Αριθμοί και Σχήματα

Στράτος Πρασίδης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

10 Νοεμβρίου 2024

Φυσικοί Αριθμοί

Ορίζουμε τους φυσικούς αριθμούς:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ιδιότητες:

- Δύο πράξεις ορίζονται και είναι κλειστές στους φυσικούς αριθμούς: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.
- Κάποιες φορές, η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται αλλά όχι πάντα:

$$3 - 2 = 1,\ 2 - 3 \notin \mathbb{N},\ 6 : 3 = 2,\ 5 : 2 \notin \mathbb{N}.$$

- Είναι αριθμοί όπου για κάθε έναν έχουμε τον επόμενό του. Ουσιαστικά ορίζονται από την πράξη $+1$ ξεκινώντας από το 0.

Από τον ορισμό τους, οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποιες, πιο τεχνικές, ιδιότητες:

1. (Αρχή της Καλής Διάταξης) Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
2. (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής) Έστω $P(n)$ είναι μια πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό n. Υποθέτουμε ότι
    1. Για κάποιον φυσικό αριθμό n, η $P(k)$ αληθεύει.
    2. Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ αληθεύει, τότε και η $P(n+1)$ αληθεύει.

    Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq k$.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Είναι πολύ χρήσιμες ιδιότητες στις αποδείξεις που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς ή που ανάγονται σε φυσικούς αριθμούς.

Παραστατικά:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη σκάλα και ξέρουμε δυο πράγματα:

1. Μπορούμε να ανεβούμε στο πρώτο σκαλοπάτι.
2. Εάν μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα σκαλοπάτι, τότε μπορούμε να ανεβούμε στο επόμενο.

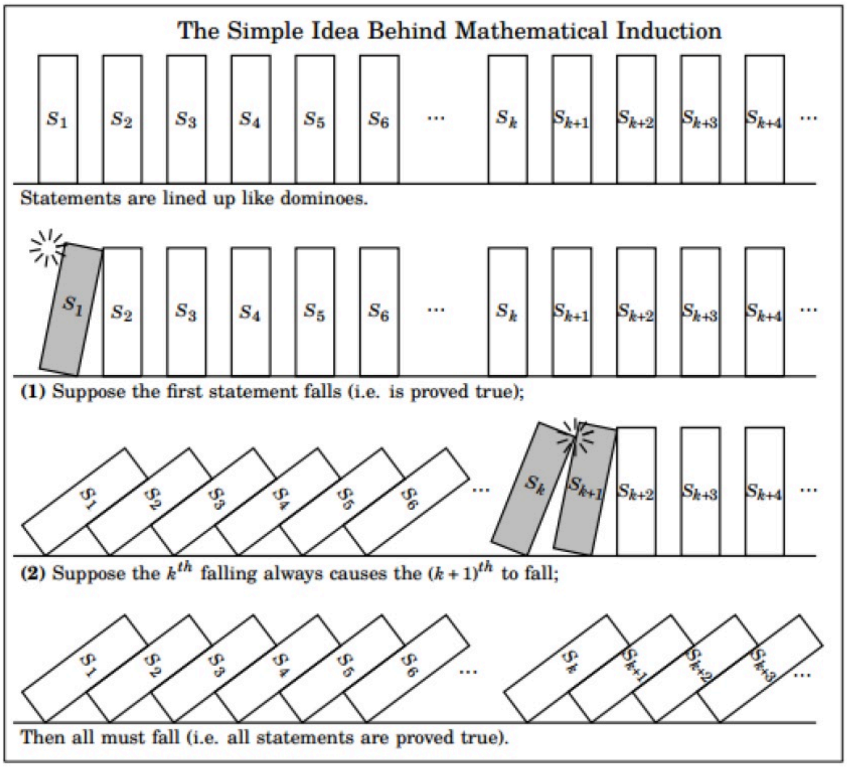
Απ’ αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να φτάσουμε σε κάθε σκαλοπάτι της σκάλας.

Με άλλον τρόπο:

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη συλλογή από ντόμινο και ξέρουμε δυο πράγματα:

1. Υποθέτουμε ότι πέφτει το πρώτο ντόμινο.
2. Εάν πέσει κάποιο ντόμινο τότε θα πέσει και το επόμενο.

Απ’ αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι όλα τα ντόμινο θα πέσουν.


The Simple Idea Behind Mathematical Induction
S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 ... S_k S_{k+1} S_{k+2} S_{k+3} S_{k+4} ...
Statements are lined up like dominoes.
(1) Suppose the first statement falls (i.e. is proved true);
(2) Suppose the k^{th} falling always causes the $(k+1)^{th}$ to fall;
Then all must fall (i.e. all statements are proved true).

Παραδείγματα Επαγωγής-1

(1) Μια ομάδα n πειρατών πρόκειται να μοιράσει έναν θησαυρό, από χρυσό, έτσι ώστε κάθε πειρατής θα πάρει ένα ίσο μερίδιο. Όμως οι πειρατές δεν είναι αντικειμενικοί, και κάθε πειρατής έχει την δικιά του άποψη του τι είναι το $\frac{1}{n}$ του θησαυρού. Να δώσετε μια στρατηγική μοιρασιάς του θησαυρού.

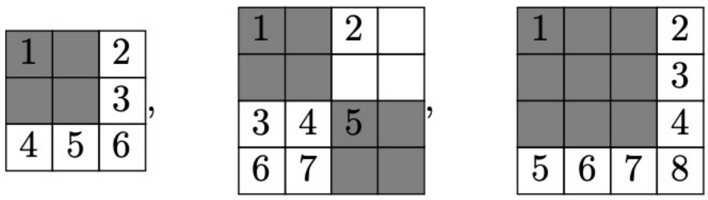
Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μέθοδο να μοιραστούν $k - 1$ πειρατές τον θησαυρό. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από k-πειρατές.
Παίρνουμε ένα κομμάτι του θησαυρού και το βάζουμε σε έναν καινούργιο σωρό. Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρις ότου ένας πειρατής δηλώσει ότι αυτό είναι το δίκαιο μερίδιο του θησαυρού γι' αυτόν. Οι υπόλοιποι $k - 1$ πειρατές πιστεύουν ότι αυτό το μερίδιο δεν είναι δίκαιο γι' αυτούς, διαφορετικά θα είχαν επιλέξει τον καινούργιο σωρό νωρίτερα.
Από την υπόθεση της επαγωγής, οι υπόλοιποι πειρατές $k - 1$ μπορούν τώρα να μοιράσουν τον υπόλοιπο θησαυρό.

