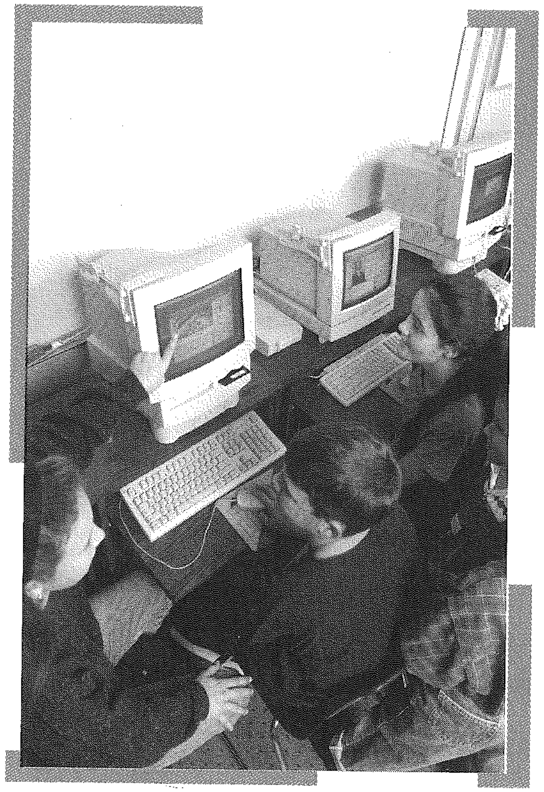
Ο Δημήτρης Καραγεώργος είναι μαθηματικός με διδακτορικές σπουδές στην Αγγλία. Υπηρέτησε τριάντα πέντε χρόνια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση ως καθηγητής, γυμνασιάρχης, λυκειάρχης, σχολικός σύμβουλος, μόνιμος πάρεδρος και σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.
Σήμερα διδάσκει ως επίκουρος καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών (τομέας Παιδαγωγικής του τμήματος Φ.Π.Ψ.) τα μαθήματα «Διδακτική των θετικών επιστημών» και «Μεθοδολογία έρευνας στις επιστήμες της αγωγής».
Στη μακρόχρονη εκπαιδευτική του θητεία δίδαξε το μάθημα των μαθηματικών σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και Λυκείου, ασχολήθηκε με τη σύνταξη αναλυτικών προγραμμάτων, τη συγγραφή διδακτικών εγχειριδίων, που διδάσκονται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, την παραγωγή υποστηρικτικού διδακτικού υλικού για τα μαθηματικά και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.
Έχει γράψει εννιά βιβλία μαθηματικών και έχει δημοσιεύσει σε ελληνικά και ξένα περιοδικά περισσότερες από πενήντα εργασίες που αναφέρονται στα προηγούμενα αντικείμενα και στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό.
Ένα από τα θέματα που τον απασχόλησαν την τελευταία εικοσαετία ήταν και η εκπαιδευτική έρευνα.
Ένα μέρος της προσπάθειάς του αυτής καταγράφεται σε αυτό το βιβλίο.

Δημήτρης Λ. Καραγεώργος

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ
Επιτ. ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ
στις επιστήμες της αγωγής

ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ



Σαββάλας
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

επιτρέπεται στον ερευνητή να λέει πόσο καλά πήγε το x άτομο συγκρινόμενο με όλα τα άλλα άτομα που πήραν το ίδιο τεστ.

Στα επόμενα θα δούμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μετατρέπουμε τις αρχικές τιμές σε ισοδύναμες άλλης κλίμακας, αλλά πριν μιλήσουμε γι' αυτό αναλυτικά, θα αναφέρουμε με συντομία τις κυριότερες κλίμακες μέτρησης που χρησιμοποιούνται στην έρευνα.

5.3 Κλίμακες μέτρησης

Οι κυριότερες κλίμακες μέτρησης που χρησιμοποιούνται στην έρευνα είναι οι εξής:

- **Η κατηγοριακή ή ονομαστική κλίμακα (nominal scale).**
- **Η διατακτική ή τακτική κλίμακα (ordinal scale).**
- **Η ισοδιαστημική κλίμακα (interval scale).**
- **Η αναλογική κλίμακα (ratio scale).**

Ας δούμε πώς ορίζεται καθεμία από αυτές.

Α. Η **κατηγοριακή** κλίμακα είναι ο απλούστερος τύπος μέτρησης που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι ερευνητές. Οι μετρήσεις εδώ δεν δείχνουν καμιά διάταξη. Ο ερευνητής αντιστοιχίζει (εκχωρεί) αριθμούς σε διαφορετικές κατηγορίες απλά για να δείχνει τις διαφορές. Για παράδειγμα, όταν ο ερευνητής έχει ως μεταβλητή το γένος, τότε αντιστοιχίζει τον αριθμό «1» στο θηλυκό και τον αριθμό «2» στο αρσενικό κι έτσι ταξινομεί τα άτομα του πληθυσμού σε δύο ομάδες. Αν ως μεταβλητή μελετά το είδος των Δευτεροβάθμιων σχολείων, τότε είναι δυνατό να αντιστοιχίσει τον αριθμό «1» στα Γυμνάσια, τον «2» στα Ενιαία Λύκεια, τον «3» στα Τ.Ε.Ε., τον «4» στα Εκκλησιαστικά Λύκεια κ.λπ. Αυτή η εκχώρηση αριθμών σε τιμές μιας μεταβλητής που μελετάμε έχει ένα μεγάλο πλεονέκτημα. Διευκολύνει την ανάλυση με τις νέες τεχνολογίες. Επαναλαμβάνουμε ότι οι αριθμοί που δίνονται και αντιπροσωπεύουν μια ομάδα (σύνολο ή υποσύνολο) παρατηρήσεων ή χαρακτηριστικών είναι απλώς ονόματα των κατηγοριών στις οποίες κατανεμήθηκαν οι παρατηρήσεις ή τα χαρακτηριστικά της.

Οι ιδιότητες που ισχύουν στην κατηγοριακή κλίμακα είναι οι εξής:

i) **Ανακλαστική:** Είναι $\alpha = \alpha$.
ii) **Συμμετρική:** Αν $\alpha = \beta$, τότε $\beta = \alpha$.
iii) **Μεταβατική:** Αν $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma$, τότε $\alpha = \gamma$.

Είναι φανερό ότι αν Α και Β είναι δύο σύνολα (κατηγορίες), που είναι υποσύνολα του συνόλου του πληθυσμού, της ονομαστικής κλίμακας, τότε:

α) Αν $\alpha \in A$, τότε $\alpha \notin B$ ($\in \equiv$ ανήκει και $\notin \equiv$ δεν ανήκει).
β) Αν $A = B$, τότε $B = A$.

Β. Η **διατακτική** ή **τακτική** κλίμακα είναι εκείνη στην οποία τα δεδομένα διατάσσονται με έναν τρόπο (π.χ. από το ανώτερο στο κατώτερο ή αντίστροφα) δηλαδή οι μετρήσεις που ανήκουν στην τακτική κλίμακα είναι εκείνες στις οποίες οι αριθμοί που τους δίνονται κατατάσσουν τα αντικείμενα σε μια σειρά. Για παράδειγμα, η διάταξη των μαθητών σύμφωνα με τον γενικό βαθμό τους είναι 1ος, 2ος, 3ος, ... Επισημαίνουμε εδώ ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών δεν είναι απαραίτητα η ίδια. Στην κατάταξη των μαθητών, για παράδειγμα, η διαφορά του 2ου από τον 1ο (1ος - 2ος) δεν είναι απαραίτητα ίση με τη διαφορά του 3ου από τον 2ο (2ος - 3ος), δηλαδή αν αφαιρέσουμε τη βαθμολογία του 2ου από του 1ου και του 3ου από του 2ου, οι διαφορές αυτές δεν είναι κατ' ανάγκη ίσες. Οι τακτικές κλίμακες δηλώνουν τη σχετική θέση μεταξύ των ατόμων. Οι αριθμοί στην τακτική κλίμακα δίνουν τις ίδιες πληροφορίες που δίνουν και οι αριθμοί της ονομαστικής κλίμακας και επιπλέον κατατάσσουν τα δεδομένα σύμφωνα με κάποια ιδιότητα που έχουν. Αν α, β και γ είναι αριθμοί της διατακτικής κλίμακας, τότε ισχύει μόνο η **μεταβατική** ιδιότητα: Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.

