i$$

Τότε, για κάποιο i, $r + i = n$. Δηλαδή $i = n - r \geq 0$. Γι' αυτό το συγκεκριμένο i,

$$a + i = nq + n = n(q+1) \Rightarrow n/a + i.$$

Μοναδική Παραγοντοποίηση Ακεραίων

Έστω $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Τότε

1. Υπάρχει ένας πρώτος παράγοντας του a.
2. Αν ένας πρώτος p/ab τότε διαιρεί ή τον a ή τον b ή και τους δύο.
3. $a = \pm p_1 p_2 \ldots p_s$, όπου p_i είναι πρώτος και το γινόμενο είναι μοναδικό εκτός από την σειρά των παραγόντων

- Αν ένας αριθμός b/xy τότε δεν είναι απαραίτητο ο b/x ή b/y. Για παράδειγμα $6/4.3$ αλλά $6 \nmid 3$ και $6 \nmid 4$.
- Στην παραγοντοποίηση του $a \in \mathbb{Z}$ συνήθως συλλέγουμε τους ίδιους πρώτους και γράφουμε

$$a = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}.$$

Η μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτους και η ιδιότητα (2) της παραπάνω πρότασης, μας δίνει ένα κριτήριο διαιρετότητας. Έστω

$$a = p_1^{r_1} \dots p_v^{r_v}, \; b = q_1^{s_1} \dots q_w^{s_w}.$$

είναι η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων. Τότε

$$b/a \Leftrightarrow \text{για κάθε } 1 \leq i \leq w \text{ υπάρχει } 1 \leq j \leq v \text{ έτσι ώστε } q_i = p_j, \; s_i \leq r_j$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πρώτοι παράγοντες του b είναι παράγοντες του a και η δύναμή τους στο b είναι μικρότερη ή ίση με την αντίστοιχη δύναμη στο a.
Για παράδειγμα

$$a = 3^3.5^2.7^6.11.13^2.17.29, \quad b = 5.7^3.13.29$$

τότε b/a και

$$a = 3^3.5^2.7^6.11.13^2.17.29 = kb = (3^3.5.7^3.11.13.17)(5.7^3.13.29)$$

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Ευκλείδης: Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι $p_i, \ = 1, \ldots s$. Έστω $N = p_1 \ldots p_s + 1$. Τότε ο N πρέπει να έχει έναν πρώτο παράγοντα p_i. Αλλά

$$\left.\begin{array}{l} p_i/N \\ p_i/p_1 \ldots p_s \end{array}\right\} \Rightarrow p_i/N - p_1 \ldots p_s \Rightarrow p_i/1$$

και το τελευταίο είναι άτοπο. Άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Υπάρχουν πολλές εικασίες πάνω στους πρώτους. Η βασικότερη είναι η εικασία του Riemann που δίνει πληροφορίες για την κατανομή των πρώτων αριθμών. Συνήθως, οι εικασίες μπλέκουν την πολλαπλασιαστική φύση των πρώτων με προσθετικές ιδιότητες. Για παράδειγμα, η εικασία του Goldbach ρωτάει αν κάθε άρτιος μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δυο περιττών πρώτων. Θα αναφέρουμε και την εικασία των δίδυμων πρώτων: Δύο πρώτοι ονομάζονται δίδυμοι αν η διαφορά τους είναι ίση με 2. Η εικασία ρωτά αν υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι.
Η ακολουθία των πρώτων αριθμών ξεκινάει με:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots$$