(2) Δείξτε ότι μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε n τετράγωνα, για κάθε $n \geq 6$.
Σ' αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα λίγο διαφορετικό. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο S με $n-3$ υποτετράγωνα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με n υποτετράγωνα:

$$S \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline S & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Τότε αν έχουμε 6 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις με 6, 9 , 12, 15 …υποτετράγωμα. Αν έχουμε 7 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 7, 10 , 13, 16 …, και αν έχουμε 8 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 8, 11 , 14, 17 …υποτετράγωνα.
Άρα πρέπει να υποδιαιρέσουμε ένα τετράγωνο σε 6, 7 και 8 τετράγωνα και τότε μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε οποιοδήποτε αριθμό υποτετραγώνων.

Γι΄αυτά τα υποτετράγωνα έχουμε



(3) Ένα ATM μηχάνημα έχει μόνο νομίσματα των €5 και κέρματα των €2. Δείξτε ότι το μηχάνημα μπορεί να δώσει οποιοδήποτε ακέραιο ποσό, μεγαλύτερο των €3, του ζητηθεί.
Έστω n είναι το πόσο για ανάληψη. Θα δώσουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για $n = 4$ είναι εύκολο να δούμε ότι είναι $2 + 2$. Τώρα υποθέτουμε ότι μπορούμε να κάνουμε ανάληψη το ποσό των €k. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε €$k + 1$.

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν στο ποσό k υπάρχουν δυο δίευρα, τότε τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με ένα πεντάευρο
- Αν υπάρχει ένα πεντάευρο, τότε το αφαιρούμε και το αντικαθιστούμε με τρία δίευρα.
- Αν υπάρχουν ένα πεντάευρο και ένα δίευρο, τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με τέσσερα δίευρα.

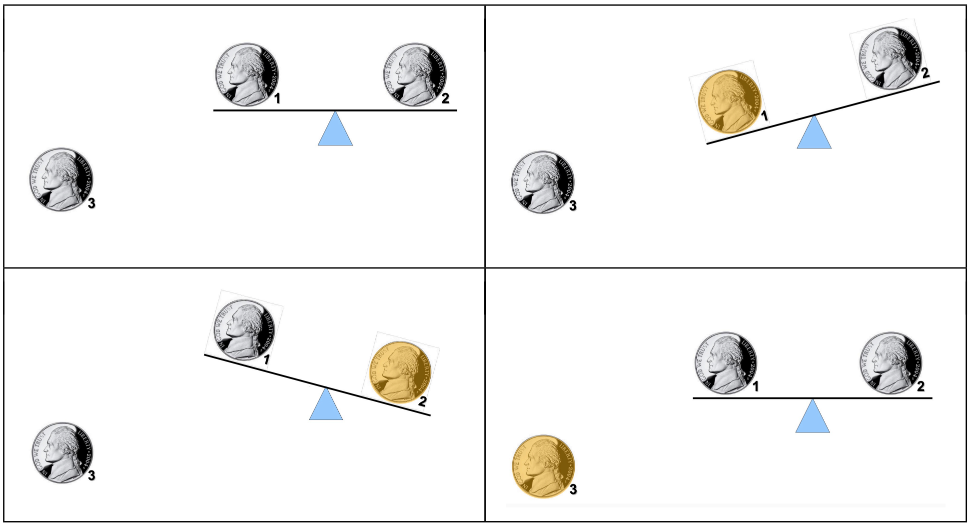
Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ανάληψη €$k+1$.

Το πρόβλημα έχει και μια άλλη διαφορετική λύση. Θέλουμε να πάρουμε €n.

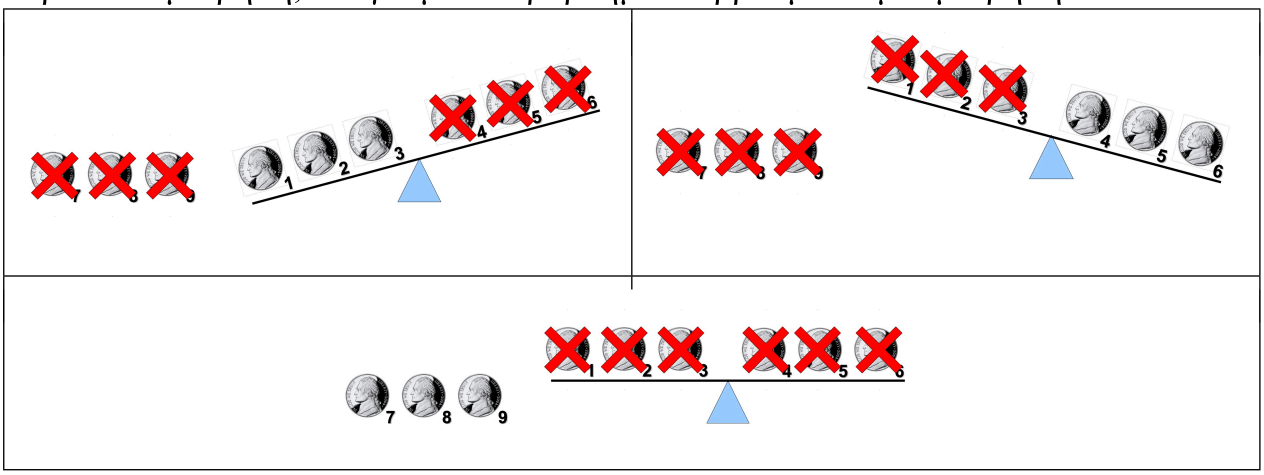
- Αν το n είναι άρτιος, τότε μπορούμε να το πάρουμε μόνο με δίευρα.
- An to n είναι περιττός τότε, επειδή το $n - 5$ είναι άρτιος, μπορούμε να το πάρουμε ως ένα πεντάευρο και τα υπόλοιπα δίευρα.

(4) Δίνονται τρία ίδια νομίσματα, δυο από τα οποία είναι γνήσια και ένα πλαστό. Το πλαστό νόμισμα ζυγίζει πιο πολύ από τα άλλα. Χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά μόνο μια φορά, να βρείτε το πλαστό νόμισμα.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την απάντηση:



Πιο δύσκολο πρόβλημα: Δίνονται εννιά όμοια νομίσματα έτσι ώστε οκτώ απ' αυτά είναι όμοια και το άλλο πλαστό, που ζυγίζει περισσότερο. Να βρείτε το πλαστό νόμισμα με δυο ζυγίσματα.Με την παρακάτω μέτρηση, ανάγουμε το πρόβλημα να βρούμε σε μια μέτρηση το πλαστό νόμισμα.