Γ. Η **ισοδιαστημική** κλίμακα έχει όλα τα χαρακτηριστικά της τακτικής κλίμακας με ένα επιπλέον χαρακτηριστικό: Οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων της κλίμακας είναι όλες ίσες. Για παράδειγμα, αν η βαθμολογία των μαθητών σ' ένα τεστ Μαθηματικών δίνεται στην εκατοντάβαθμη κλίμακα, τότε η απόσταση μεταξύ των βαθμών 70 και 80 θεωρείται η ίδια με την απόσταση μεταξύ των βαθμών 80 και 90. Να σημειωθεί ότι το μηδέν «0» σε μια ισοδιαστημική κλίμακα δεν σημαίνει ανυπαρξία αυτού το οποίο μετράμε. Για παράδειγμα, 0 °C στην κλίμακα θερμοκρασίας δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει θερμοκρασία. Συνήθως στις ισοδιαστημικές κλίμακες η μέτρηση αρχίζει από ένα αυθαίρετο μηδέν, όπως η έναρξη της μέτρησης της θερμοκρασίας στην κλίμακα Φαρενάιτ (Fahrenheit), δηλαδή το 0 °, αντιστοιχεί στους $-17{,}8$ ° της κλίμακας Κελσίου, ενώ το 0 °C ισοδυναμεί με τους 32 °F. Η ένδειξη κατά πόσο μια σειρά μετρήσεων ανήκει στην ισοδιαστημική κλίμακα είναι το αυθαίρετο μηδέν και η κοινή μονάδα μέτρησης. Η μονάδα αυτή έχει την ίδια ποσοτική ισχύ (ιδιότητα) σε οποιοδήποτε σημείο της κλίμακας (π.χ. ένας βαθμός στην κλίμακα Κελσίου παριστάνει την ίδια διαφορά μεταξύ 15 και 16 όπως και μεταξύ 25 και 26). Επειδή παρατηρούνται απορίες στην παραδοχή της ισοδυναμίας των διαστημάτων σε μια ισοδιαστημική κλίμακα, θα δώσουμε ένα ακόμη παράδειγμα.

Είναι η διαφορά μεταξύ ενός IQ 90 και ενός IQ 100 (10 μονάδες) η ίδια με τη διαφορά των IQ 50 και IQ 60 ή μεταξύ IQ 100 και IQ 110; Αν εμείς δεχόμαστε ότι τα αποτελέσματα των IQ μετρήσεων σχηματίζουν μια ισοδιαστημική κλίμακα, οφείλουμε να δεχθούμε ότι οι 10 μονάδες έχουν την ίδια σημασία σε διαφορετικά σημεία της κλίμακας. Οι πέντε πόντοι (5 cm) στο χάρακά μας είναι ισοδύναμοι είτε μετριούνται από 12 έως 17 είτε από 0 έως 5 είτε από 80 έως 85. Ασφαλώς στο τελευταίο παράδειγμα παραδεχόμαστε όλοι την ισοδυναμία των διαστημάτων, αλλά οφείλουμε να το πράξουμε και για την IQ κλίμακα και για όλες τις ισοδιαστημικές κλίμακες. Αυτό εξυπηρετεί την ανάλυση των δεδομένων και για χρόνια τώρα όλες οι έρευνες που γίνονται με αυτή την παραδοχή δίνουν αποτελέσματα που έχουν σημασία και έτσι το αποδέχονται όλοι οι μελετητές.

Αν α, β και γ είναι αριθμοί μιας ισοδιαστημικής κλίμακας, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) **Ανακλαστική:** Είναι $\alpha = \alpha$.
ii) **Συμμετρική:** Αν $\alpha = \beta$, τότε $\beta = \alpha$.
iii) **Μεταβατική:** Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.
iv) Για τους α και β θα ισχύει **μία** και **μόνο** από τις τρεις σχέσεις:

$$\alpha = \beta \quad \text{ή} \quad \alpha > \beta \quad \text{ή} \quad \alpha < \beta$$

v) Αν οι α, β και γ είναι διαδοχικοί αριθμοί της ισοδιαστημικής κλίμακας τότε θα είναι $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.

Δ. Η **αναλογική** κλίμακα έχει όλες τις ιδιότητες των τριών κλιμάκων που αναφέρθηκαν προηγουμένως και επιπλέον οι μετρήσεις έχουν ως αρχή μέτρησης το πραγματικό μηδέν. Για παράδειγμα, μια κλίμακα που σχεδιάστηκε να μετρά το ύψος είναι μια αναλογική κλίμακα γιατί το μηδέν σε αυτή υπάρχει, είναι πραγματικό και μας λέει ότι δεν υπάρχει ύψος. Σε αντίθεση με την ισοδιαστημική κλίμακα, οι μετρήσεις στην αναλογική κλίμακα αντιπροσωπεύουν το πραγματικό ποσό της ιδιότητας που μετράμε. Επειδή το μηδέν υπάρχει και είναι πραγματικό στην αναλογική κλίμακα, μπορούμε να εκτελέσουμε και όλες τις πράξεις με τις μονάδες της. Για παράδειγμα, $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$. Σε αυτή την κλίμακα υπάρχει η ευχέρεια να γίνει σύγκριση δύο τιμών με το να βρεθεί και ο λόγος τους. Για παράδειγμα, το βάρος του πατέρα που είναι 90 kg είναι τριπλάσιο από το βάρος της κόρης που είναι 30 kg, δηλαδή

$$\frac{\text{Βάρος πατέρα}}{\text{Βάρος κόρης}} = \frac{90}{30} = 3 \quad \text{ή} \quad \text{Βάρος πατέρα} = 3 \cdot (\text{Βάρος κόρης})$$

Αναλογικές κλίμακες, σχεδόν ποτέ, δεν αντιμετωπίζουμε στην εκπαιδευτική έρευνα, αφού σπανίως ερευνητές εμπλέκονται σε μετρήσεις που ενυπάρχει το πραγματικό μηδέν. Ακόμη και όταν ένας μαθητής βαθμολογείται με μηδέν σ' ένα τεστ, αυτό δεν σημαίνει ότι ο σπουδαστής αξιολογείται με μηδέν στο γνωστικό

αντικείμενο. Εφόσον ο μαθητής συμμετέχει στη διαδικασία δεν έχει πραγματικό νόημα το μηδέν. Μεταβλητές όπως η ηλικία, ο χρόνος κ.λπ. μετρούνται με αναλογικές κλίμακες.

Αν α, β και γ είναι αριθμοί στην αναλογική κλίμακα, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) **Ανακλαστική:** Είναι $\alpha = \alpha$.
ii) **Συμμετρική:** Αν $\alpha = \beta$, τότε $\beta = \alpha$.
iii) **Μεταβατική (στην ισότητα):** Αν $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma$, τότε $\alpha = \gamma$.
iv) **Μεταβατική (στην ανισότητα):** Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.
v) Μεταξύ των α και β ισχύει μία και μόνο μία από τις τρεις σχέσεις:

$$\alpha = \beta \quad \text{ή} \quad \alpha > \beta \quad \text{ή} \quad \alpha < \beta$$

vi) Αν $\alpha \cdot \beta = \gamma$ και $\beta \neq 0$, τότε $\alpha = \frac{\gamma}{\beta}$.
vii) Ισχύουν $\alpha + 0 = \alpha$ και $\alpha \cdot 0 = 0$.
viii) Αν οι α, β και γ είναι διαδοχικοί, τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.