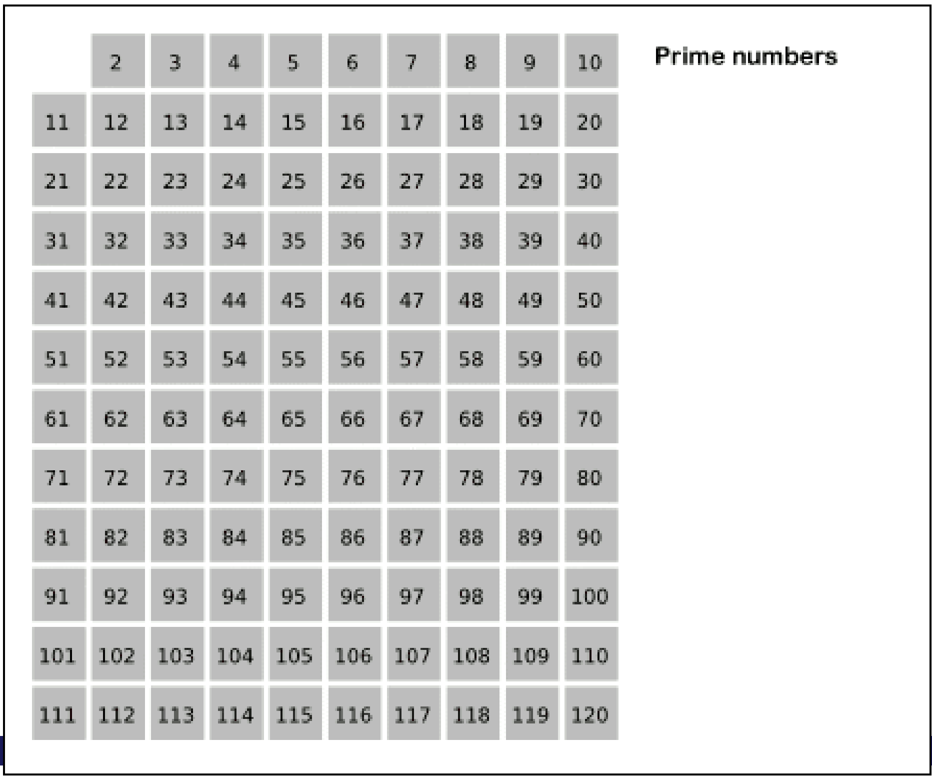
Ο μεγαλύτερος πρώτος είναι ο $2^{82,589,933}-1$ με $24, 862, 048$ ψηφία. Η τιμή του είναι

$$\begin{array}{l}
148894445742041325547806458472397916603026273992795324185 \\
271289425213239361064475310309971132180337174752834401423587560\ldots \\
\text{παραλείπουμε } 24, 861, 808 \text{ ψηφία} \\
\ldots 0621075579479582975315952088071926936765217821844725266400769121 14 \\
3553083119694876337664578236950740379512103252179025 91
\end{array}$$

Μια μέθοδος για να βρούμε όλους τους πρώτους, μικρότερους ενός αριθμού n, χρησιμοποιούμε το κόσκινο του Ερατοσθένη:

- Ξεκινάμε διαγράφοντας τα πολλαπλάσια του 2 (όλους τους άρτιους).
- Στην συνέχεια διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 3.
- Συνεχίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο, διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του ακεραίου που δεν έχει ήδη διαγραφεί.

Κόσκινο του Ερατοσθένη



Ισχύει μια πρόταση που βοηθάει στο κόσκινο του Ερατοσθένη:
Κάθε ακέραιος n, που δεν είναι πρώτος, έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{n}$:

Γνωρίζουμε ότι ο n έχει έναν πρώτο διαιρέτη p. Αν $p \leq \sqrt{n}$, τελειώσαμε.
Αν $p > \sqrt{n}$ και p/n. Άρα $n = kp$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$n = kp > k\sqrt{n} \Rightarrow (\sqrt{n})^2 > k\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} > k.$$

Έστω τώρα q ένας πρώτος διαιρέτης του k. Τότε $q \leq k$ και τελικά

$$\sqrt{n} > k \geq q \Rightarrow q < \sqrt{n}.$$

Ας εξετάσουμε τον $n = 211$. Το 211 θα έχει έναν πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{211} < 15$ ($15^2 = 225$).
Οι πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του 15 είναι: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κανένας απ’ αυτούς δεν διαιρεί το 211.
Άρα ο 211 είναι πρώτος.

