

# Αριθμοί και Σχήματα

Στράτος Πρασίδης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

4 Νοεμβρίου 2024

## Φυσικοί Αριθμοί

Ορίζουμε τους φυσικούς αριθμούς:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ιδιότητες:

- Δύο πράξεις ορίζονται και είναι κλειστές στους φυσικούς αριθμούς: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός.
- Κάποιες φορές, η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται αλλά όχι πάντα:

$$3 - 2 = 1, \quad 2 - 3 \notin \mathbb{N}, \quad 6 : 3 = 2, \quad 5 : 2 \notin \mathbb{N}.$$

- Είναι αριθμοί όπου για κάθε έναν έχουμε τον επόμενό του. Ουσιαστικά ορίζονται από την πράξη  $+1$  ξεκινώντας από το 0.

Από τον ορισμό τους, οι φυσικοί αριθμοί έχουν κάποιες, πιο τεχνικές, ιδιότητες:

- ① (Αρχή της Καλής Διάταξης) Κάθε υποσύνολο του  $\mathbb{N}$  έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.
- ② (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής) Έστω  $P(n)$  είναι μια πρόταση που εξαρτάται από έναν φυσικό αριθμό  $n$ . Υποθέτουμε ότι
  - ① Για κάποιον φυσικό αριθμό  $n$ , η  $P(k)$  αληθεύει.
  - ② Για κάθε  $n \geq k$ , αν η  $P(n)$  αληθεύει, τότε και η  $P(n + 1)$  αληθεύει.

Τότε η  $P(n)$  ισχύει για κάθε  $n \geq k$ .

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Είναι πολύ χρήσιμες ιδιότητες στις αποδείξεις που εξαρτώνται από φυσικούς αριθμούς ή που ανάγονται σε φυσικούς αριθμούς.

Παραστατικά:



Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη σκάλα και ξέρουμε δυο πράγματα:

- 1 Μπορούμε να ανεβούμε στο πρώτο σκαλοπάτι.
- 2 Εάν μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα σκαλοπάτι, τότε μπορούμε να ανεβούμε στο επόμενο.

Απ' αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να φτάσουμε σε κάθε σκαλοπάτι της σκάλας.

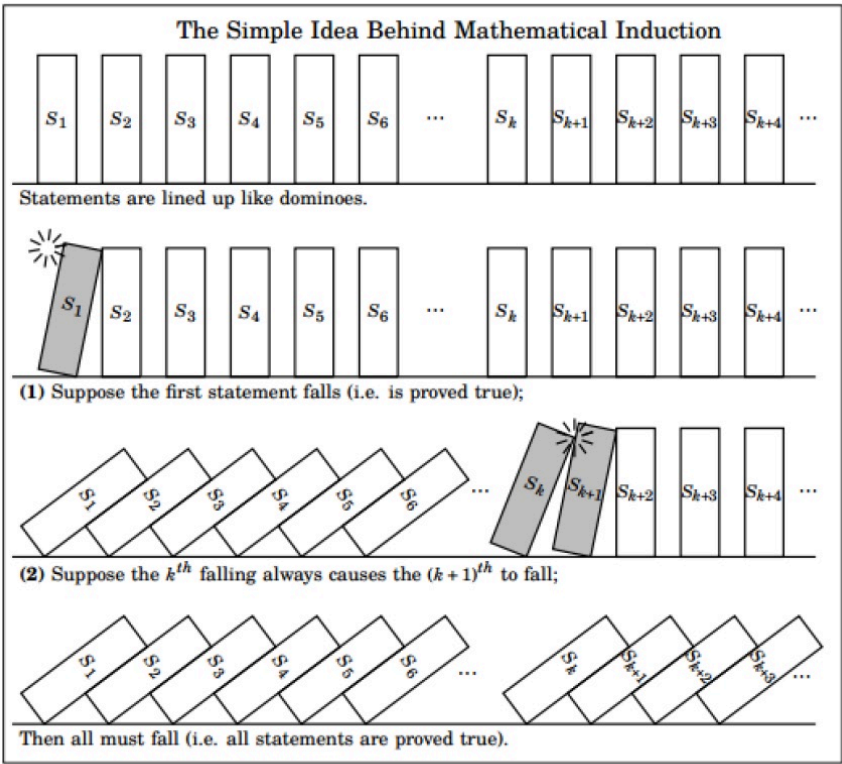
Με άλλον τρόπο:



Υποθέτουμε ότι έχουμε μια άπειρη συλλογή από ντόμινο και ξέρουμε δυο πράγματα:

- 1 Υποθέτουμε ότι πέφτει το πρώτο ντόμινο.
- 2 Εάν πέσει κάποιο ντόμινο τότε θα πέσει και το επόμενο.

Απ' αυτές τις δυο προτάσεις συμπεραίνουμε ότι όλα τα ντόμινο θα πέσουν.