Επισημαίνουμε ότι είναι βασικό να κατανοούμε τις διαφορές μεταξύ αυτών των τεσσάρων κλιμάκων μέτρησης και τους λόγους ύπαρξης της μεταξύ τους διάκρισης. Υπάρχουν δύο λόγοι. Πρώτον, η καθεμία κλίμακα μέτρησης μεταφέρει διαφορετικό ποσό πληροφοριών. Η αναλογική κλίμακα παρέχει περισσότερες πληροφορίες από την ισοδιαστημική κλίμακα, η ισοδιαστημική περισσότερες από την τακτική, κι αυτή περισσότερες από την ονομαστική. Έτσι οι ερευνητές, ανάλογα με το θέμα που μελετούν, πρέπει να χρησιμοποιήσουν την κατάλληλη κλίμακα ώστε να συγκεντρώσουν το μέγιστο ποσό πληροφοριών. Δεύτερον, μερικές στατιστικές διαδικασίες (αναλύσεις) δεν είναι κατάλληλες για όλες τις κλίμακες. Έτσι, αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια στατιστική μέθοδο ανάλυσης, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και την κλίμακα μέτρησης που ταιριάζει.

Είναι γνωστό ότι, πολλές φορές, ο τρόπος που είναι συγκεντρωμένα και οργανωμένα τα στοιχεία υποδεικνύει και τη χρησιμοποίηση συγκεκριμένης στατιστικής ανάλυσης. Αυτό άλλωστε το φροντίζει ο ίδιος ο ερευνητής όταν αυτός χρησιμοποιεί κάποιο μέσο συλλογής δεδομένων. Μόλις συγκεντρώσει τα δεδομένα τα σημειώνει (βαθμολογεί) και τα οργανώνει κατάλληλα για να διευκολύνει τη στατιστική ανάλυση. Είναι ευνόητο ότι τα συγκεντρωμένα δεδομένα πρέπει να σημειωθούν (χαρακτηριστούν, βαθμολογηθούν) με ακρίβεια και συνέπεια. Αν αυτό δεν γίνει, τότε κάθε συμπέρασμα που θα προκύπτει θα τίθεται «εν αμφιβόλω», γιατί μπορεί να μην οδηγεί προς τη σωστή κατεύθυνση. Κάθε υποκειμένου το τεστ, το ερωτηματολόγιο, η έκθεσή του πρέπει να χαρακτηριστεί με την ίδια διαδικασία (μέθοδο) και τα ίδια κριτήρια. Για πολλά τεστ, ερωτηματολόγια κ.λπ. υπάρχουν συγκεκριμένοι κώδικες χαρακτηρισμού. Πολλοί ερευνητές οι οποίοι κατασκευάζουν προσωπικά τεστ για την έρευνά τους σημειώνουν γραπτά τον τρόπο που θα διαχειριστούν και θα αξιολογήσουν το τεστ. Το σπουδαιότερο είναι η δειγματική εφαρμογή του τεστ σ' ένα δείγμα παρόμοιο με τον πληθυσμό στον οποίον θα δοθεί. Αν αυτό γίνει, μπορούν να εντοπιστούν προβλήματα και να επιλυθούν - διορθωθούν πριν γίνει η κανονική έρευνα. Η συγκέντρωση των δεδομένων, η καταγραφή τους σε ειδικούς πίνακες ή σε ειδικές κάρτες ή στον Η/Υ πρέπει να γίνεται με προσοχή και συστηματικό τρόπο.

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε μια περίληψη των τεσσάρων τύπων των κλιμάκων μέτρησης.

Χαρακτηριστικά των κλιμάκων μέτρησης

Κλίμακες μέτρησης	Χαρακτηριστικά	Παραδείγματα
Κατηγοριακή ή ονομαστική (Nominal)	Μέτρηση χωρίς διάταξη. Απλά δηλώνει ότι δύο ή περισσότερες κατηγορίες είναι διαφορετικές.	Κατηγορίες σχολείων Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Γυμνάσιο, Ενιαίο Λύκειο, Τ.Ε.Ε. κ.λπ.
Διατακτική ή τακτική (Ordinal)	Μέτρηση με διάταξη. Χρησιμοποιεί αριθμούς μόνο για να δηλώσει τη διάταξη.	Η κατάταξη των εργατών ανάλογα με τα ένσημα ασφάλισης. 1ος, 2ος, 3ος, 4ος, ...
Ισοδιαστημική (Interval)	Υποθέτει ότι οι διαφορές ίδιου μεγέθους μεταξύ αποτελεσμάτων πράγματι δηλώνουν ίσες αποστάσεις στην κλίμακα.	Τα αποτελέσματα των μαθητών σ' ένα τεστ που βαθμολογείται στην εκατοντάβαθμη κλίμακα.
Αναλογική (Ratio)	Περιλαμβάνει το μηδέν και σταθερή μονάδα, δηλαδή ό,τι έχουν οι άλλες κλίμακες με επιπλέον το μηδέν.	Η μέτρηση του ύψους.

Ένας άλλος τρόπος ταξινόμησης των κλιμάκων μέτρησης μεταβλητών είναι να τις χωρίσουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες: Στις **ποσοτικές** και τις **ποιοτικές**. Στις ποσοτικές (quantitative) ανήκουν οι μεταβλητές στις οποίες η μονάδα μέτρησης είναι σταθερή. Για παράδειγμα, όλες οι μεταβλητές που κατατάσσονται στην ισοδιαστημική και στην αναλογική κλίμακα ανήκουν στις ποσοτικές κλίμακες. Οι ποιοτικές (qualitative) κλίμακες περιλαμβάνουν όλες τις άλλες μεταβλητές, δηλαδή εκείνες που ανήκουν στην κατηγοριακή και διατακτική κλίμακα. Όπως προαναφέραμε, οι κλίμακες μέτρησης κατασκευάζονται από τους ερευνητές προκειμένου να βοηθηθούν να μετατρέψουν σε ποσά (σε αριθμούς) τις απαντήσεις που δίνονται, από τα άτομα της έρευνας, για μια μεταβλητή.

Μια κλίμακα που βοηθά να ποσοτικοποιήσουμε δεδομένα ερευνών είναι η **κλίμακα Likert**, η οποία έχει πέντε χαρακτηρισμούς, μεταξύ των οποίων οι αποστάσεις θεωρούνται ότι είναι ίσες. Κλίμακα Likert χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στο παράδειγμα ελέγχου των στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Μεταφέρω από εκείνο το ερωτηματολόγιο μία ερώτηση και τους πέντε χαρακτηρισμούς:

Θα μου χρειαστούν τα Μαθηματικά στη μελλοντική μου εργασία;

Διαφωνώ	Μάλλον διαφωνώ	Δεν είμαι βέβαιος	Μάλλον συμφωνώ	Συμφωνώ

Ο ερωτώμενος καλείται να απαντήσει σημειώνοντας ένα × ή + σ' έναν από τους πέντε χαρακτηρισμούς. Για τη στατιστική ανάλυση του ερωτηματολογίου γίνεται η αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών: 1, 2, 3, 4 και 5 στους χαρακτηρισμούς: Διαφωνώ, Μάλλον διαφωνώ, Δεν είμαι βέβαιος, Μάλλον συμφωνώ και Συμφωνώ αντίστοιχα. Είναι φανερό τώρα ότι εύκολα μπορούμε να προσθέσουμε όλες τις απαντήσεις σε κάθε χαρακτηρισμό και να πάρουμε τον μέσο όρο, ο οποίος μας δίνει και τη θέση του ερωτώμενου ως προς την έννοια που εξετάζεται.

Μια άλλη κλίμακα που βοηθά στην έρευνα και εύκολα αντιστοιχίζουμε λεκτικούς χαρακτηρισμούς σε φυσικούς αριθμούς είναι η κλίμακα **σημασιολογικής διαφοροποίησης** (semantic differential). Σε αυτή την κλίμακα ανάμεσα σε δύο χαρακτηρισμούς αντίθετους (π.χ. υπομονετικός - ανυπόμονος) παρεμβάλλεται ένα διάστημα με «κουτάκια» που αριθμούνται από το 1 μέχρι το 7. Έτσι, ανάλογα από το πόσο κοντά ή μακριά από τον κάθε χαρακτηρισμό βρίσκεται ο αριθμός που επιλέγει ο ερωτώμενος, φαίνεται η συμφωνία ή η διαφωνία του.