Το 2020 δεν είναι πρώτος γιατί είναι άρτιος και επομένως διαιρείται δια 2. Έχουμε την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες $2020 = 2^2.5.101$.
Ας εξετάσουμε λοιπόν τον $n = 2021$. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{2021} < 45$ κι αυτό γιατί $45^2 = 2025$.
Εξετάζουμε λοιπόν τους πρώτους μικρότερους του 45: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.
2, 3, 5 εύκολα μπορούμε να δούμε ότι δεν διαιρούν το 2021.
$2021 = 7.288+5,\ 2021 = 11.83+8,\ 2021 = 13.155+6,\ 2021 = 17.118+15,\ 2021 = 19.106+7$
$2021 = 23.87 + 20,\ 2021 = 29.69 + 20,\ 2021 = 31.65 + 6,\ 2021 = 37.54 + 23,\ 2021 = 41.49 + 12,\ 2021 = 43.47$ Άρα $43/2021$ και $2021 = 43.47$ είναι η ανάλυση σε πρώτους παράγοντες του 2021.

Εικασίες Στους Πρώτους

Θα διατυπώσουμε κάποιες (ακόμη άλυτες) εικασίες στους πρώτους:

- (Εικασία του Goldback) Κάθε άρτιος ακέραιος $n > 2$ είναι το άθροισμα δυο πρώτων. Αποδείχθηκε για όλους τους αριθμούς μικρότερους του 4.10^{17}.
- (Περιττή Εικασία του Goldback) Κάθε περιττός ακέραιος $n > 5$ είναι το άθροισμα τριών πρώτων.
  Αρκεί να αποδειχθεί για όλους τους αριθμούς μεγαλύτερους του 10^{43000}.
- Κάθε άρτιος αριθμός είναι η διαφορά δυο πρώτων.
- Υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι (που διαφέρουν κατά 2). Για παράδειγμα

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43),(59,61),(71,73),(101,103),(107,109),(137,139),\dots$$

  Το μεγαλύτερο ζεύγος δίδυμων πρώτων είναι $2996863034895 \times 2^{1290000} \pm 1$ με 388,342 ψηφία.
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $n^2 + 1$;
- Υπάρχει πάντα ένας πρώτος μεταξύ n^2 και $(n+1)^2$;

Παραδείγματα

(1) Να δείξετε ότι $6/n^3 - n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 0$ ισχύει γιατί $6/0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή ότι $6/k^3 - k$. Θα δείξουμε ότι $6/(k+1)^3 - (k+1)$. Από την υπόθεση $k^3 - k = 6\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.
Κάνουμε τους υπολογισμούς, εφαρμόζοντας το διώνυμο του Νεύτωνα.

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k(k+1)$$

Παρατηρούμε ότι αν ο k είναι άρτιος τότε το $k(k+1)$ είναι άρτιος. Αν ο k είναι περιττός, τότε το $k+1$ είναι άρτιος και ο $k(k+1)$ είναι άρτιος. Σε κάθε περίπτωση $k(k+1) = 2\mu$ είναι άρτιος. Άρα

$$(k+1)^3 - (k+1) = 6\ell + 3.2\mu = 6(\ell + \mu) \Rightarrow 6/(k+1)^3 - (k+1).$$

Θα δώσουμε μια άλλη λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Θα εξετάσουμε την γενική περίπτωση. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης στο a και n:

$$a = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Παρατηρούμε ότι, για $m \in \mathbb{N}$,

$$a^m = (qn + r)^m = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} (qn)^{m-s} r^s = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} q^{m-s} n^{m-s} r^s = \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m}{s} (qn)^{m-s} r^s + r^m.$$

Για $0 \leq s \leq m-1$, $m - s > 0$, και επομένως όλοι οι όροι του πρώτου αθροίσματος έχουν το n σαν παράγοντα:

$$a^m = nQ + r^m$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του a^m δια n είναι το ίδιο με το υπόλοιπο της διαίρεσης του r^m δια n.

Τώρα θα δείξουμε ότι $6/n^3 - n$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση.

Υπόλοιπο δια 6 του n	0	1	2	3	4	5
Υπόλοιπο δια 6 του n^3	0	1	$2^3 = 8 \sim 2$	$3^3 = 27 \sim 3$	$4^3 = 64 \sim 4$	$5^3 = 125 \sim 5$

Παρατηρούμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του n και του n^3 δια 6 είναι ίσα. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $n^3 - n$ δια 6 είναι 0. Άρα το 6 διαιρεί το $n^3 - n$.