Εδώ παρατηρούμε ένα μοτίβο:

1. Εάν δεν κάνουμε καμία μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή ενός νομίσματος, γιατί γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πλαστό.
2. Εάν κάνουμε μια μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή τριών νομισμάτων.
3. Εάν κάνουμε δυο μετρήσεις, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή εννιά νομισμάτων.

Παρατηρούμε ότι $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$.

Να δείξετε ότι με n μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή 3^n νομισμάτων.

Θα αποδείξουμε την πρόταση με μαθηματική επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για $n = 0$, όπως ήδη παρατηρήσαμε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για k.
Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι με $n = k$ μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό νόμισμα από μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Θα δείξουμε την πρόταση για $n = k + 1$.

Χωρίζουμε την συλλογή των 3^{k+1} νομισμάτων σε τρεις ομάδες των 3^k νομισμάτων. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε A, B και C. Τοποθετούμε τα νομίσματα των A και B στην ζυγαριά. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Η A είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην A.
2. Η B είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην B.
3. ΟΙ A και B έχουν το ίδιο βάρος. Τότε το πλαστό είναι στην C.

Σε κάθε περίπτωση το πλαστό βρίσκεται σε μια συλλογή 3^k νομισμάτων. Από την υπόθεση της επαγωγής, με k μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό.
Με την αρχική μέτρηση, συνολικά κάναμε $k + 1$ μετρήσεις, αποδεικνύοντας την πρόταση.

(5) Όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα (**βρείτε το λάθος**).

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε σε κάθε συλλογή k αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Θα δείξουμε ότι σε κάθε συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Παίρνουμε μια συλλογή $k + 1$ αυτοκινήτων. Από την υπόθεση τα πρώτα k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα τελευταία k αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.
Άρα όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Παραδείγματα Επαγωγής-2

(1) Να δείξετε ότι

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned}
1+2 &= 3 = \frac{2.3}{2} \\
1+2+3 &= 6 = \frac{3.4}{2} \\
1+2+3+4 &= 10 = \frac{4.5}{2} \quad \text{(Αγία Τετράκτυς)} \\
1+2+3+4+5 &= 15 = \frac{5.6}{2}
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2}{2} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + \cdots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$(1 + 2 + \cdots + m) + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να δειχτεί χωρίς την χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής, πολύ απλά. Η μέθοδος αυτή επινοήθηκε από τον Gauss όταν ήταν μαθητής δημοτικού. Το πρόβλημα που έβαλε ο δάσκαλος στους μαθητές τους ήταν οι μαθητές να βρουν το άθροισμα

$$1 + 2 + \cdots + 100.$$

Ο δάσκαλος παρατήρησε ότι ο Gauss τελείωσε πολύ γρήγορα. Ο Gauss παρατήρησε ότι

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 50 + 51 = 101.$$

και έχουμε 50 τέτοια ζευγάρια. Άρα το άθροισμα είναι

$$101.50 = 5050.$$

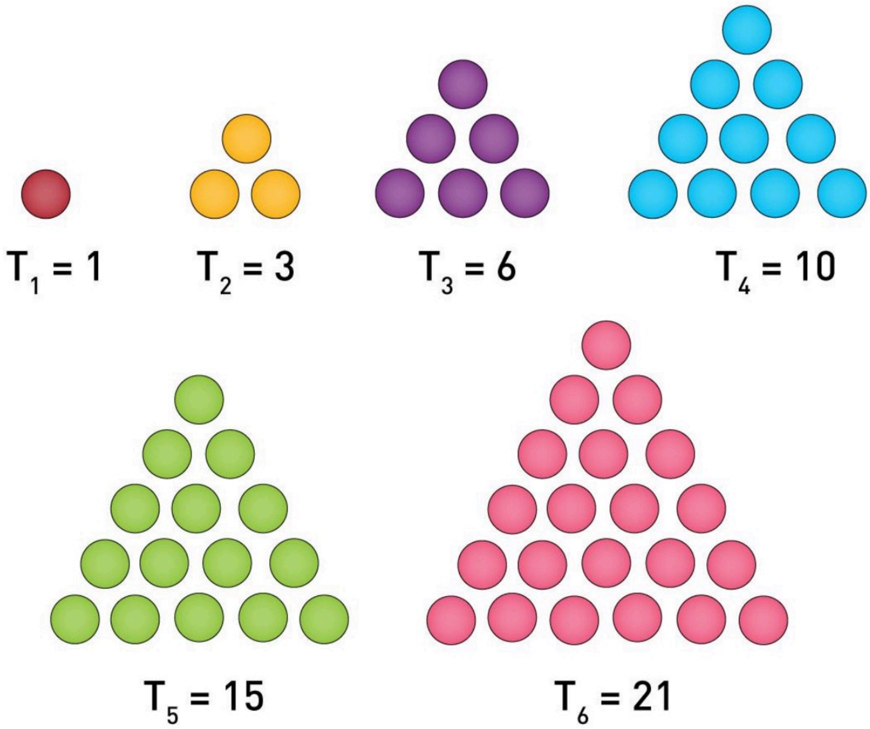
Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω πιο συστηματικά. Έστω

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

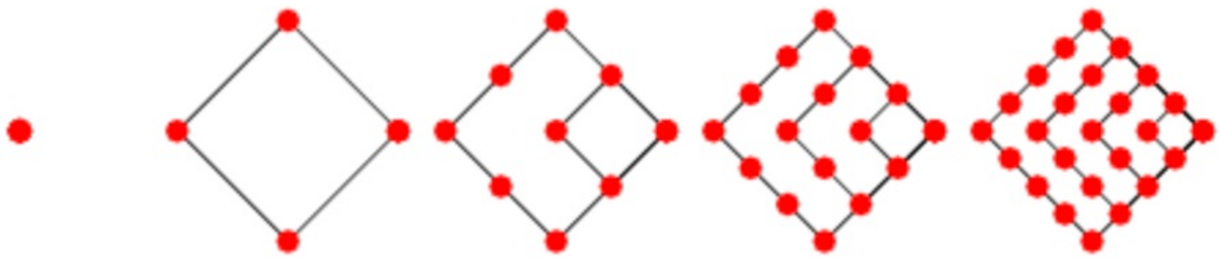
Γράφουμε το S με δυο τρόπους και προσθέτουμε

$$\begin{array}{rcl}
S_n & = & 1 + 2 + \cdots + n \\
S_n & = & n + (n-1) + \cdots + 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \Rightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}
\end{array}$$