Για παράδειγμα, ο μαθητής x είναι:

Συνεπής	1	2	3	4	5	6	7	Ασυνεπής
Γρήγορος	1	2	3	4	5	6	7	Αργός
Οργανωτικός	1	2	3	4	5	6	7	Ανοργάνωτος
Υπομονετικός	1	2	3	4	5	6	7	Ανυπόμονος

5.4 Μετατροπή κλιμάκων μέτρησης

Στα επόμενα θα δούμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μετατρέπουμε τις αρχικές τιμές σε ισοδύναμες άλλης κλίμακας, ώστε να δίνουμε απαντήσεις και σε ερωτήματα που αφορούν αξιολόγηση ατομικών δεδομένων. Γενικά, ο σκοπός της μετατροπής κλιμάκων μέτρησης αποβλέπει στο να καθορίσει τη θέση ενός υποκειμένου μέσα σε μια κατανομή και έτσι να είναι δυνατή η σύγκριση των αρχικών τιμών μέσα στην ίδια κατανομή, αλλά και η σύγκριση τιμών που προέρχονται από δύο ή περισσότερες κατανομές συχνοτήτων. Οι νέες κλίμακες μέτρησης που μας επιτρέπουν τέτοιες συγκρίσεις ονομάζονται **δευτερογενείς κλίμακες μέτρησης**.

Οι πιο εύχρηστες δευτερογενείς κλίμακες μέτρησης είναι οι τακτικές τιμές, οι εκατοστιαίες τιμές και τα τυπικά πηλίκα (z - τιμές, T - τιμές, IQ - τιμές).

5.4.1 Τακτικές τιμές

Οι τακτικές τιμές, όπως είπαμε, μιας ομάδας μετρήσεων δείχνουν τη σειρά που κατέχει κάθε υποκείμενο μέσα στην ομάδα, δηλαδή ποιο είναι πρώτο, ποιο δεύτερο, ποιο τρίτο ... και ποιο τελευταίο στην ομάδα.

Η διαδικασία μετατροπής των αρχικών τιμών μιας κατανομής σε τακτικές τιμές είναι η ακόλουθη:

α) Διατάσσουμε τις αρχικές τιμές κατά τάξη μεγέθους από τη **μεγαλύτερη προς τη μικρότερη**, γράφοντάς τες στην πρώτη στήλη ενός πίνακα.

β) Στη δεύτερη στήλη του πίνακα γράφουμε τους φυσικούς αριθμούς από 1 έως ν (όπου ν το μέγεθος του δείγματος). Το 1 αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή και το ν στη μικρότερη τιμή. Αυτή η αντιστοιχία «1 - 1» των αρχικών τιμών με τους φυσικούς αριθμούς ονομάζεται **αρίθμηση**. Στην τρίτη στήλη γράφουμε τις τακτικές τιμές. Είναι φανερό ότι όταν έχουμε ισοβαθμίες, τότε όλοι οι ισοβαθμίσαντες σε μια τιμή παίρνουν την ίδια τακτική τιμή, η οποία θα είναι ο μέσος όρος της σειράς κατάταξής τους. Για παράδειγμα, έστω ότι ο 3ος, ο 4ος και ο 5ος μαθητής έχουν τον ίδιο βαθμό 18 στα Μαθηματικά. Τότε η τακτική τιμή καθενός θα είναι $\frac{3+4+5}{3} = 4$. Ενώ ο 8ος και ο 9ος μαθητής, που έχουν βαθμό 13, θα έχουν τακτική τιμή ο καθένας $\frac{8+9}{2} = 8{,}5$ (πίνακας 5.1).

Με τη μετατροπή των αρχικών τιμών μιας κατανομής σε τακτικές τιμές κατανοούμε καλύτερα τη σημασία κάθε αρχικής τιμής. Για παράδειγμα, άλλη σημασία έχει να πούμε ότι ο μαθητής πήρε 15 στα Μαθηματικά και άλλη ότι είναι 6ος στην τάξη του στο μάθημα των Μαθηματικών, όπως και άλλο νόημα έχει να πούμε ότι πήρε 12 στα Μαθηματικά και άλλο ότι είναι 10ος, δηλαδή τελευταίος, στην τάξη του.

Πίνακας 5.1

Μετατροπή των αρχικών τιμών (βαθμών), στο μάθημα των Μαθηματικών, των 10 μαθητών της Γ' τάξης του Γυμνασίου σε τακτικές τιμές, εκατοστιαίες τιμές, z - τιμές, T - τιμές και IQ - τιμές.

Αρχικές τιμές σε σειρά μεγέθους	Αρίθμηση	Τακτικές τιμές	Εκατοστιαίες τιμές		Τυπικά πηλίκα		
			$100 - \frac{100}{\nu}$	Εκατοστιαία τιμή	$z = \frac{x - \bar{x}}{S}$ τιμή	T = 10z+50 τιμή	IQ = = 15z+100 τιμή
20	1	1	100	100	1,45	64,5	121,75
19	2	2	90	90	1,09	60,9	116,35
18	3	4	80	80	0,72	57,2	110,80
18	4	4	70	80	0,72	57,2	110,80
18	5	4	60	80	0,72	57,2	110,80
15	6	6	50	50	− 0,36	46,4	94,60
14	7	7	40	40	− 0,72	42,8	89,20
13	8	8,5	30	30	− 1,09	39,1	83,65
13	9	8,5	20	30	− 1,09	39,1	83,65
12	10	10	10	10	− 1,45	35,5	78,25

Οι τακτικές τιμές, παρά τα πλεονεκτήματά τους, έχουν και δύο μειονεκτήματα:

α) Μεταβάλλονται οι διαφορές που παρατηρούνται μεταξύ των αρχικών τιμών. Για παράδειγμα, ενώ μεταξύ του 5ου και του 6ου μαθητή παρατηρείται διαφορά αρχικών τιμών $18 - 15 = 3$ μονάδες, στην κλίμακα των τακτικών τιμών έχουμε διαφορά $6 - 4 = 2$ μονάδες.

β) Οι τακτικές τιμές που προέρχονται από ανισομεγέθεις ομάδες δεν έχουν το ίδιο νόημα. Έτσι δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο πρώτος στους 10 μαθητές του παραπάνω πίνακα είναι της ίδιας στάθμης με τον πρώτο μαθητή μιας ομάδας 100 μαθητών. Για τέτοιες συγκρίσεις θα χρησιμοποιούμε τις εκατοστιαίες τιμές.

5.4.2 Εκατοστιαίες τιμές

Οι εκατοστιαίες τιμές δείχνουν την τακτική σειρά - θέση που κατέχει κάθε άτομο (υποκείμενο) σε μια ομάδα με σταθερό μέγεθος 100. Η τακτική αυτή σειρά καθορίζεται με βάση το ποσοστό % των ατόμων που έχουν ίση ή χαμηλότερη τιμή (π.χ. βαθμολογία) από την αρχική τιμή. Αν, για παράδειγμα, μια αρχική τιμή x έχει εκατοστιαία τιμή 30, αυτό σημαίνει ότι 30% των αρχικών τιμών είναι ίσες ή μικρότερες από την τιμή x.

Η μετατροπή των αρχικών τιμών σε εκατοστιαίες τιμές μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1ος τρόπος

α) Ταξινομούμε τις αρχικές τιμές σε σειρά μεγέθους από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη. β) Στη μεγαλύτερη αρχική τιμή αντιστοιχίζουμε την εκατοστιαία τιμή 100 και στη μικρότερη αρχική τιμή αντιστοιχίζουμε την εκατοστιαία τιμή $\frac{100}{\nu}$, όπου ν το πλήθος του δείγματος (των ατόμων). γ) Για να βρούμε τις εκατοστιαίες τιμές που αντιστοιχούν στις ενδιάμεσες τακτικές τιμές, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη εκατοστιαία τιμή (δηλαδή το 100) διαδοχικά τον αριθμό $\frac{100}{\nu}$ ή προσθέτουμε διαδοχικά στη μικρότερη εκατοστιαία τιμή $\left(\text{δηλαδή στο } \frac{100}{\nu}\right)$ τον αριθμό $\frac{100}{\nu}$.