(2) Δείξτε ότι $9/5^{2n}+3n-1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n=0$ ισχύει γιατί $9/0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλαδή $9/5^{2k}+3k-1$. Θα δείξουμε ότι $9/5^{2(k+1)}+3(k+1)-1$. Επειδή $9/5^{2k}+3k-1$,

$$5^{2k}+3k-1=9\ell \Rightarrow 5^{2k}=9\ell-3k+1.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n=k+1$:

$$\begin{aligned} 5^{2k+2}+3k+3-1 &= 5^2.5^{2k}+3k+2=25(9\ell-3k+1)+3k+2 \\ &= 9(25\ell)-75k+25+3k+2 \\ &= 9(25\ell)-72k+27=9(25\ell-8k+3). \end{aligned}$$

Άρα $9/5^{2(+1)}+3(k+1)-1$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(3) Δείξτε ότι $2304/7^{2n} - 48n - 1$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ ισχύει γιατί $2304/0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $2304/7^{2k} - 48k - 1$. Θα δείξουμε ότι $2304/7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$. Επειδή $2304/7^{2k} - 48k - 1$,

$$7^{2k} - 48k - 1 = 2304\ell \Rightarrow 7^{2k} = 2304\ell + 48k + 1.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 7^{2k+2} - 48k - 48 - 1 &= 7^2.7^{2k} - 48k - 49 = 49(2304\ell + 48k + 1) - 48k - 49 \\ &= 2304(49\ell) + 2352k + 49 - 48k - 49 \\ &= 2304(49\ell) - 2304k = 2304(49\ell - k). \end{aligned}$$

Άρα $2304/7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(4) Δείξτε ότι $17/3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$ έχουμε $17/3.5 + 2$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $17/3.5^{2k+1} + 2^{3k+1}$. Θα δείξουμε ότι $17/3.5^{2k+3} + 2^{3k+4}$. Επειδή $17/3.5^{2k+1} + 2^{3k+1}$,

$$3.5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17\ell \Rightarrow 2^{3k+1} = 17\ell - 3.5^{2k+1}.$$

Τώρα εξετάζουμε την πρόταση για $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 3.5^{2k+3} + 2^{3k+4} &= 3.5^2.5^{2k+1} + 2^3.2^{3k+1} = 75.5^{2k+1} + 8(17\ell - 3.5^{2k+1}) \\ &= 75.5^{2k+1} + 17(8\ell) - 24.5^{2k+1} = 51.5^{2k+1} + 17(8\ell) = 17(3.5^{2k+1} + 8\ell) \end{aligned}$$

Άρα $17/3.5^{2k+3} + 2^{3k+4}$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(5) Δείξτε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών κύβων είναι διαιρετό δια 9.

Δηλαδή πρέπει να δείξουμε $9/n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, $n \in \mathbb{N}$. Για $n=0$, $9/0^3+1^3+2^3$. Έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n=k$, δηλαδή $9/k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$. Θα δείξουμε ότι $9/(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$. Από την υπόθεση,

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9\ell \Rightarrow (k+1)^3+(k+2)^3=9\ell-k^3.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 &= 9\ell-k^3+(k+3)^3=9\ell-k^3+k^3+9k^2+27k+27\\ &= 9\ell+9k^2+27k+27=9(\ell+k^2+3k+3).\end{aligned}$$

Άρα $9/(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

(6) Αποδείξτε ότι ο αριθμός
$$z_n = \frac{2n^5}{5} + \frac{n^4}{2} - \frac{2n^3}{3} - \frac{7n}{30}$$
είναι ακέραιος για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 0$, $z_0 = 0 \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $z_k \in \mathbb{Z}$ και θα δείξουμε ότι ο
$$z_{k+1} = \frac{2(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^4}{2} - \frac{2(k+1)^3}{3} - \frac{7(k+1)}{30} \in \mathbb{Z}.$$
Αναπτύσσουμε έναν προς έναν τους όρους
$$\frac{2(k+1)^5}{5} = \frac{2(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)}{5} = \frac{2k^5}{5} + \frac{2}{5} + (2k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k) = \frac{2k^5}{5} + \frac{2}{5} + s$$
με $s \in \mathbb{Z}$.
$$\frac{(k+1)^4}{2} = \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} = \frac{k^4}{2} + \frac{1}{2} + (2k^3 + 3k^2 + 2k) = \frac{k^4}{2} + \frac{1}{2} + t$$
με $t \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2(k+1)^3}{3} = \frac{2(k^3+3k^2+3k+1)}{3} = \frac{2k^3}{3} + \frac{2}{3} + (2k^2+2k) = \frac{2k^3}{3} + \frac{2}{3} + v$$