Οι αριθμοί S_n ονομάζονται τριγωνικοί γιατί μπορούν να κατανεμηθούν σε τρίγωνο:



Συνεχίζοντας αυτήν ορολογία, ορίζουμε τους τετραγωνικούς αριθμούς, ως αριθμούς που μπορούν να αναπαρασταθούν σε τετράγωνα:



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots$$

Θέτουμε $Q_n = n^2$ για τον n-οστό τετράγωνο αριθμό. Παρατηρούμε

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n + 1.$$

Ξεκινάμε με το επόμενο σχήμα:

Παρατηρούμε ότι

1. Ο συνολικός αριθμός των τριγώνων είναι n^2.
2. Ο αριθμός των πράσινων τριγώνων είναι

$$1, 3, 6, 10, 15, 21$$

   δηλαδή S_n.
3. Ο αριθμός των άσπρων τριγώνων είναι

$$0, 1, 3, 6, 10$$

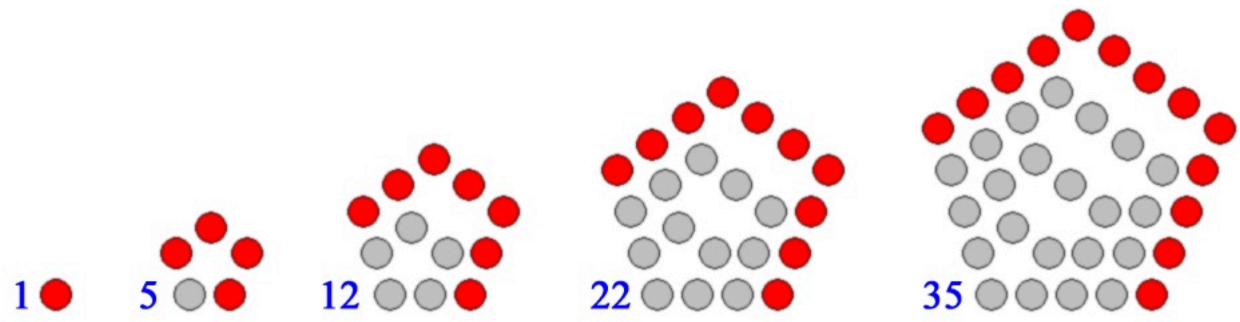
   δηλαδή S_{n-1}.

Άρα $S_n + S_{n-1} = n^2$.

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση:

$$\begin{aligned} S_n + S_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)+(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2 \end{aligned}$$

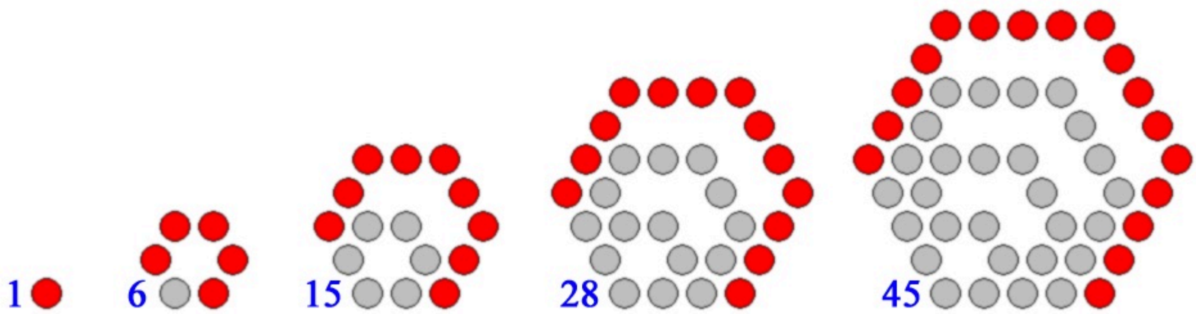
Επίσης υπάρχουν πεντάγωνοι αριθμοί:



με γενική φόρμουλα

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

και εξάγωνοι



με γενική φόρμουλα:

$$H_n = 2n^2 - n$$

.

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε s- γωνικούς αριθμούς αν μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα κανονικό s-γωνο. Ο τύπος για τον n-οστο τέτοιο αριθμό δίνεται:

$$P(s,n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2} = (s-2)\frac{n(n-1)}{2} + n.$$

Για $n = 3$:

$$P(3,n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.$$

(2) Να δείξετε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 &= 5 = \frac{2.3.5}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 &= 14 = \frac{3.4.7}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 &= 30 = \frac{4.5.9}{6} \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 &= 55 = \frac{5.6.11}{6}
\end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}
(1^2 + 2^2 + \cdots + m^2) + (m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} \\
&= \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} \\
&= \frac{(m+1)(2m^2 + m + 6m + 6)}{6} \\
&= \frac{(m+1)(2m^2 + 7m + 6)}{6}
\end{aligned}$$