2ος τρόπος

α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα των συχνοτήτων, των σχετικών συχνοτήτων και των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. β) Στρογγυλοποιούμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό. Οι ακέραιοι αυτοί αριθμοί είναι οι ζητούμενες εκατοστιαίες τιμές των αντίστοιχων αρχικών τιμών.

Έχοντας στη διάθεσή μας τις εκατοστιαίες τιμές του μαθητή στις διάφορες μεταβλητές, μπορούμε εύκολα να αξιολογήσουμε την επίδοσή του τόσο σε καθεμία μεταβλητή χωριστά όσο και στις διάφορες μεταβλητές συγκριτικά μεταξύ τους.

Στον προηγούμενο πίνακα (πίνακας 5.1) και στις στήλες 4η και 5η δίνουμε τις εκατοστιαίες τιμές που αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές της 1ης στήλης.

Έτσι, στη μεγαλύτερη τιμή 20 αντιστοιχίζουμε την εκατοστιαία τιμή 100 και στη μικρότερη τιμή 12 την εκατοστιαία τιμή 10 $\left(\frac{100}{\nu} = \frac{100}{10} = 10\right)$. Στη δεύτερη τιμή 19 αντιστοιχίζουμε την εκατοστιαία τιμή 90 $\left(100 - \frac{100}{\nu} = 100 - 10 = 90\right)$ κ.λπ.

Στη στήλη των αρχικών τιμών του πίνακα 5.1 παρατηρούμε ότι τρεις μαθητές έχουν βαθμό 18 (ισοβαθμούν) και δύο μαθητές έχουν 13. Εύλογα γεννιέται το ερώτημα: Ποιες εκατοστιαίες τιμές θα πάρουν οι μαθητές που ισοβαθμούν; Σαφώς όλοι οι μαθητές θα πάρουν ως εκατοστιαία τιμή τη μεγαλύτερη εκατοστιαία τιμή των ισοβαθμούντων και **όχι** τον μέσο όρο των εκατοστιαίων τιμών, όπως έγινε με τις τακτικές τιμές. Το τονίζουμε αυτό με έμφαση, γιατί πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον μέσο όρο, που είναι λάθος (μαθηματικό).

Αυτό φαίνεται καθαρά αν θυμηθούμε τι σημαίνει η εκατοστιαία τιμή 40 της

αρχικής τιμής 14. Αυτή σημαίνει ότι 40% των μαθητών της ομάδας των 10 που εξετάζουμε πήραν βαθμό ίσο με 14 ή χαμηλότερο. Έτσι, αν βάζαμε σε όλους τους ισοβαθμίσαντες με 18 εκατοστιαία τιμή 70 $\left(\frac{80+70+60}{3} = 70\right)$, τότε ο 3ος μαθητής, που έχει 18, θα είχε εκατοστιαία τιμή 70, δηλαδή 70% των μαθητών της ομάδας θα είχαν βαθμολογία 18 ή χαμηλότερη, δηλαδή $70\% \cdot 10 = 7$ μαθητές. Αυτό είναι λάθος, αφού οι μαθητές που έχουν βαθμολογία 18 ή χαμηλότερη είναι 8.

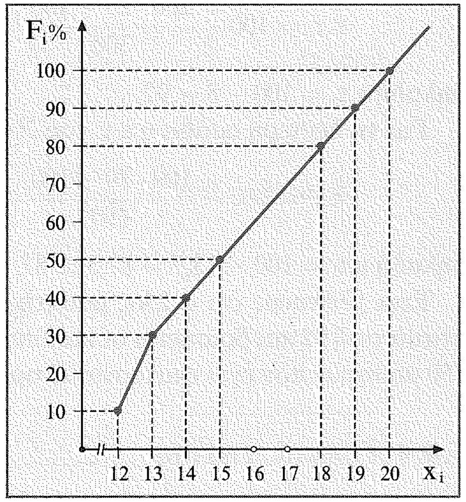
Με τις εκατοστιαίες τιμές, όπως και με τις τακτικές τιμές, γίνεται σαφέστερη η σημασία κάθε αρχικής τιμής της κατανομής, **αφού με την εκατοστιαία τιμή μιας αρχικής τιμής x καθορίζεται το ποσοστό των τιμών που είναι ίσες ή μικρότερες της x. Αυτό είναι σημαντικό πλεονέκτημα.**

Ως μειονέκτημα των εκατοστιαίων τιμών μπορούμε να θεωρήσουμε το ότι οι αποστάσεις μεταξύ τους δεν είναι ίσες σε όλο το μήκος της κλίμακας, κάτι που δυσχεραίνει τον αλγεβρικό λογισμό. Για παράδειγμα, ενώ στις αρχικές τιμές οι διαφορές $18 - 15$ και $15 - 12$ είναι ίσες, οι αντίστοιχες εκατοστιαίες διαφορές $80 - 50$ και $50 - 10$ είναι άνισες. Δηλαδή, ίσες διαφορές στις αρχικές τιμές δεν αντιστοιχούν σε ίσες διαφορές στις αντίστοιχες εκατοστιαίες τιμές. Το μειονέκτημα αυτό δεν το έχουν οι z-τιμές που θα δούμε παρακάτω.

Είπαμε προηγουμένως ότι ένας δεύτερος τρόπος για να βρούμε τις εκατοστιαίες τιμές των αρχικών τιμών είναι με τον πίνακα **των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ή με το αντίστοιχο διάγραμμά τους**. Ας το δούμε αυτό για τις τιμές του πίνακα 5.1. Κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Πίνακας 5.2: *Συχνότητες και αθροιστικές σχετικές συχνότητες της μεταβλητής X του πίνακα 5.1.*

Αρχικές τιμές (x_i)	Συχνότητα (ν_i)	Σχετική συχνότητα (f_i%)	Αθρ. σχετ. συχνότητα (F_i%)
12	1	10	10
13	2	20	30
14	1	10	40
15	1	10	50
18	3	30	80
19	1	10	90
20	1	10	100
Σύνολο	**10**	**100**	



Σχ. 5.1

Είναι φανερό ότι η αθροιστική σχετική συχνότητα μιας αρχικής τιμής μας δίνει και την εκατοστιαία της τιμή. Αν έχουμε το διάγραμμα (πολύγωνο) των αθροιστικών συχνοτήτων, τότε πάλι μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη εκατοστιαία τιμή μιας αρχικής τιμής, αφού συμπίπτει με την αθροιστική σχετική συχνότητα της τιμής.

5.4.3 Μετατροπή τακτικών τιμών σε εκατοστιαίες τιμές (ε.τ.)

Οι εκατοστιαίες τιμές, σε αντίθεση με τις τακτικές, είναι ανεξάρτητες από το μέγεθος του δείγματος, αφού ανάγονται στο σταθερό δείγμα με μέγεθος 100, και γι' αυτό μας δίνουν τη δυνατότητα να τις χρησιμοποιούμε για να συγκρίνουμε τιμές οι οποίες μπορούν να ανήκουν και σε ανισοπληθείς ομάδες.

Για παράδειγμα, έστω ότι καλούμαστε να απαντήσουμε στο ερώτημα: Ποιος μαθητής βρίσκεται σε ανώτερη τακτική θέση, ο 25ος σε μια ομάδα 300 ατόμων ή ο 20ός σε μια ομάδα 150 ατόμων; Οι απευθείας απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα είναι δύσκολες, γι' αυτό μετατρέπουμε τις τακτικές τιμές σε εκατοστιαίες τιμές.

Ο τύπος που μετατρέπει τις τακτικές τιμές σε εκατοστιαίες τιμές είναι

$$\text{ε.τ.} = 100 - (\text{Τ.Τ.} - 1)\cdot\frac{100}{\text{N}} = 100 - \frac{100(\text{Τ.Τ.}) - 100}{\text{N}}$$

όπου Τ.Τ. η τακτική τιμή, ε.τ. η αντίστοιχη εκατοστιαία τιμή και N το πλήθος των ατόμων της ομάδας.

Στο παράδειγμά μας θα έχουμε:

Για την πρώτη ομάδα η ε.τ. του 25ου θα είναι

$$\text{ε.τ.} = 100 - \frac{100\cdot 25 - 100}{300} = 100 - \frac{2500 - 100}{300} = 100 - \frac{2400}{300}$$

δηλαδή ε.τ. = 100 − 8 = 92.