## Παραδείγματα Επαγωγής-1

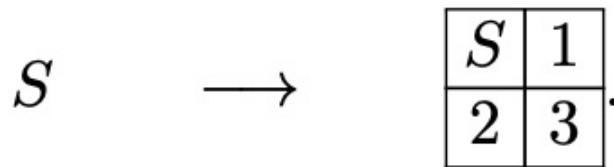
(1) Μια ομάδα  $n$  πειρατών πρόκειται να μοιράσει έναν θησαυρό, από χρυσό, έτσι ώστε κάθε πειρατής θα πάρει ένα ίσο μερίδιο. Όμως οι πειρατές δεν είναι αντικειμενικοί, και κάθε πειρατής έχει την δικιά του άποψη του τι είναι το  $\frac{1}{n}$  του θησαυρού. Να δώσετε μια στρατηγική μοιρασιάς του θησαυρού.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο  $n$ . Για  $n = 1$  το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μέθοδο να μοιραστούν  $k - 1$  πειρατές τον θησαυρό. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια ομάδα από  $k$ -πειρατές.

Παίρνουμε ένα κομμάτι του θησαυρού και το βάζουμε σε έναν καινούργιο σωρό. Συνεχίζουμε αυτήν την διαδικασία μέχρις ότου ένας πειρατής δηλώσει ότι αυτό είναι το δίκαιο μερίδιο του θησαυρού γι' αυτόν. Οι υπόλοιποι  $k - 1$  πειρατές πιστεύουν ότι αυτό το μερίδιο δεν είναι δίκαιο γι' αυτούς, διαφορετικά θα είχαν επιλέξει τον καινούργιο σωρό νωρίτερα.

Από την υπόθεση της επαγωγής, οι υπόλοιποι πειρατές  $k - 1$  μπορούν τώρα να μοιράσουν τον υπόλοιπο θησαυρό.

(2) Δείξτε ότι μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε  $n$  τετράγωνα, για κάθε  $n \geq 6$ . Σ' αυτήν την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε ένα επαγωγικό επιχείρημα λίγο διαφορετικό. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο  $S$  με  $n - 3$  υποτετράγωνα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με  $n$  υποτετράγωνα:



Τότε αν έχουμε 6 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις με 6, 9, 12, 15 ... υποτετράγωνα. Αν έχουμε 7 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 7, 10, 13, 16 ..., και αν έχουμε 8 υποτετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποδιαιρέσεις για 8, 11, 14, 17 ... υποτετράγωνα.

Άρα πρέπει να υποδιαιρέσουμε ένα τετράγωνο σε 6, 7 και 8 τετράγωνα και τότε μπορούμε να υποδιαιρέσουμε κάθε τετράγωνο σε οποιοδήποτε αριθμό υποτετραγώνων.



Γι' αυτά τα υποτετράγωνα έχουμε

1		2
		3
4	5	6

1		2	
3	4	5	
6	7		

1			2
			3
			4
5	6	7	8

(3) Ένα ATM μηχάνημα έχει μόνο νομίσματα των €5 και κέρματα των €2. Δείξτε ότι το μηχάνημα μπορεί να δώσει οποιοδήποτε ακέραιο ποσό, μεγαλύτερο των €3, του ζητηθεί. Έστω  $n$  είναι το ποσό για ανάληψη. Θα δώσουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για  $n = 4$  είναι εύκολο να δούμε ότι είναι  $2 + 2$ . Τώρα υποθέτουμε ότι μπορούμε να κάνουμε ανάληψη το ποσό των € $k$ . Θα δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε € $k + 1$ .

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν στο ποσό  $k$  υπάρχουν δυο δέυρα, τότε τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με ένα πεντάευρο
- Αν υπάρχει ένα πεντάευρο, τότε το αφαιρούμε και το αντικαθιστούμε με τρία δέυρα.
- Αν υπάρχουν ένα πεντάευρο και ένα δέυρο, τα αφαιρούμε και τα αντικαθιστούμε με τέσσερα δέυρα.

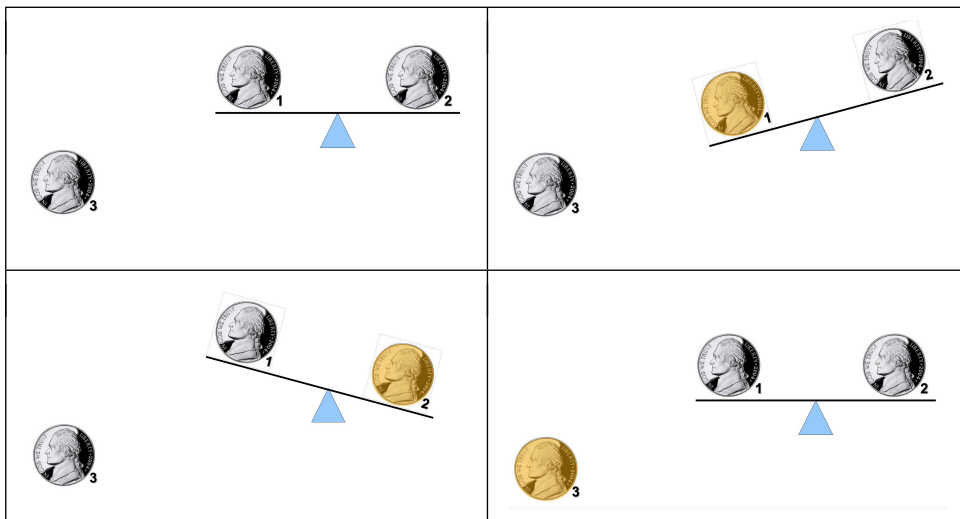
Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να κάνουμε ανάληψη  $\in k + 1$ .

Το πρόβλημα έχει και μια άλλη διαφορετική λύση. Θέλουμε να πάρουμε  $\in n$ .