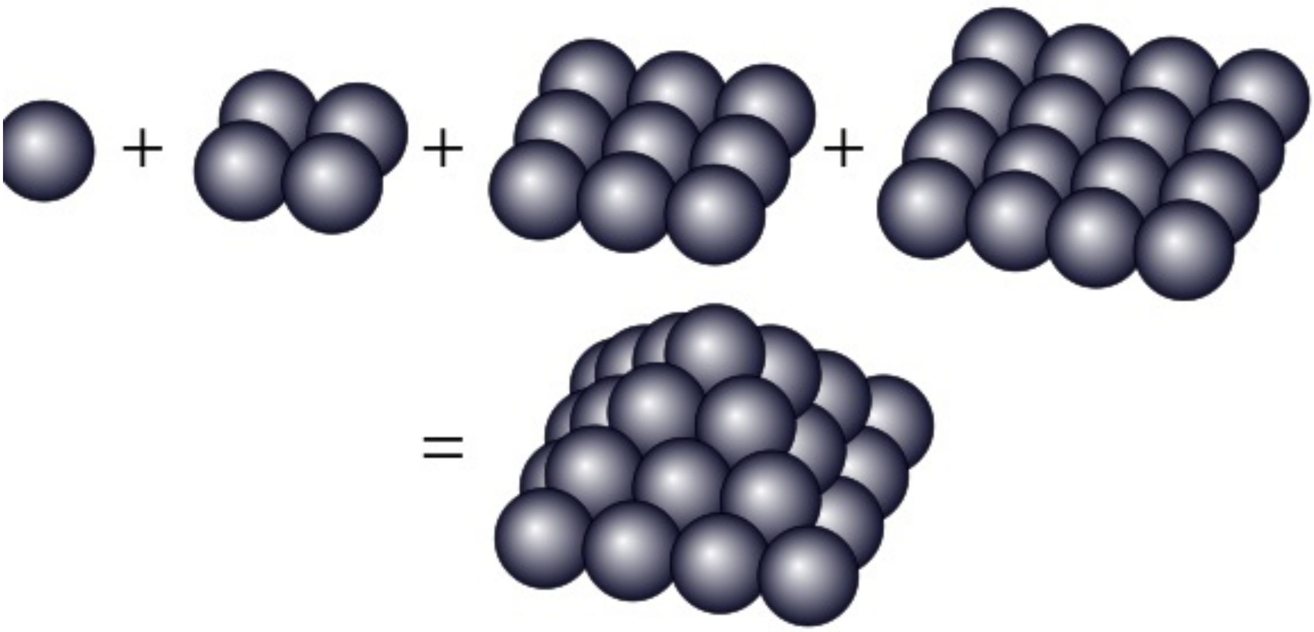
Παρατηρούμε ότι

$$(m+2)(2m+3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6.$$

Συνοψίζοντας

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Παραστατικά:



Γι’ αυτό αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται τετράγωνοι πυραμοειδείς αριθμοί.

(3) Να δείξετε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+2+\cdots+n)^2, n \geq 1.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$:

$$1 = \frac{1.2^2}{4} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 + (m+1)^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

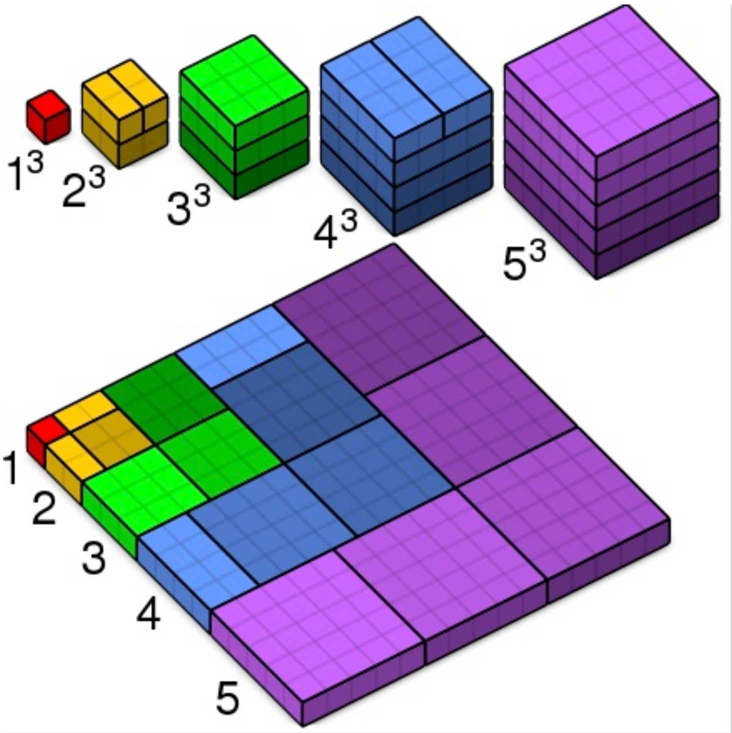
$$\begin{aligned}
(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3) + (m+1)^3 &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\
&= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2[m^2 + 4(m+1)]}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} \\
&= \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(m+2)^2 = m^2 + 2.2.m + 2^2 = m^2 + 4m + 4.$$

Οι υπόλοιπες ισότητες είναι συνέπεια του πρώτου παραδείγματος

Γεωμετρικά:

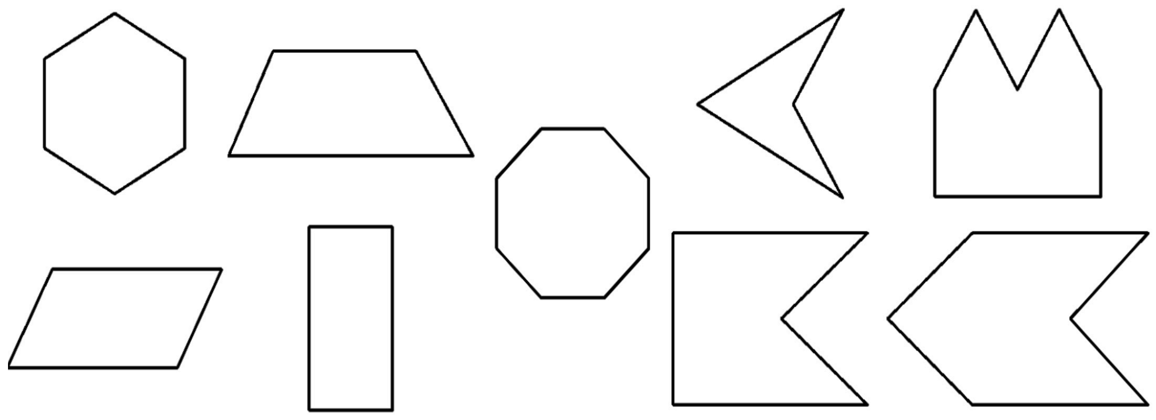


(4) Να δείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός κυρτού n-γώνου είναι $n(n-3)/2$, για $n \geq 4$.

Διαγώνιος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με μια μη-γειτονική κορυφή.