Για τη δεύτερη ομάδα η ε.τ. του 20ού θα είναι

$$\text{ε.τ.} = 100 - \frac{100\cdot 20 - 100}{150} = 100 - \frac{2000 - 100}{150} = 100 - \frac{1900}{150}$$

δηλαδή ε.τ. = 100 − 12,7 = 87,3 $\simeq$ 87.

Έτσι βλέπουμε ότι ο 25ος μαθητής στην ομάδα των 300 μαθητών έχει εκατοστιαία τιμή 92 και βρίσκεται σε καλύτερη θέση από τον 20ό μαθητή της ομάδας των 150 μαθητών που έχει εκατοστιαία τιμή 87.

5.4.4 Τυπικά πηλίκα

Τα τυπικά πηλίκα καθορίζουν τη θέση κάθε αρχικής τιμής της ομάδας σε σχέση με τη μέση τιμή όλων των τιμών της ομάδας. Δηλαδή δείχνουν την απόκλιση της

αρχικής τιμής x από τη μέση τιμή $\overline{x}$ σε μονάδες της τυπικής απόκλισης S των αρχικών τιμών.

- *z - τιμές*

Αν x_i είναι μια αρχική τιμή μιας μεταβλητής X, $\overline{x}$ είναι η μέση τιμή των τιμών της X και S η τυπική απόκλιση των τιμών της X, τότε τη διαφορά $x_i - \overline{x}$ τη λέμε **απόκλιση** της τιμής x_i από τη μέση τιμή $\overline{x}$ και το πηλίκο $\frac{x_i - \overline{x}}{S}$ το λέμε z - τιμή της αρχικής τιμής x_i και γράφουμε:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S}$$

Γενικά, η z - τιμή μιας αρχικής τιμής x που ανήκει στο σύνολο τιμών μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση S είναι

$$z = \frac{x - \overline{x}}{S} \quad \text{ή} \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

όταν αναφερόμαστε σε όλον τον πληθυσμό και όχι σε δείγμα.

Έστω ότι η μεταβλητή X παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, η μέση τιμή των τιμών της είναι $\overline{x}$ και η τυπική απόκλιση S. Τότε οι αντίστοιχες z - τιμές των τιμών της είναι:

$$z_1 = \frac{x_1 - \overline{x}}{S}, \quad z_2 = \frac{x_2 - \overline{x}}{S}, \quad z_3 = \frac{x_3 - \overline{x}}{S}, \quad \ldots, \quad z_\nu = \frac{x_\nu - \overline{x}}{S}$$

Η μέση τιμή αυτών των z - τιμών θα είναι

$$\overline{z} = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}{\nu} = \frac{\frac{x_1 - \overline{x}}{S} + \frac{x_2 - \overline{x}}{S} + \ldots + \frac{x_\nu - \overline{x}}{S}}{\nu}, \quad \text{δηλαδή}$$

$$\overline{z} = \frac{\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) - \nu\cdot\overline{x}}{S}}{\frac{\nu}{1}} = \frac{\nu\cdot\overline{x} - \nu\cdot\overline{x}}{\nu\cdot S} = 0, \quad \text{δηλαδή}$$

$$\overline{z} = 0$$

Η τυπική απόκλιση των z - τιμών θα είναι

$$S_z = \sqrt{\frac{(z_1 - \overline{z})^2 + (z_2 - \overline{z})^2 + \ldots + (z_\nu - \overline{z})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_\nu^2}{\nu}}$$

δηλαδή

$$S_z = \sqrt{\frac{\left(\frac{x_1-\bar{x}}{S}\right)^2+\left(\frac{x_2-\bar{x}}{S}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_\nu-\bar{x}}{S}\right)^2}{\nu}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(x_1-\bar{x})^2}{S^2}+\frac{(x_2-\bar{x})^2}{S^2}+\ldots+\frac{(x_\nu-\bar{x})^2}{S^2}}{\nu}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_\nu-\bar{x})^2}{S^2}}{\frac{\nu}{1}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_\nu-\bar{x})^2}{S^2\cdot\nu}}$$

άρα

$$S_z = \sqrt{\frac{1}{S^2}\cdot\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{1}{S^2}\cdot S^2} = \sqrt{1} = 1$$

δηλαδή

$$S_z = 1$$

Παρατηρούμε ότι οι z-τιμές έχουν μέσο όρο 0 και τυπική απόκλιση 1.

Για να μετατρέψουμε λοιπόν τις αρχικές τιμές μιας μεταβλητής X σε z-τιμές, υπολογίζουμε τον $\bar{x}$ και την S των τιμών της X και έπειτα σχηματίζουμε τα πηλίκα $\frac{x_i-\bar{x}}{S}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Για παράδειγμα, στον πίνακα 5.1 ο μέσος όρος της βαθμολογίας των 10 μαθητών στα Μαθηματικά είναι

$$\bar{x} = \frac{12\cdot1+13\cdot2+14\cdot1+15\cdot1+18\cdot3+19\cdot1+20\cdot1}{10} = \frac{160}{10} = 16$$

και η τυπική απόκλιση

$$S=\sqrt{\frac{1\cdot(12-16)^2+2\cdot(13-16)^2+1\cdot(14-16)^2+1\cdot(15-16)^2+3\cdot(18-16)^2+1\cdot(19-16)^2+1\cdot(20-16)^2}{10}}$$

και μετά από πράξεις

$$S = \sqrt{\frac{76}{10}} = \sqrt{7{,}6} \simeq 2{,}76$$

Επομένως οι αντίστοιχες z-τιμές της βαθμολογίας θα είναι:

$$z_1 = \frac{12-16}{2{,}76} = \frac{-4}{2{,}76} \simeq -1{,}45$$

$$z_2 = \frac{13-16}{2{,}76} = \frac{-3}{2{,}76} \simeq -1{,}09, \quad \ldots, \quad z_6 = \frac{19-16}{2{,}76} \simeq 1{,}09, \quad \ldots$$

Όλες οι z-τιμές φαίνονται στον ίδιο πίνακα.

Είναι φανερό ότι οι αρχικές τιμές που είναι μικρότερες του μέσου όρου έχουν αρνητικές z-τιμές, ενώ οι αρχικές τιμές που είναι μεγαλύτερες του μέσου όρου έχουν θετικές z-τιμές.

Τι μας λένε όμως οι z-τιμές για μια κατανομή και θεωρούνται σημαντικές; Η z-τιμή $-1{,}45$ δηλώνει ότι η πραγματική τιμή 12 είναι 1,45 τυπικές αποκλίσεις μικρότερη του μέσου όρου της κατανομής, ενώ η z-τιμή $+1{,}45$ μας λέει ότι η πραγματική τιμή 20 είναι 1,45 τυπικές αποκλίσεις μεγαλύτερη του μέσου όρου.

Έτσι μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε δύο αρχικές τιμές οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικές κατανομές. Για παράδειγμα, έστω ότι ένας μαθητής πήρε βαθμό 16 στα Μαθηματικά και 14 στην Έκθεση. Σε ποιο μάθημα είναι καλύτερος ο μαθητής; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα πρέπει να γνωρίζουμε τα στοιχεία των κατανομών της βαθμολογίας στα Μαθηματικά και της βαθμολογίας στην Έκθεση, δηλαδή τις μέσες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις. Αν για τα Μαθηματικά η βαθμολογία του τμήματος του μαθητή έχει $\bar{x} = 15$ και $S = 2$, ενώ για την Έκθεση έχει $\bar{x} = 12$ και $S = 2$, τότε οι z-τιμές της βαθμολογίας του μαθητή είναι:

α) Για τα Μαθηματικά: $z = \frac{16-15}{2} = \frac{1}{2} = +0{,}5.$

β) Για την Έκθεση: $z = \frac{14-12}{2} = \frac{2}{2} = +1{,}0.$

Δηλαδή ο μαθητής αυτός είναι καλύτερος στην Έκθεση απ' ό,τι στα Μαθηματικά.