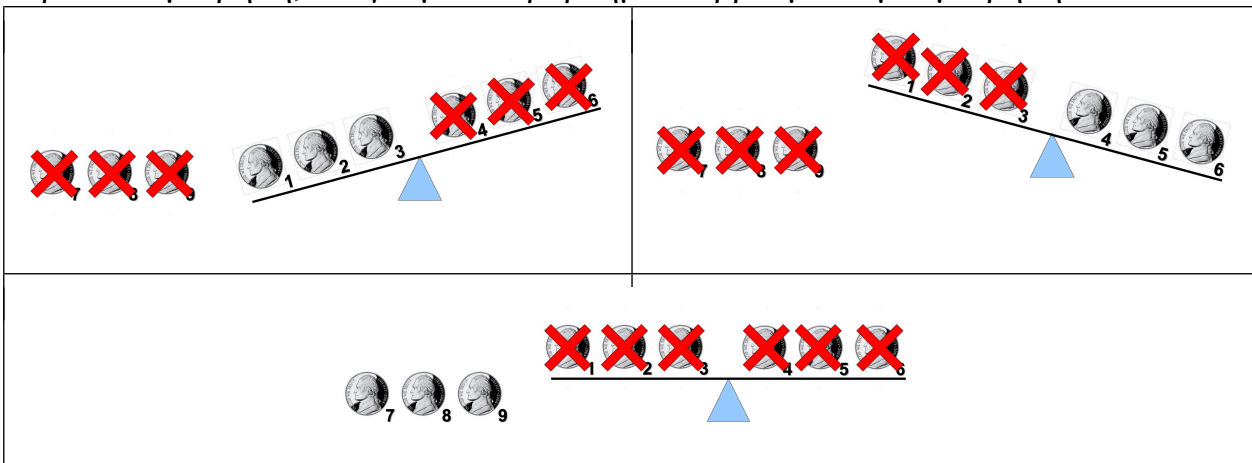
- Αν το  $n$  είναι άρτιος, τότε μπορούμε να το πάρουμε μόνο με δέυρα.
- Αν το  $n$  είναι περιττός τότε, επειδή το  $n - 5$  είναι άρτιος, μπορούμε να το πάρουμε ως ένα πεντάευρο και τα υπόλοιπα δέυρα.

(4) Δίνονται τρία ίδια νομίσματα, δυο από τα οποία είναι γνήσια και ένα πλαστό. Το πλαστό νόμισμα ζυγίζει πιο πολύ από τα άλλα. Χρησιμοποιώντας μια ζυγαριά μόνο μια φορά, να βρείτε το πλαστό νόμισμα.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την απάντηση:



Πιο δύσκολο πρόβλημα: Δίνονται εννιά όμοια νομίσματα έτσι ώστε οκτώ απ' αυτά είναι όμοια και το άλλο πλαστό, που ζυγίζει περισσότερο. Να βρείτε το πλαστό νόμισμα με δυο ζυγίσματα. Με την παρακάτω μέτρηση, ανάγουμε το πρόβλημα να βρούμε σε μια μέτρηση το πλαστό νόμισμα.



Εδώ παρατηρούμε ένα μοτίβο:

- ❶ Εάν δεν κάνουμε καμία μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή ενός νομίσματος, γιατί γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πλαστό.
- ❷ Εάν κάνουμε μια μέτρηση, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή τριών νομισμάτων.
- ❸ Εάν κάνουμε δυο μετρήσεις, τότε μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή εννιά νομισμάτων.

Παρατηρούμε ότι  $3^0 = 1$ ,  $3^1 = 3$ ,  $3^2 = 9$ .

Να δείξετε ότι με  $n$  μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό από μια συλλογή  $3^n$  νομισμάτων.

Θα αποδείξουμε την πρόταση με μαθηματική επαγωγή. Η πρόταση ισχύει για  $n = 0$ , όπως ήδη παρατηρήσαμε. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για  $k$ .

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι με  $n = k$  μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό νόμισμα από μια συλλογή  $3^k$  νομισμάτων. Θα δείξουμε την πρόταση για  $n = k + 1$ .



Χωρίζουμε την συλλογή των  $3^{k+1}$  νομισμάτων σε τρεις ομάδες των  $3^k$  νομισμάτων. Τις ομάδες αυτές τις ονομάζουμε  $A$ ,  $B$  και  $C$ . Τοποθετούμε τα νομίσματα των  $A$  και  $B$  στην ζυγαριά. Τότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- 1 Η  $A$  είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην  $A$ .
- 2 Η  $B$  είναι βαρύτερη, οπότε το πλαστό βρίσκεται στην  $B$ .
- 3 ΟΙ  $A$  και  $B$  έχουν το ίδιο βάρος. Τότε το πλαστό είναι στην  $C$ .

Σε κάθε περίπτωση το πλαστό βρίσκεται σε μια συλλογή  $3^k$  νομισμάτων. Από την υπόθεση της επαγωγής, με  $k$  μετρήσεις μπορούμε να βρούμε το πλαστό. Με την αρχική μέτρηση, συνολικά κάναμε  $k + 1$  μετρήσεις, αποδεικνύοντας την πρόταση.

(5) Όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα (**βρείτε το λάθος**).