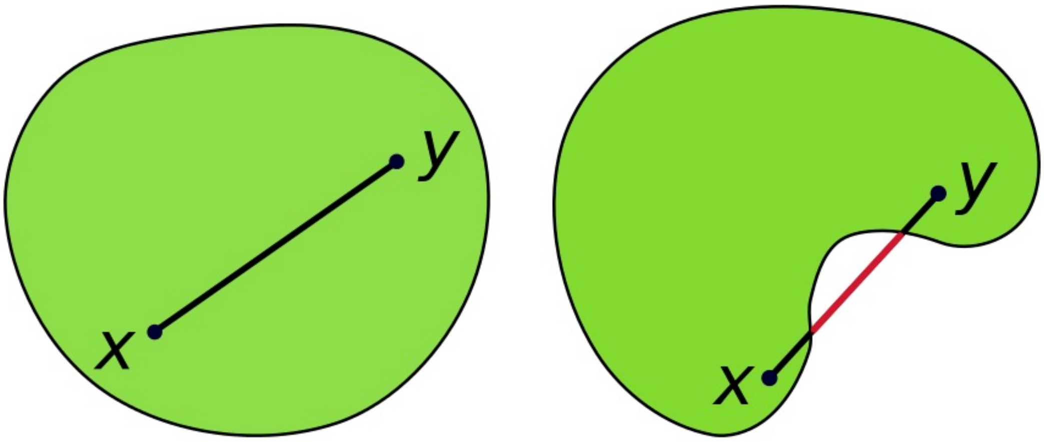
Ένα σχήμα (μια περιοχή) στο επίπεδο ή στον χώρο ονομάζεται **κυρτό** αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία του περιέχεται στο σχήμα.

Κάποια σχήματα

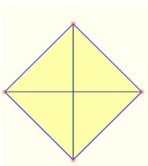
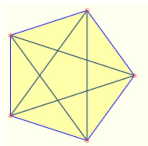
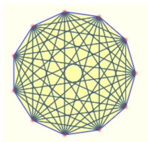
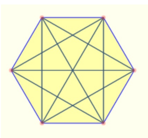
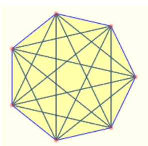
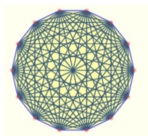
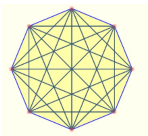
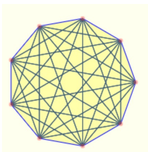
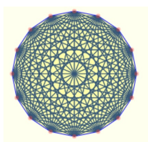


Τα πρώτα πέντε είναι κυρτά και τα άλλα τέσσερα δεν είναι

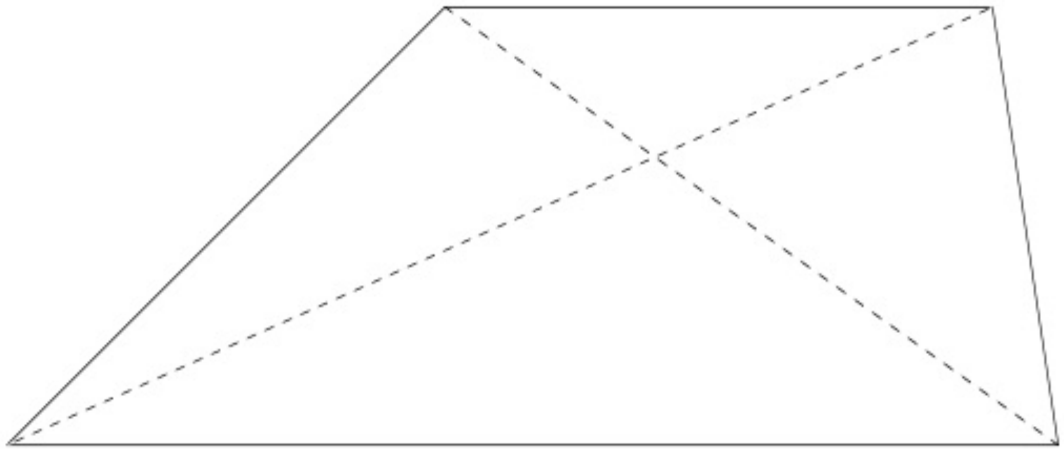
Και πιο παραστατικά:



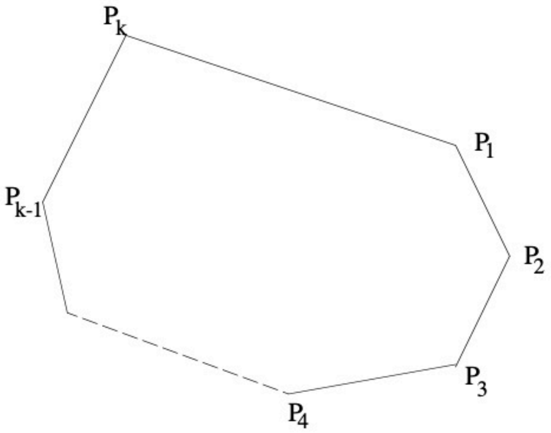
Πρώτα να δούμε κάποια παραδείγματα.

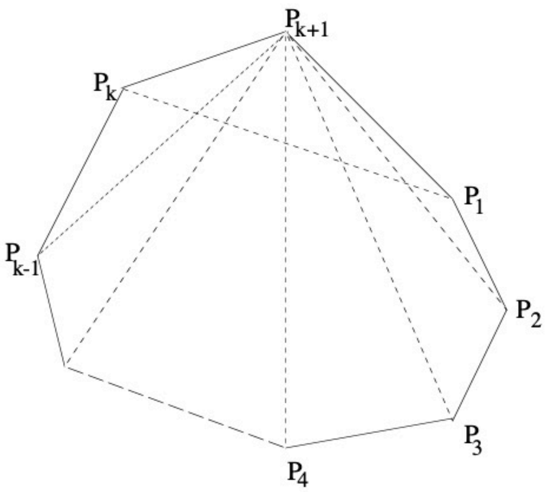
	2		5		44
	9		14		77
	20		27		104

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$. Τότε, έχουμε δυο διαγώνιους. Αλλά και $4(4 - 3)/2 = 2$ και η πρόταση ισχύει.



Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$, δηλαδή υποθέτουμε ότι ένα κυρτό k-γώνο έχει $k(k-3)/2$ διαγώνιους. Θα δείξουμε ότι ένα κυρτό $(k+1)$-γώνο έχει $(k+1)(k-2)/2$ διαγώνιους.