Από το απλό αυτό παράδειγμα φαίνεται η χρησιμότητα των z-τιμών όταν θέλουμε να αποφανθούμε για την επίδοση του μαθητή στα διάφορα μαθήματά του ή και να συγκρίνουμε τις επιδόσεις διαφορετικών μαθητών.

Η κατανομή των z-τιμών έχει μερικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων κλιμάκων μέτρησης.

Για παράδειγμα, η μονάδα μέτρησης στις z-τιμές είναι σταθερή καθόλο το μήκος της κλίμακας και έτσι ίσες διαφορές αρχικών τιμών αντιστοιχούν σε ίσες διαφορές z-τιμών, κάτι που δεν ισχύει στις εκατοστιαίες τιμές, όπως ήδη είπαμε. Αυτή η ιδιότητα των ίσων διαστημάτων επιτρέπει την εκτέλεση κάθε είδους αλγεβρικού λογισμού με τις z-τιμές. Έτσι μπορούμε να αθροίσουμε τις z-τιμές της επίδοσης ενός μαθητή σε διαφορετικά τεστ και να υπολογίσουμε έναν γενικό μέσο βαθμό επίδοσης. Για παράδειγμα, αν η z-τιμή της βαθμολογίας του μαθητή στα Μαθηματικά είναι $+1{,}25$ και στην Έκθεση $-1{,}10$, τότε ο γενικός μέσος βαθμός σε z-τιμές στα δύο αυτά μαθήματα θα είναι $\frac{+1{,}25+(-1{,}10)}{2}=\frac{+0{,}15}{2}=+0{,}07$, δηλαδή ο μαθητής αυτός βρίσκεται 0,07 τυπικές αποκλίσεις άνω του μέσου όρου, όταν οι βαθμοί στα δύο μαθήματα λαμβάνονται ως ένας βαθμός. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για έναν άλλο μαθητή και να συγκρίνουμε την επίδοση των δύο αυτών μαθητών.

Ακόμη, το σχήμα της κατανομής των z-τιμών είναι όμοιο με το σχήμα της κατανομής των αρχικών τιμών, δηλαδή η όποια συμμετρία ή ασυμμετρία της κατανομής των αρχικών τιμών δεν μεταβάλλεται με τη μετατροπή τους σε z-τιμές. Αυτό σημαίνει ότι αν η αρχική κατανομή είναι κανονική, τότε και η κατανομή των z-τιμών θα είναι κανονική.

Ένα άλλο μεγάλο πλεονέκτημα των z-τιμών είναι ότι μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την αντίστοιχη εκατοστιαία τιμή με βάση τις αναλογίες της κανονικής κατανομής του Gauss.

Όπως γνωρίζουμε, στο διάστημα $(\bar{x}-S, \bar{x}+S)$ περιλαμβάνεται το 68,3% των δεδομένων όταν η κατανομή είναι κανονική, στο $(\bar{x}-2S, \bar{x}+2S)$ περιλαμβάνεται περίπου το 95,4% των δεδομένων και στο $(\bar{x}-3S, \bar{x}+3S)$ περιλαμβάνεται το 99,7% των δεδομένων. Έτσι η z-τιμή 0 αντιστοιχεί σε εκατοστιαία τιμή 50 όταν η κατανομή είναι κανονική, η z-τιμή $+1{,}00$ αντιστοιχεί σε εκατοστιαία τιμή 84, η z-τιμή $-1{,}00$ αντιστοιχεί σε εκατοστιαία τιμή $50-34=16$ κ.λπ. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάστηκαν πίνακες που αντιστοιχούν τις z-τιμές στις εκατοστιαίες τιμές και αντιστρόφως. Δηλαδή σε μια κανονική κατανομή, όταν γνωρίζουμε τη z-τιμή μιας αρχικής τιμής, γνωρίζουμε, κατά προσέγγιση, ταυτόχρονα και την εκατοστιαία της τιμή.

Από τον τύπο $z=\frac{x-\bar{x}}{S}$ μπορούμε να υπολογίσουμε και την αρχική τιμή x όταν γνωρίζουμε τη z-τιμή αυτής. Έχουμε διαδοχικά:

$$z\cdot S=x-\bar{x}\Leftrightarrow z\cdot S+\bar{x}=x$$

δηλαδή

$$x=z\cdot S+\bar{x} \quad \text{ή} \quad x=z\cdot\sigma+\mu$$

Για παράδειγμα, αν η z-τιμή μιας τιμής x είναι $z=+1{,}25$ και η τιμή αυτή ανήκει σε κατανομή με $\bar{x}=60$ και $S=10$, τότε η πραγματική τιμή x είναι

$$x=1{,}25\cdot 10+60=12{,}5+60=72{,}5$$

Αν τώρα γνωρίζουμε την εκατοστιαία τιμή μιας αρχικής τιμής x, τότε πάλι μπορούμε να βρούμε την αρχική τιμή x. Βρίσκουμε από τους πίνακες σε ποια z-τιμή αντιστοιχεί η δοθείσα εκατοστιαία τιμή και από τη z-τιμή βρίσκουμε την αρχική τιμή.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική τιμή της εκατοστιαίας τιμής 80 σε μια κατανομή, τότε από τον πίνακα βρίσκουμε ότι στην εκατοστιαία τιμή 80 (80,23 για την ακρίβεια) αντιστοιχεί η z-τιμή 0,85. Τότε η αρχική τιμή θα είναι

$$x=0{,}85\cdot 10+60=8{,}5+60=68{,}5$$

Αναφερόμαστε στην προηγούμενη κατανομή με $\bar{x}=60$ και $S=10$.

Συμπερασματικά

1. Κάθε τιμή x μπορεί να μετασχηματιστεί σε z-τιμή η οποία καθορίζει με ακρίβεια τη θέση της x μέσα στην κατανομή. Το πρόσημο της z-τιμής φανερώνει αν η θέση της x είναι πάνω ή κάτω από τον μέσο όρο της κατανομής. Η απόλυτη τιμή της z-τιμής καθορίζει τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων που απέχει η x από τη $\bar{x}$.
2. Ο τύπος που μετασχηματίζει τη x σε z-τιμή είναι $z=\frac{x-\bar{x}}{S}$ (1) ή $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$.
3. Για να μετασχηματίσουμε z-τιμές πίσω στις x-τιμές, λύνουμε τον τύπο (1) ως προς x, δηλαδή $x=\bar{x}+z\cdot S$ (2).
4. Όταν όλη η κατανομή των x-τιμών μετασχηματίζεται σε z-τιμές, το αποτέλεσμα είναι μια κατανομή z-τιμών. Η κατανομή των z-τιμών θα έχει το ίδιο σχήμα με την αρχική κατανομή των x-τιμών και θα έχει πάντοτε $\mu=0$ και $\sigma=1$ (ή $\bar{x}=0$ και $S=1$).
5. Όταν συγκρίνουμε πραγματικές τιμές από διαφορετικές κατανομές, είναι απαραίτητο να κανονικοποιούμε τις κατανομές με μετασχηματισμό z-τιμών. Οι κατανομές τότε θα είναι συγκρίσιμες, γιατί θα έχουν τον ίδιο $\mu=0$ και $\sigma==1$, δηλαδή τις ίδιες παραμέτρους. Στην πράξη μετασχηματίζουμε μόνο εκείνες τις τιμές που θέλουμε να συγκρίνουμε.
6. Σε πολλές περιπτώσεις οι z-τιμές μετατρέπονται σε κανονικοποιημένες κατανομές που έχουν καθορισμένες παραμέτρους $\mu_{\text{νέα}}$ και $\sigma_{\text{νέα}}$. Τότε έχουμε:

$$x_{\text{καν.}}=\mu_{\text{νέα}}+z\cdot\sigma_{\text{νέα}} \qquad (3)$$

Προσοχή! Το z στον τύπο (3) είναι το z που βρήκαμε στον τύπο (1) για την πραγματική τιμή x, η οποία γίνεται πλέον $x_{καν.}$ στην κανονικοποιημένη κατανομή.