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή. Για  $n = 1$  προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε σε κάθε συλλογή  $k$  αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Θα δείξουμε ότι σε κάθε συλλογή  $k + 1$  αυτοκινήτων, όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα. Παίρνουμε μια συλλογή  $k + 1$  αυτοκινήτων. Από την υπόθεση τα πρώτα  $k$  αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα και τα τελευταία  $k$  αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

Άρα όλα τα αυτοκίνητα έχουν το ίδιο χρώμα.

## Παραδείγματα Επαγωγής-2

(1) Να δείξετε ότι

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 1 + 2 + 3 &= 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} \\ 1 + 2 + 3 + 4 &= 10 = \frac{4 \cdot 5}{2} \quad (\text{Αγία Τετράκτυς}) \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15 = \frac{5 \cdot 6}{2} \end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = m \geq 1$ . Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = m + 1$ . Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1 + 2 + \dots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$(1 + 2 + \dots + m) + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + m+1 = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί ναδειχτεί χωρίς την χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής, πολύ απλά. Η μέθοδος αυτή επινοήθηκε από τον Gauss όταν ήταν μαθητής δημοτικού. Το πρόβλημα που έβαλε ο δάσκαλος στους μαθητές τους ήταν οι μαθητές να βρουν το άθροισμα

$$1 + 2 + \dots + 100.$$

Ο δάσκαλος παρατήρησε ότι ο Gauss τελείωσε πολύ γρήγορα. Ο Gauss παρατήρησε ότι

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 50 + 51 = 101.$$

και έχουμε 50 τέτοια ζευγάρια. Άρα το άθροισμα είναι

$$101 \cdot 50 = 5050.$$

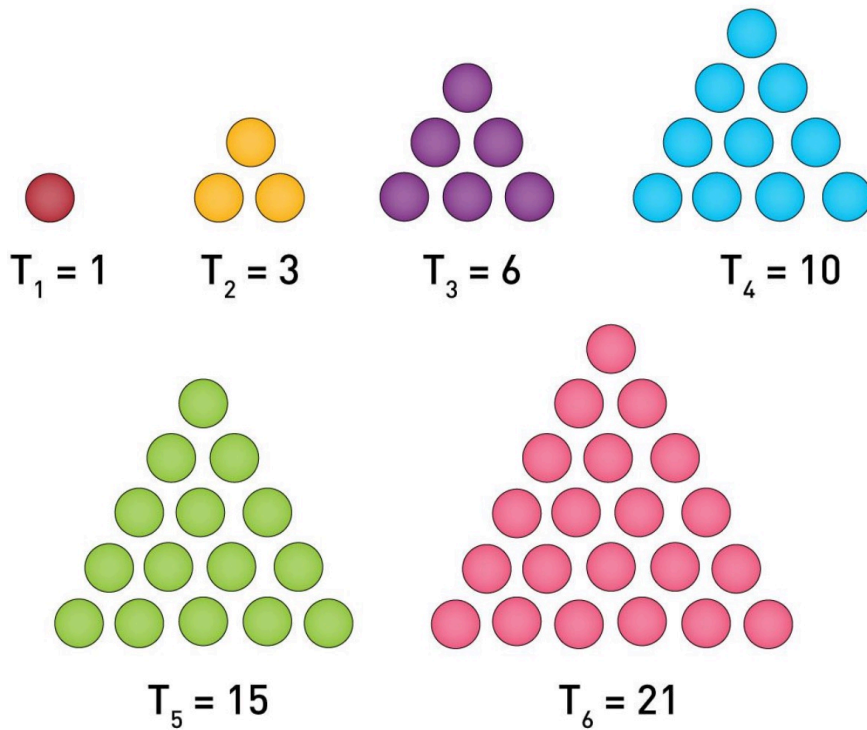
Θα εφαρμόσουμε το παραπάνω πιο συστηματικά. Έστω

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Γράφουμε το  $S$  με δυο τρόπους και προσθέτουμε

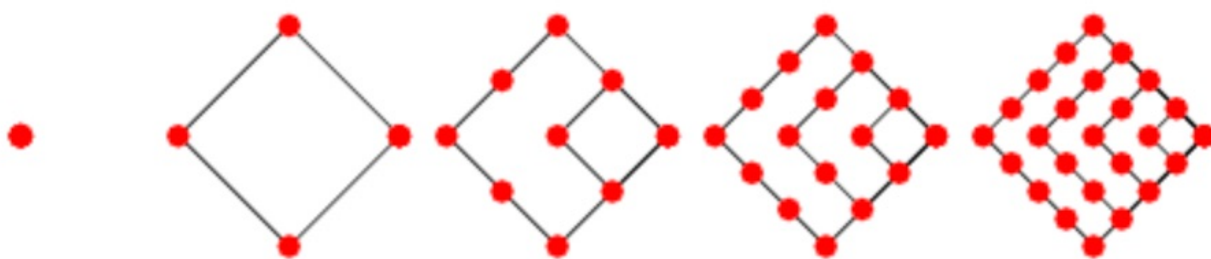
$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 + \cdots + n \\ S_n = n + (n-1) + \cdots + 1 \\ \hline 2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

Οι αριθμοί  $S_n$  ονομάζονται **τριγωνικοί** γιατί μπορούν να κατανεμηθούν σε τρίγωνο:





Συνεχίζοντας αυτήν ορολογία, ορίζουμε τους **τετραγωνικούς αριθμούς**, ως αριθμούς που μπορούν να αναπαρασταθούν σε τετράγωνα:



Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \dots$$

Θέτουμε  $Q_n = n^2$  για τον  $n$ -οστό τετράγωνο αριθμό. Παρατηρούμε

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n + 1.$$

Ξεκινάμε με το επόμενο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι

- ① Ο συνολικός αριθμός των τριγώνων είναι  $n^2$ .
- ② Ο αριθμός των πράσινων τριγώνων είναι

1, 3, 6, 10, 15, 21

δηλαδή  $S_n$ .