Όταν προσθέσουμε μια ακόμη κορυφή σε ένα κυρτό k-γώνο, οι διαγώνιοι που είχαμε πριν παραμένουν. Από την υπόθεση έχουμε ήδη $k(k-3)/2$ διαγώνιους.
Επίσης, έχουμε τις διαγώνιους από την κορυφή P_{k+1} στις όλες τις κορυφές, εκτόςτων γειτονικών, P_1 και P_k, δηλαδή επιπλέον $(k-2)$-διαγώνιους. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το P_1 με το P_k, που ήταν πλευρά, τώρα είναι διαγώνιος. Άρα ο αριθμός των διαγώνιων συνολικά είναι:

$$\frac{k(k-3)}{2}+k-2+1=\frac{k^2-3k}{2}+k-1=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

(5) Δείξτε ότι $n^2 \geq 2n + 1$, $n \geq 3$.
Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι εκθετική ως προς το n και η δεξιά γραμμική. Σε γενικές γραμμές, εκθετικές συναρτήσεις είναι μεγαλύτερες των γραμμικών, για **μεγάλες τιμές** του n.
Παρατηρούμε ότι η υπόθεση $n \geq 3$ είναι απαραίτητη:
$n = 0: \ 0 < 1.$
$n = 1: \ 1 < 3.$
$n = 2: 4 < 5.$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 3$, $3^2 = 9 > 7 = 2.3 + 1$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Δηλαδή $k^2 \geq 2k + 1$, όπου $k \geq 3$.
Θα δείξουμε ότι $(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Ξεκινάμε αναλύοντας την αριστερή πλευρά της σχέσης:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 2(k+1) + 2k > 2(k+1) + 1,$$

γιατί $2k \geq 6 > 1$.

(6) Να δείξετε ότι

$$n^2 \leq 2^n, \; n \geq 4.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι δυνάμεις του n ενώ η δεξιά πλευρά είναι δύναμη κάποιου σταθερού αριθμού. Και πάλι, για μεγάλες δυνάμεις, η αριστερή πλευρά γίνεται μικρότερη από την δεξιά:
$n = 0 : \; 0 < 1.$
$n = 1 : \; 1 < 2.$
$n = 2 : 4 = 4.$
$n = 3 : 9 > 8.$
$n = 4 : 16 = 16.$
$n = 5 : 25 < 32$
Γι' αυτό ξεκινάμε από το $n \geq 4$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 4$, γιατί η σχέση ξεκινάει από το 4:

$$4^2 = 16 = 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k \geq 4$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι $k^2 \leq 2^k$.
Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(k + 1)^2 \leq 2^{k+1}$. Οπότε

$$2^{k+1} = 2.2^k \geq 2k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο παράδειγμα στο τέταρτο βήμα.

(7) Δείξτε ότι $(2n)!(n+1) > 4^n(n!)^2$ για $n > 1$.
(Υπενθυμίζουμε ότι $n! = 1.2.\ldots.n$).
Η σχέση αυτή είναι πιο πολύπλοκη. Απλά, τα παραγωγικά μεγαλώνουν πολύ γρήγορα σε σχέση με τις δυνάμεις.
$n = 0 : \ 1 = 1.$
$n = 1 : \ 2.2 = 4.1.$
$n = 2 : 4!.3 = 1.2.3.4.3 = 72 > 4^2.(2!)^2 = 16.4 = 64.$
Για $n = 3$, ας συγκρίνουμε το $6!.4 = 1.2.3.4.5.6.4$ και το $4^3.(3!)^2 = 4.4.4.1.2.3.1.2.3$ χωρίς την χρήση υπολογιστών:

$$1.\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{4}.5.\cancel{6}.\cancel{4} \sim \cancel{4}.\cancel{4}.4.1.\cancel{2}.\cancel{3}.1.\cancel{2}.\cancel{3}.$$

και τελικά η αριστερή πλευρά είναι μεγαλύτερη της δεξιάς.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 2$, $4!.3 = 72 > 4^2.(2!)^2 = 64$.
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$, $(2k)!(k+1) > 4^k(k!)^2$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$ δηλαδή $(2k+2)!(k+2) > 4^{k+1}((k+1)!)^2$. Ξεκινάμε από την αριστερή πλευρά της σχέσης προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε ώστε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση της επαγωγής:

$$(2k+2)!(k+2) = (2k)!(2k+1)(2k+2)(k+2) = (2k)!(2k+1)2(k+1)(k+2)$$

Εφαρμόζοντας την υπόθεση της επαγωγής,

$$(2k+2)!(k+2) > 2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης είναι μεγαλύτερο του δεξιού μέρους της αρχικής σχέσης

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2$$

Άρα

$$2(2k+1)(k+2)4^k(k!)^2 > 4^{k+1}((k+1)!)^2 = 4.4^k(k!)^2(k+1)^2 \Leftrightarrow (2k+1)(k+2) > 2(k+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2k^2+4k+k+2 > 2k^2+4k+2 \Leftrightarrow 5k > 4k.$$

Η τελευταία σχέση προφανώς ισχύει για $k \geq 2$.

(8) Να δείξετε ότι $n! > 3^n$, $n \geq 7$.
Η ιδέα και πάλι είναι ότι, γενικά, τα παραγοντικά είναι μεγαλύτερα από τις δυνάμεις σταθερού αριθμού γιατί στα παραγοντικά πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς που αυξάνουν ενώ στις δυνάμεις πολλαπλασιάζουμε με έναν σταθερό αριθμό.
Αρχικά ελέγχουμε κάποιες τιμές:
$n = 0: \ 1 = 1, \quad n = 1: \ 1 < 3, \quad n = 2: \ 2 < 9 \quad n = 3: \ 1.2.3 = 6 < 3.3.3 = 27.$
$n = 4: \ 1.2.3.4 = 24 < 3.3.3.3 = 81, \quad n = 5: \ 1.2.3.4.5 = 120 < 3.3.3.3.3 = 243.$
$n = 6: 1.2.3.4.5.6 = 720 < 3.3.3.3.3.3 = 729 \quad n = 7: 1.2.3.4.5.6.7 = 5040 > 2187.$Από δω και πέρα, η ανισότητα διατηρείται γιατί στο επόμενο βήμα, πολλαπλασιάζουμε την αριστερή πλευρά με έναν αριθμό μεγαλύτερο του 3 και την δεξιά επί 3.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 7$, κάτι που το κάναμε ήδη:

$$7! = 1.2.3.4..5.6.7 = 5040 > 2187 = 3^7.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 7$, δηλαδή $m! > 3^m$. Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $(m + 1)! > 3^{m+1}$.
Υπολογίζουμε

$$(m + 1)! = (m + 1).m! > (m + 1)3^m > 3.3^m = 3^{m+1}$$

κι αυτό γιατί $m > 7$ και επομένως $m + 1 > 3$.