με $v \in \mathbb{Z}$

$$\frac{7(k+1)}{30} = \frac{7k}{30} + \frac{7}{30}.$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω:

$$z_{k+1} = \left(\frac{2k^5}{5} + \frac{k^4}{2} - \frac{2k^3}{3} - \frac{7k}{30}\right) + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} + s + t + v = z_k + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} + w,$$

όπου $z_k \in \mathbb{Z}$, από την υπόθεση και $w \in \mathbb{Z}$. Επίσης

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{7}{30} = \frac{12}{30} + \frac{15}{30} - \frac{20}{30} - \frac{7}{30} = 0$$

Άρα $z_{k+1} = z_k + w \in \mathbb{Z}$.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Το $d \in \mathbb{N}$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των a και b (συμβολίζεται (a, b)) αν

(1) Το d είναι θετικός κοινός διαιρέτης των a και b, δηλαδή d/a και d/b.

(2) Αν c είναι κοινός διαιρέτης των a και b (c/a και c/b), τότε c/d.

Η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με

(2') Αν c είναι θετικός κοινός διαιρέτης των a και b, τότε $c \leq d$.

Παραδείγματα

1. $(2, 3) = 1.$
2. $(12, 8) = 4.$
3. $(54, 18) = 18.$
4. $(234, 42) = 6.$

Ιδιότητες του Μ.Κ.Δ.

1. $(0, b) = |b|$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
2. $(1, b) = 1$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
3. $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$, $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
4. $(ra, rb) = r(a, b)$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$.
5. $(a + kb, b) = (a, b)$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Θα αποδείξουμε την τελευταία ιδιότητα:
Έστω $d = (a, b)$ και $d' = (a + kb, b)$.
Τότε d/a και d/b. Άρα d/kb και $d/a + kb$ και, από τον ορισμό, d/d'.
Όμοια, $d'/a + kb$ και d'/b. Άρα d'/kb και $d'/a + kb - kb$, που σημαίνει ότι d'/a. Άρα d'/d.
Έχουμε d/d' και d/d, που σημαίνει ότι $d = \pm d'$. Αλλά και οι δυο αριθμοί είναι θετικοί, επομένως $d = d'$.
Η ιδιότητα αυτή δίνει ότι, αν $a = bq + r$, τότε $(a, b) = (b, r)$.

Ισχύει ότι: Ο Μ.Κ.Δ. δυο αριθμών είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους στην μικρότερη δύναμη.
Ουσιαστικά το παραπάνω είναι συνέπεια του ορισμού. Έστω d είναι ο γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων των a και b στην μικρότερη δύναμη. Έστω

$$a = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r} x_{r+1}^{s_{r+1}} \dots x_v^{s_v}, \quad b = p_1^{t_1} \dots p_r^{t_r} y_{r+1}^{t_{r+1}} \dots y_w^{t_w}$$

όπου $p_1, \dots p_r$ είναι οι κοινοί πρώτοι και $m_i = \min\{s_i, t_i\}$, ο ελάχιστος εκθέτης κάθε κοινού πρώτου. Θέτουμε $d = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$

- Τότε ο d διαιρεί και το a και το b.
- Αν το c διαιρεί το a και το b, τότε το c είναι ένα γινόμενο κάποιων κοινών πρώτων παραγόντων και κάθε πρώτος είναι στην δύναμη μικρότερη και από τις αντίστοιχες δυνάμεις αυτού του πρώτου στα a και b.