- ③ Ο αριθμός των άσπρων τριγώνων είναι

0, 1, 3, 6, 10

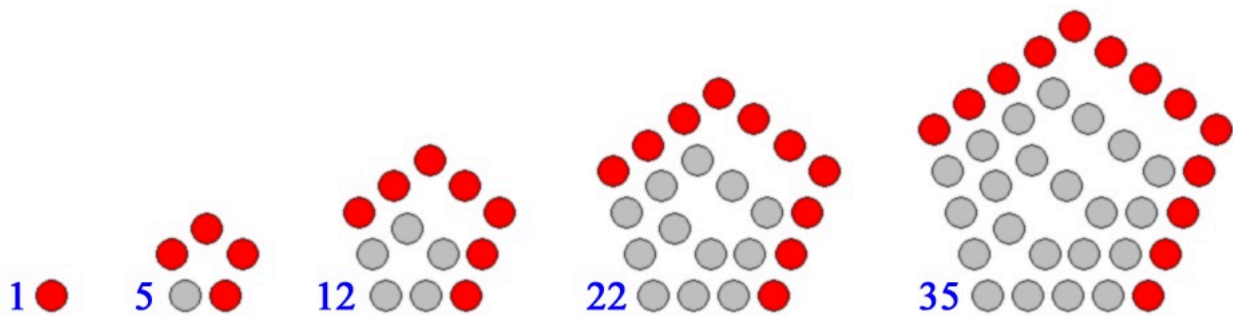
δηλαδή  $S_{n-1}$ .

Άρα  $S_n + S_{n-1} = n^2$ .

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση:

$$\begin{aligned} S_n + S_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1) + (n-1)n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \end{aligned}$$

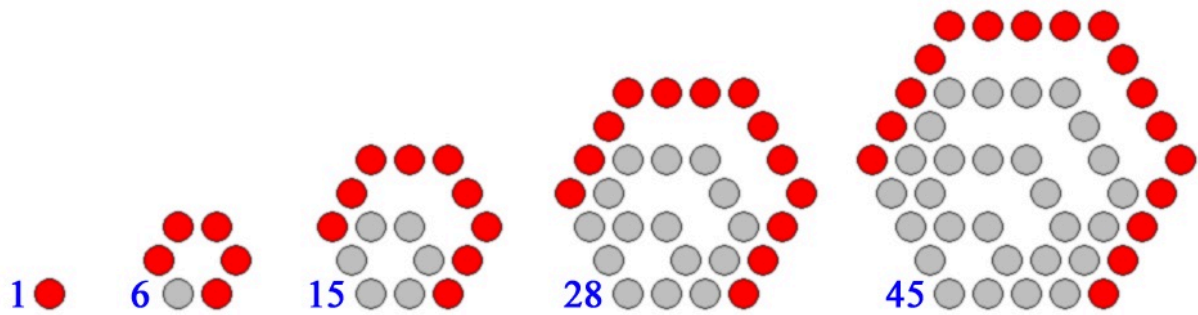
Επίσης υπάρχουν πεντάγωνοι αριθμοί:



με γενική φόρμουλα

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

και εξάγωνοι



με γενική φόρμουλα:

$$H_n = 2n^2 - n$$

Γενικά, μπορούμε να ορίσουμε  $s$ -γωνικούς αριθμούς αν μπορούν να αναπαρασταθούν σε ένα κανονικό  $s$ -γωνο. Ο τύπος για τον  $n$ -οστο τέτοιο αριθμό δίνεται:

$$P(s, n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2} = (s-2)\frac{n(n-1)}{2} + n.$$

Για  $n = 3$ :

$$P(3, n) = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.$$



(2) Να δείξετε ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

Πρώτα το ελέγχουμε εμπειρικά:

$$1^2 + 2^2 = 5 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6}$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = m \geq 1$ . Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = m + 1$ . Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 + (m + 1)^2 = \frac{(m + 1)(m + 2)(2(m + 1) + 1)}{6} = \frac{(m + 1)(m + 2)(2m + 3)}{6}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + \dots + m^2) + (m + 1)^2 &= \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6} + (m + 1)^2 \\ &= \frac{m(m + 1)(2m + 1) + 6(m + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(m + 1)[m(2m + 1) + 6(m + 1)]}{6} \\ &= \frac{(m + 1)(2m^2 + m + 6m + 6)}{6} \\ &= \frac{(m + 1)(2m^2 + 7m + 6)}{6} \end{aligned}$$