(9) Μπορεί να δειχτεί ότι $(2+\sqrt{3})^n$ μπορεί να γραφτεί ως $a_n + b_n\sqrt{3}$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ισχύει $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
Αυτή η σχέση βγαίνει ουσιαστικά από την ανάπτυξη της δεξιάς πλευράς, κάνοντας όλους τους πολλαπλασιασμούς και χρησιμοποιώντας ότι $(\sqrt{3})^2 = 3$.
Και πάλι ας κάνουμε κάποιους υπολογισμούς για να δούμε πως δουλεύει η διαδικασία:

$$
\begin{aligned}
n=0: \quad & (2+\sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1, b_0 = 0 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1.\\
n=1: \quad & (2+\sqrt{3})^1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1 \Rightarrow 2^2 - 3.1^2 = 1.\\
n=2: \quad & (2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2.2.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} \Rightarrow\\
& a_2 = 7, b_2 = 4 \Rightarrow 7^2 - 3.4^2 = 49 - 3.16 = 1.\\
n=3: \quad & (2+\sqrt{3})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{3} + 3.2.(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 3.2.3 + 3\sqrt{3} =\\
& 26 + 15\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 26, b_3 = 15 \Rightarrow 26^2 - 3.15^2 = 676 - 3.225 = 1.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}.(\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$.

Μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς διαφορετικά για $n = 3$:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^3 &= (2+\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3}) = (7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) \\ &= 14+7\sqrt{3}+8\sqrt{3}+4.3 = 26+15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

όπως παραπάνω.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Οπότε

$$a_0^2 - 3b_0^2 = 1^2 - 3.0^2 = 1,$$

οπότε ισχύει. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m \geq 1$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$(2+\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}, \quad a_m^2 - 3b_m^2 = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = m + 1$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι $a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 = 1$.

Χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{m+1} &= (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m = (2+\sqrt{3})(a_m + b_m\sqrt{3})\\ &= 2a_m + 2b_m\sqrt{3} + a_m\sqrt{3} + 3b_m\\ &= (2a_m + 3b_m) + (a_m + 2b_m)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Άρα, $a_{m+1} = 2a_m + 3b_m$ και $b_{m+1} = a_m + 2b_m$. Τότε

$$\begin{aligned}a_{m+1}^2 - 3b_{m+1}^2 &= (2a_m + 3b_m)^2 - 3(a_m + 2b_m)^2\\ &= 4a_m^2 + 12a_m b_m + 9b_m^2 - 3(a_m^2 + 4a_m b_m + 4b_m^2)\\ &= 4a_m^2 + \cancel{12a_m b_m} + 9b_m^2 - 3a_m^2 - \cancel{12a_m b_m} - 12b_m^2\\ &= a_m^2 - 3b_m^2 = 1.\end{aligned}$$

(10) (Ανισότητα του Bernoulli) Δείξτε ότι $(1+x)^n \geq 1 + nx$ για $n \geq 1$ και $x \geq -1$.

Αν ελέγξουμε την σχέση για κάποιες τιμές του x:
$x = -1$: $0 \geq 1 - n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$.
$x = 0$: $1^n \geq 1$.
$x = 1$: $2^n \geq 1 + n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική.
$x = 2$: $3^n \geq 1 + 2n$, που ισχύει για κάθε $n \geq 1$, γιατί η αριστερή πλευρά είναι εκθετική και η δεξιά γραμμική, όπως και πριν.

Τώρα ελέγχουμε ως προς τις τιμές του n:
$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$, προφανές.
$n = 2$: $(1 + x)^2 = \cancel{1 + 2x} + x^2 \geq \cancel{1 + 2x}$, προφανές γιατί $x^2 \geq 0$, για κάθε x.
$n = 3$: $(1 + x)^3 = \cancel{1 + 3x} + 3x^2 + x^3 \geq \cancel{1 + 3x}$. Για να δούμε ότι ισχύει, πρέπει να δείξουμε ότι

$$0 \leq 3x^2 + x^3 = x^2(3 + x)$$

Το $x^2 \geq 0$ και $3 + x > 0$ γιατί $x \geq -1 \Rightarrow 3 + x \geq 3 - 1 = 2 > 0$.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$, $1 + x = 1 + x$. Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$, δηλαδή $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, για $x \geq -1$. Θα δείξουμε $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)\underbrace{(1 + x)^k \geq (1 + kx)}_{\text{από την υπόθεση}}(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

Κι αυτό γιατί $kx^2 \geq 0$.

Είναι μια ενδιαφέρουσα ανισότητα. Για παράδειγμα:

- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1+n.\dfrac{1}{n}=2.$
- $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n \geq 1+n.\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2n+1}{n+1}.$

(11) Δείξτε ότι ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Και πάλι ας κάνουμε κάποια παραδείγματα:
$n = 0$: Το σύνολο με κανένα στοιχείο είναι το κενό $\emptyset$ και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό του.
$n = 1$: Το σύνολο έχει ένα στοιχείο $S = \{a\}$ και έχει δυο υποσύνολο, το $\emptyset$ και το $\{a\}$.
$n = 2$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} = S.$$

$n = 3$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S.$$

$n = 4$: Το σύνολο έχει δυο στοιχεία $S = \{a, b, c, d\}$ και έχει τα εξής υποσύνολα:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$
$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} = S.$$

Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο στην παραπάνω κατασκευή:

- Πάντα εμφανίζονται το $\emptyset$ και το σύνολο S.
- Τα υποσύνολα ενός συνόλου είναι επίσης και υποσύνολα κάθε υπερσυνόλου του.
- Μπορούμε να κατασκευάσουμε τα υποσύνολα ενός συνόλου προσθέτοντας στοιχεία στα υποσύνολα υποσυνόλων του.
- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός υποσυνόλων εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των στοιχείων και όχι από την φύση τους.

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση το σύνολο είναι κενό και έχει ένα υποσύνολο, τον εαυτό. Άρα η σχέση ισχύει. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για ένα σύνολο με k στοιχεία. Δηλαδή ένα τέτοιο σύνολο έχει 2^k υποσύνολα. Θα δείξουμε ότι ένα σύνολο με $k+1$-στοιχεία, $S = \{x_1, \ldots x_{k+1}\}$ έχει 2^{k+1} υποσύνολα.
Από την υπόθεση, το σύνολο $\{x_1, \ldots x_k\}$ έχει 2^k υποσύνολα. Για κάθε ένα απ' αυτά τα υποσύνολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ακόμη με την πρόσθεση του x_{k+1} σ' αυτό. Άρα έχουμε ακόμη 2^k υποσύνολα. Συνολικά λοιπόν έχουμε $2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$ υποσύνολα.
Θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη αυτού του παραδείγματος χρησιμοποιώντας το Διώνυμο του Νεύτωνα.