Θα δώσουμε παραδείγματα τις τελευταίας παρατήρησης:

- $a = 3^5.7^4.11^2.17^3.23^2.37$, $b = 2^5.3^4.5^2.7^5.11^3.19.21$
$$(a, b) = 3^4.7^4.11^2.$$

- $a = 5^2.7^3.17^2.23^2.41^2$, $b = 5^3.7^4.17.41$
$$(a, b) = 5^2.7^3.17.41.$$

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Το παρακάτω θεώρημα δίνει τον τρόπο υπολογισμού του Μ.Κ.Δ. δυο ακεραίων.

Αλγόριθμος του Ευκλείδη

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο Διαίρεσης:

$$\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b \\
b = r_1 q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\
\ldots & \ldots \\
r_k = r_{k+1} q_{k+2} + r_{k+2}, & 0 \leq r_{k+2} < r_{k+1} \\
\ldots & \ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1}, &
\end{array}$$

Τότε $(a, b) = r_n$ (το τελευταίο μη-μηδενικό υπόλοιπο).

Παρατηρήσεις

1. Η διαδικασία κάποτε σταματάει γιατί έχουμε μια ακολουθία από θετικούς ακέραιους:

$$0 \le r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < b.$$

2. Το Θεώρημα ισχύει γιατί, από τις ιδιότητες του Μ.Κ.Δ.,

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$

γιατί r_n / r_{n-1}.

Πριν ξεκινήσουμε τα παραδείγματα, θα δώσουμε και μια άλλη ιδιότητα του Μ.Κ.Δ.

Βασική Ιδιότητα του Μ.Κ.Δ.

Έστω $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

1. Έστω $d = (a, b)$. Τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $d = as + bt$.
2. Ο Μ.Κ.Δ. είναι η μικρότερη θετική τιμή των συνδυασμών $as + bt$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

Δυο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ονομάζονται σχετικά πρώτοι αν $(a, b) = 1$. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ισχυρότερο για τους σχετικά πρώτους ακέραιους:
Δηλαδή οι a, b δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη και κατ' επέκταση δεν έχουν κανέναν πρώτο κοινό διαιρέτη.

$$(12, 35) = 1, \ (18, 49) = 1, \ (21, 65) = 1.$$

Για τους σχετικά πρώτους αριθμούς, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:
Δυο ακέραιοι $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ είναι σχετικά πρώτοι αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $1 = as + bt$.

Πρέπει να αποδείξουμε δυο προτάσεις:

- Αν $(a, b) = 1$, τότε υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$.
- Αν υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$, τότε $(a, b) = 1$.

Είναι προφανές ότι το δεύτερο αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $(a, b) = d > 1$: Τότε από την Βασική Ιδιότητα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $d = as + bt$. Επίσης, $kd = a(ks) + b(kt)$, $k \in \mathbb{Z}$ και kd δεν είναι ο Μ.Κ.Δ. αν $k > 1$.

Και οι δυο προτάσεις είναι αποτέλεσμα της Βασικής Ιδιότητας. Θα δώσουμε μια εύκολη απόδειξη της δεύτερης πρότασης:

Έστω ότι υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $as + bt = 1$. Έστω $(a, b) = d$. Τότε

$$\left.\begin{array}{c} d/a \\ d/b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} d/as \\ d/bt \end{array}\right\} \Rightarrow d/as + bt \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$$

Ιδιότητες των Σχετικά Πρώτων Αριθμών

(1) Αν οι a και c είναι σχετικά πρώτοι και b/c, τότε οι a και b είναι σχετικά πρώτοι.

Έχουμε $(a, c) = 1$. Άρα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$, $as + ct = 1$.
Επίσης b/c, που σημαίνει ότι $c = bk$, $k \in \mathbb{Z}$. Συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις έχουμε:

$$as + b(kt) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1.$$

(2) Έστω $(a, b) = 1$ και a/bc, τότε a/c.

Έχουμε $(a, b) = 1$. Άρα υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$, $as + bt = 1$.
Πολλαπλασιάζουμε την σχέση επί c, $asc + btc = c$. Τώρα

$$\left.\begin{array}{c} a/asc \\ a/(bc)t \end{array}\right\} \Rightarrow a/asc + bct \Rightarrow a/c,$$

(3) Έστω $(a, b) = 1$, a/c, και b/c, τότε ab/c.