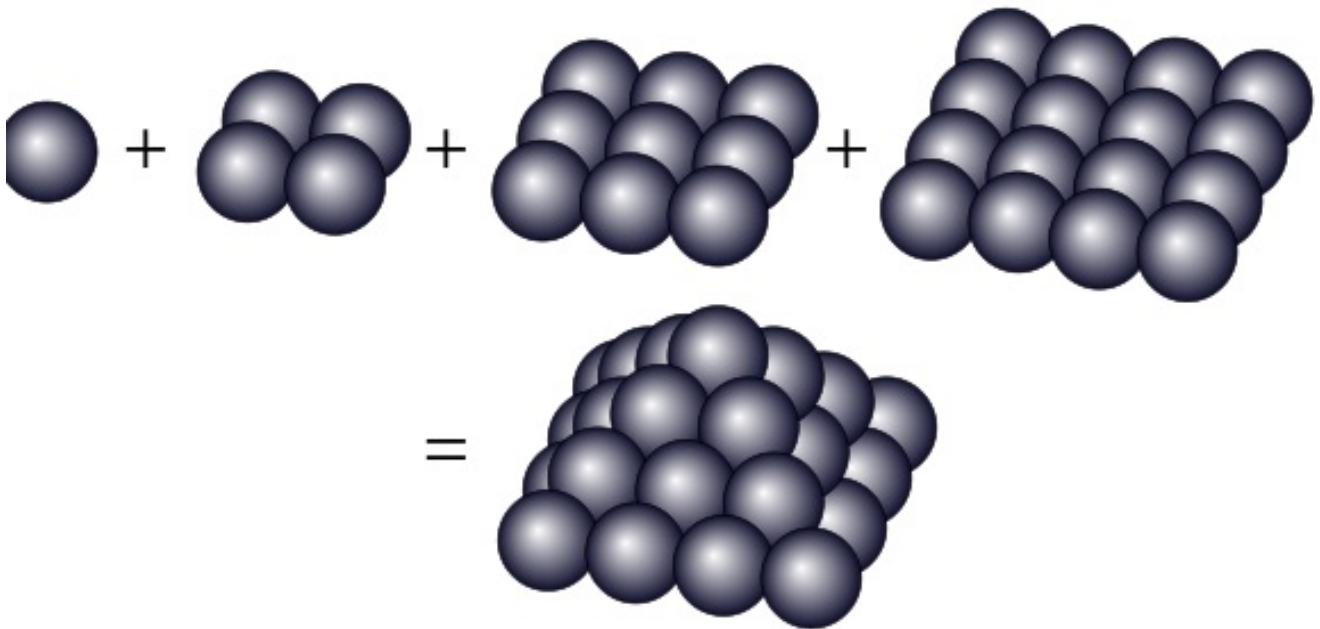
Παρατηρούμε ότι

$$(m + 2)(2m + 3) = 2m^2 + 3m + 4m + 6 = 2m^2 + 7m + 6.$$

Συνοψίζοντας

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 + (m + 1)^2 = \frac{(m + 1)(m + 2)(2m + 3)}{6}$$

Παραστατικά:



Γι' αυτό αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται **τετράγωνοι πυραμοειδείς αριθμοί**.

(3) Να δείξετε ότι

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2, n \geq 1.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1.$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = m \geq 1$ . Δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = m + 1$ . Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 + (m + 1)^3 = \frac{(m + 1)^2(m + 2)^2}{4}.$$

Απλά χρησιμοποιούμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}(1^3 + 2^3 + \dots + m^3) + (m + 1)^3 &= \frac{m^2(m + 1)^2}{4} + (m + 1)^3 \\ &= \frac{m^2(m + 1)^2 + 4(m + 1)^3}{4} \\ &= \frac{(m + 1)^2[m^2 + 4(m + 1)]}{4} \\ &= \frac{(m + 1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} \\ &= \frac{(m + 1)^2(m + 2)^2}{4}\end{aligned}$$

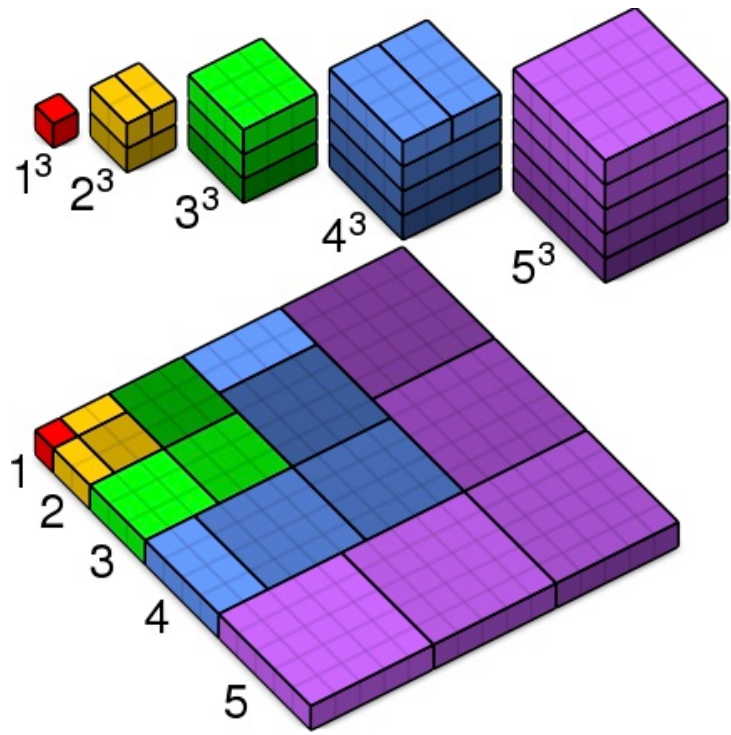
Χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Νεύτωνα:

$$(m + 2)^2 = m^2 + 2 \cdot 2 \cdot m + 2^2 = m^2 + 4m + 4.$$

Οι υπόλοιπες ισότητες είναι συνέπεια του πρώτου παραδείγματος



Γεωμετρικά:

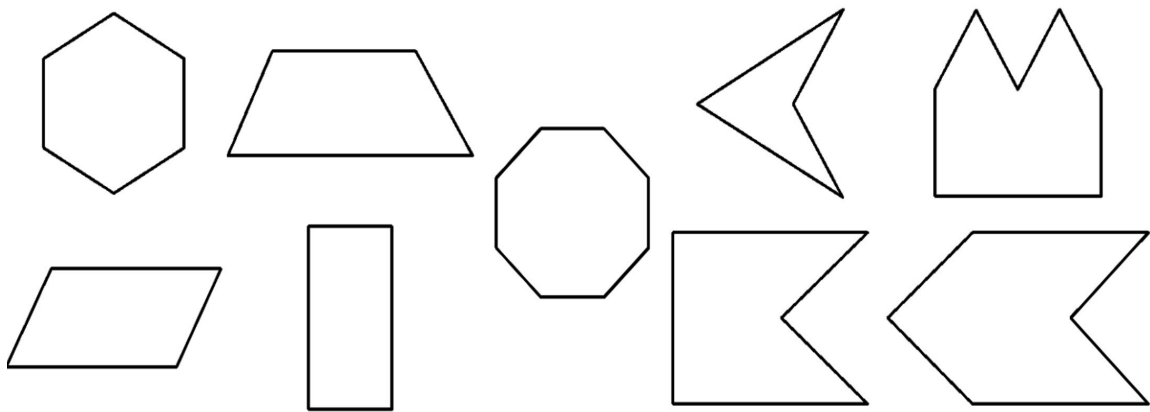


(4) Να δείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός κυρτού  $n$ -γώνου είναι  $n(n - 3)/2$ , για  $n \geq 4$ .

**Διαγώνιος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με μια μη-γειτονική κορυφή.

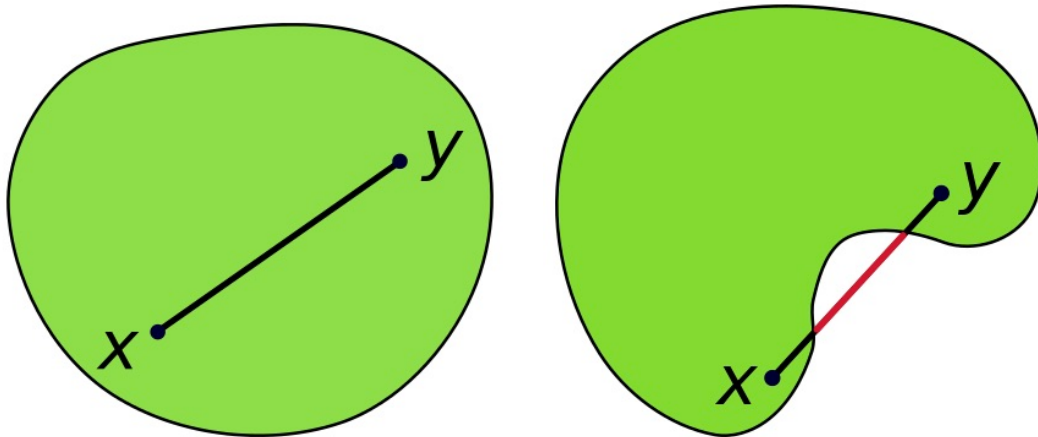
Ένα σχήμα (μια περιοχή) στο επίπεδο ή στον χώρο ονομάζεται **κυρτό** αν το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία του περιέχεται στο σχήμα.

Κάποια σχήματα

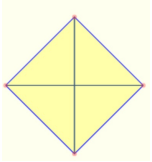
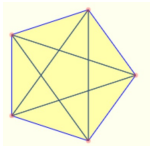
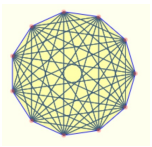
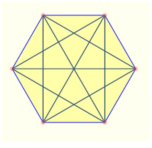
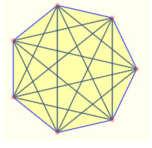
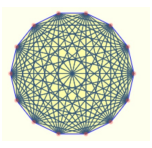
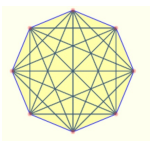
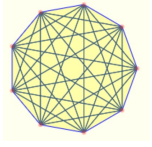
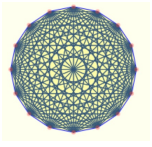