Έχουμε $c = ak = b\ell$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$.
Τότε $b/b\ell \Rightarrow b/ak$. Από την προηγούμενη άσκηση, b/k γιατί $(a, b) = 1$. Άρα $k = bm$.
Συνδυάζοντας τις σχέσεις, $c = abm \Rightarrow ab/c$.

(4) Έστω $(a, b) = 1$. Τότε $(a+b, a-b) = 1$ ή 2.
Έστω $d = (a+b, a-b)$. Τότε

$$\left.\begin{array}{c} d/a+b \\ d/a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} d/a+b+a-b \\ d/a+b-a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} d/2a \\ d/2b \end{array}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι το d δεν μπορεί να διαιρεί συγχρόνως και το a και το b, γιατί είναι σχετικά πρώτοι. Άρα $d/2$, που σημαίνει $=1, 2$.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί ο $(6240, 12)$ και να γραφτεί στην μορφή $6240s + 12t$.

Παρατηρούμε ότι $6240 = 12.520$. Άρα $12/6240$ και $(6240, 12) = 12$. Επομένως:

$$12 = 6240.0 + 12.1$$

(2) Να βρεθεί ο $(345, 24)$ και να γραφτεί στην μορφή $345s + 24t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$\begin{aligned} &345 = 24.14 + 9 \\ &24 = 9.2 + 6 \\ &9 = 6.1 + 3 \\ &6 = 3.2 \end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned} 3 &= 9 - 6 = 9 - (24 - 9.2) = 9 - 24 + 9.2 \\ &= 9.3 - 24 = (345 - 24.14).3 - 24 = 3.345 - 42.24 - 24 \\ &= 3.345 - 43.24. \end{aligned}$$

(3) Να βρεθεί ο $(11247, 342)$ και να γραφτεί στην μορφή $11247s + 342t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$\begin{aligned}
&11247 = 342.32 + 303\\
&342 = 303.1 + 39\\
&303 = 39.7 + 30\\
&39 = 30.1 + 9\\
&30 = 9.3 + 3\\
&9 = 3.3
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$\begin{aligned}
3 &= 30 - 9.3 = 30 - (39 - 30).3 = 30 - 39.3 + 30.3\\
&= 30.4 - 39.3 = (303 - 39.7).4 - 39.3 = 303.4 - 39.28 - 39.3\\
&= 303.4 - 39.31 = 303.4 - (342 - 303).31 = 303.4 - 342.31 + 303.31\\
&= 303.35 - 342.31 = (11247 - 342.32).35 - 342.31\\
&= 11247.35 - 342.1120 - 342.31\\
&= 35.11247 - 1151.342
\end{aligned}$$

(4) Να βρεθεί ο $(15347, 225)$ και να γραφτεί στην μορφή $11247s + 342t$.

Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του Ευκλείδη:

$$
\begin{aligned}
&15347 = 225.68 + 47\\
&225 = 47.4 + 37\\
&47 = 37.1 + 10\\
&37 = 10.3 + 7\\
&10 = 7.1 + 3\\
&7 = 3.2 + 1\\
&3 = 1.3
\end{aligned}
$$

Για το δεύτερο μέρος, δουλεύουμε από το τέλος προς την αρχή, αντικαθιστώντας τα υπόλοιπα:

$$
\begin{aligned}
1 &= 7 - 3.2 = 7 - (10 - 7).2 = 7 - 10.2 + 7.2\\
&= 7.3 - 10.2 = (37 - 10.3).3 - 10.2 = 37.3 - 10.9 - 10.2\\
&= 37.3 - 10.11 = 37.3 - (47 - 37).11 = 37.3 - 47.11 + 37.11 = 37.14 - 47.11\\
&= (225 - 47.4).14 - 47.11 = 225.14 - 47.56 - 47.11 = 225.14 - 47.67\\
&= 225.14 - (15347 - 225.68).67 = 225.14 - 15237.67 + 225.4556 - 15347.67 + 225.4570
\end{aligned}
$$