Τα πρώτα πέντε είναι κυρτά και τα άλλα τέσσερα δεν είναι

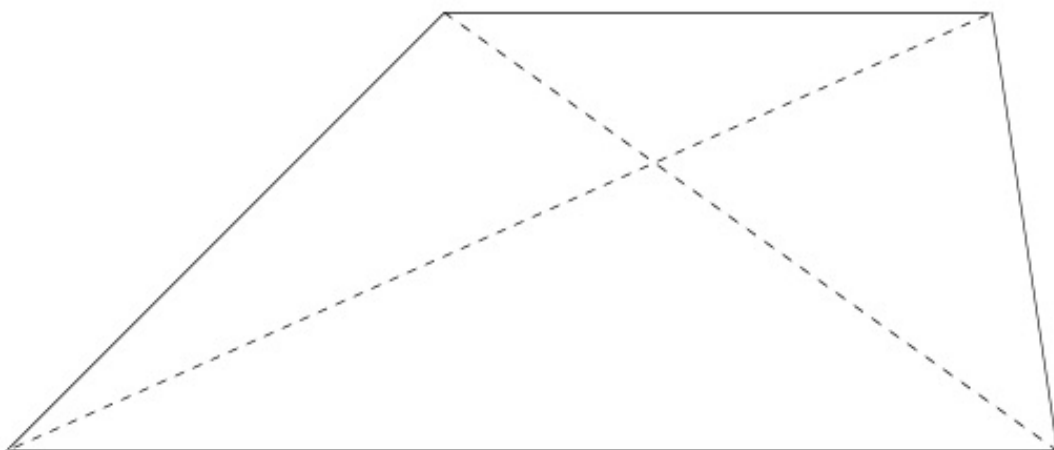
Και πιο παραστατικά:



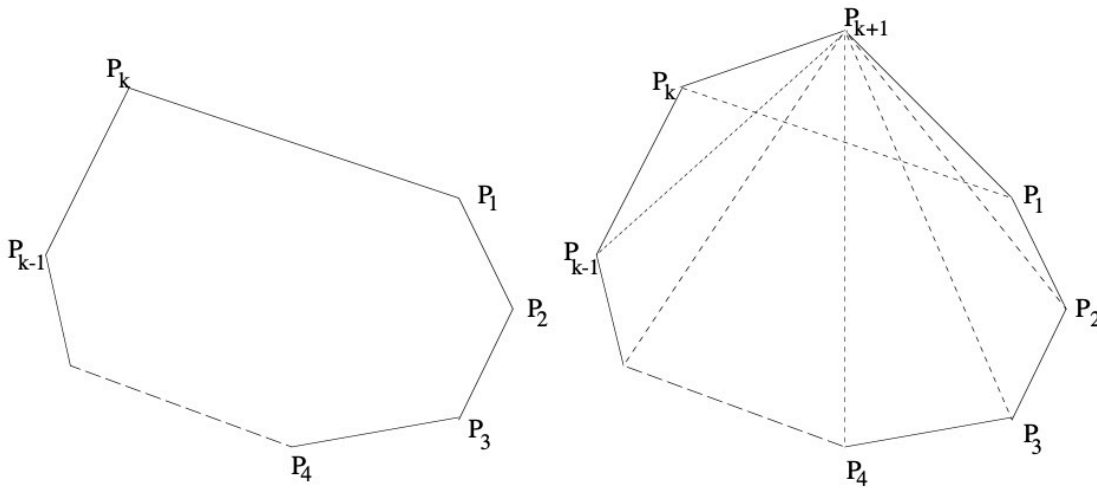
Πρώτα να δούμε κάποια παραδείγματα.

	2		5		44
	9		14		77
	20		27		104

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = 4$ . Τότε, έχουμε δυο διαγώνιους. Αλλά και  $4(4 - 3)/2 = 2$  και η πρόταση ισχύει.



Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = k \geq 4$ , δηλαδή υποθέτουμε ότι ένα κυρτό  $k$ -γώνο έχει  $k(k-3)/2$  διαγώνιους. Θα δείξουμε ότι ένα κυρτό  $(k+1)$ -γώνο έχει  $(k+1)(k-2)/2$  διαγώνιους.



Όταν προσθέσουμε μια ακόμη κορυφή σε ένα κυρτό  $k$ -γώνο, οι διαγώνιοι που είχαμε πριν παραμένουν. Από την υπόθεση έχουμε ήδη  $k(k-3)/2$  διαγώνιους.

Επίσης, έχουμε τις διαγώνιους από την κορυφή  $P_{k+1}$  στις όλες τις κορυφές, εκτός των γειτονικών,  $P_1$  και  $P_k$ , δηλαδή επιπλέον  $(k-2)$ -διαγώνιους. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το  $P_1$  με το  $P_k$ , που ήταν πλευρά, τώρα είναι διαγώνιος. Άρα ο αριθμός των διαγώνιων συνολικά είναι:

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k^2 - 3k}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$



(5) Δείξτε ότι  $n^2 \geq 2n + 1$ ,  $n \geq 3$ .

Παρατηρούμε ότι η αριστερή πλευρά είναι εκθετική ως προς το  $n$  και η δεξιά γραμμική. Σε γενικές γραμμές, εκθετικές συναρτήσεις είναι μεγαλύτερες των γραμμικών, για **μεγάλες τιμές** του  $n$ .

Παρατηρούμε ότι η υπόθεση  $n \geq 3$  είναι απαραίτητη:

$$n = 0 : 0 < 1.$$

$$n = 1 : 1 < 3.$$

$$n = 2 : 4 < 5.$$

Ελέγχουμε ότι η σχέση ισχύει για  $n = 3$ ,  $3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$ .

Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $n = k$ . Δηλαδή  $k^2 \geq 2k + 1$ , όπου  $k \geq 3$ .

Θα δείξουμε ότι  $(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$ . Ξεκινάμε αναλύοντας την αριστερή πλευρά της σχέσης:

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 2(k + 1) + 2k > 2(k + 1) + 1,$$

γιατί  $2k \geq 6 > 1$ .