- *T - τιμές και IQ - τιμές.*

Οι z - τιμές, παρά τα πολλά πλεονεκτήματα που έχουν, έχουν και ένα σοβαρό μειονέκτημα. Όλες σχεδόν οι τιμές είναι δεκαδικοί αριθμοί και αλγεβρικοί (αρνητικοί ή θετικοί). Έτσι, αν πούμε σε κάποιον ότι η z - τιμή της βαθμολογίας ενός μαθητή στα Μαθηματικά είναι – 0,34, το μόνο που θα αντιληφθεί είναι κάτι άσχημο (μικρός αριθμός, αρνητικό πρόσημο κ.λπ.). Γι' αυτό πολλές φορές μετατρέπουμε τις z - τιμές σε άλλες ισοδύναμες κλίμακες, που έχουν ακέραιους και θετικούς αριθμούς.

Τέτοιες κλίμακες είναι οι T - τιμές και οι IQ - τιμές. Οι T - τιμές έχουν μέσο όρο 50 και τυπική απόκλιση 10, ενώ οι IQ - τιμές έχουν μέσο όρο 100 και τυπική απόκλιση 15.

Οι T - τιμές προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις z - τιμές επί 10 και προσθέσουμε 50, δηλαδή:

$$T = 10 \cdot z + 50$$

ενώ οι IQ - τιμές προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις z - τιμές επί 15 και προσθέσουμε 100, δηλαδή:

$$IQ = 15 \cdot z + 100$$

Είναι φανερό τώρα πώς μετατρέπουμε τις τιμές μιας κλίμακας σε τιμές μιας άλλης κλίμακας και πώς βρίσκουμε τις αρχικές τιμές μιας κατανομής όταν μας δίνονται οι τιμές σε μια άλλη κατανομή z, T ή IQ.

Για παράδειγμα, αν η T - τιμή μιας αρχικής τιμής x, που ανήκει σε κατανομή με $\bar{x} = 55$ και $S = 10$, είναι $T = 35$, τότε μπορούμε να βρούμε την τιμή x. Βρίσκουμε πρώτα τη z - τιμή. Αυτή είναι

$$T = 10 \cdot z + 50 \Leftrightarrow 35 = 10 \cdot z + 50 \Leftrightarrow 35 - 50 = 10 \cdot z \Leftrightarrow -15 = 10 \cdot z$$

άρα $z = -\dfrac{15}{10} = -1{,}5$, οπότε από τον τύπο $z = \dfrac{x - \bar{x}}{S}$ παίρνουμε:

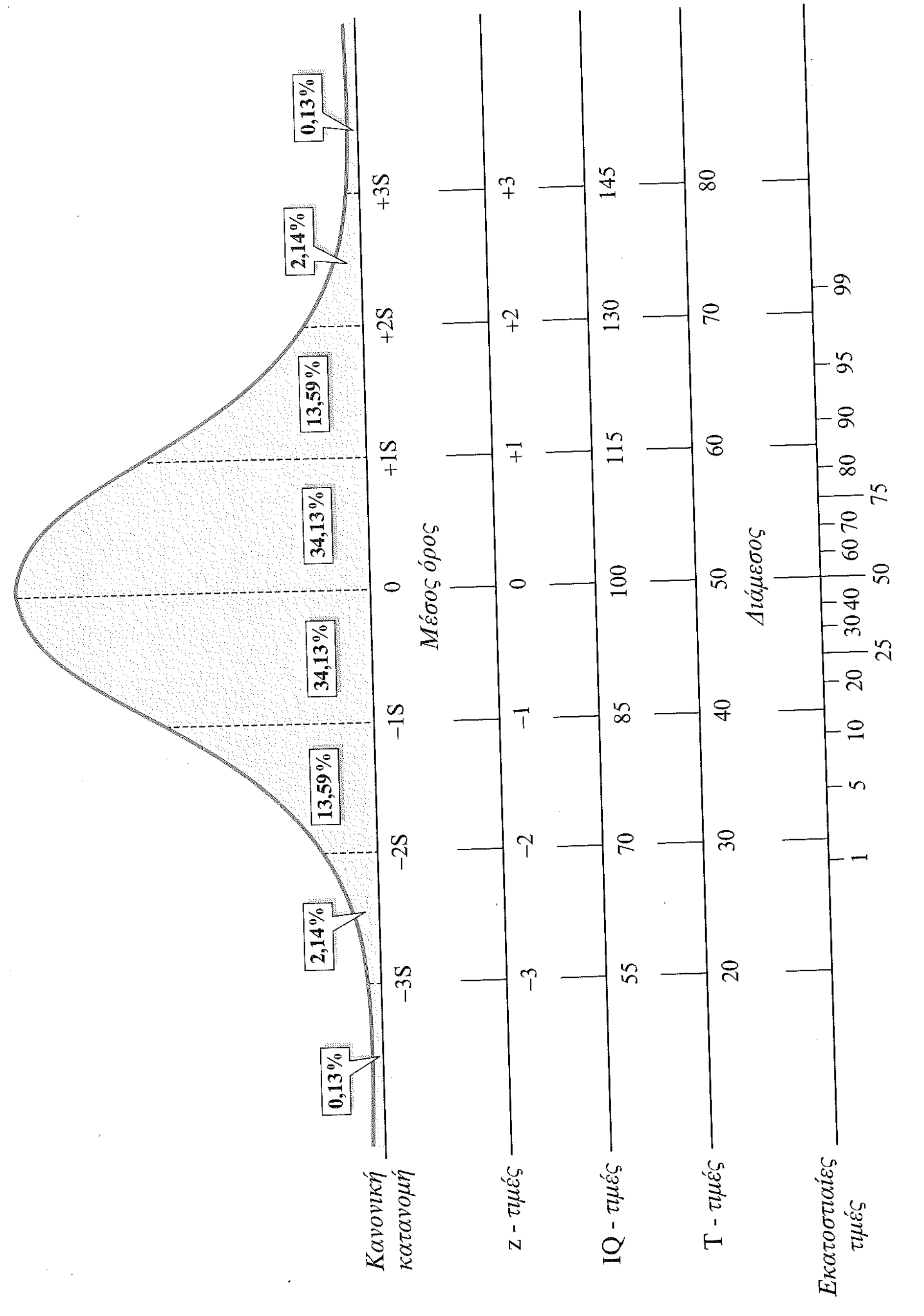
$$-1{,}5 = \frac{x - 55}{10} \Leftrightarrow -1{,}5 \cdot 10 = x - 55 \Leftrightarrow x = -15 + 55 = 40$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η αντιστοιχία z - τιμών και εκατοστιαίων τιμών και στο επόμενο διάγραμμα η αντιστοιχία εκατοστιαίων τιμών, z - τιμών, T - τιμών και IQ - τιμών.

Πίνακας 5.3

Αντιστοιχία z - τιμών και εκατοστιαίων τιμών.

z - τιμή	Εκατοστιαία τιμή της + z - τιμής	Εκατοστιαία τιμή της – z - τιμής	z - τιμή	Εκατοστιαία τιμή της + z - τιμής	Εκατοστιαία τιμή της –z - τιμής
2,33	99	1	0,64	74	26
2,05	98	2	0,61	73	27
1,88	97	3	0,58	72	28
1,75	96	4	0,55	71	29
1,65	95	5	0,52	70	30
1,56	94	6	0,50	69	31
1,48	93	7	0,47	68	32
1,41	92	8	0,44	67	33
1,34	91	9	0,41	66	34
1,28	90	10	0,39	65	35
1,23	89	11	0,36	64	36
1,18	88	12	0,33	63	37
1,13	87	13	0,31	62	38
1,08	86	14	0,28	61	39
1,04	85	15	0,25	60	40
0,99	84	16	0,23	59	41
0,95	83	17	0,20	58	42
0,92	82	18	0,18	57	43
0,88	81	19	0,15	56	44
0,84	80	20	0,13	55	45
0,81	79	21	0,10	54	46
0,77	78	22	0,08	53	47
0,74	77	23	0,05	52	48
0,71	76	24	0,02	51	49
0,67	75	25	0,00	50	50



Σχ. 5.2 Αντιστοιχία ανάμεσα σε εκατοστιαίες τιμές, z - τιμές, T - τιμές και IQ - τιμές.

Γενικότερα, αν έχουμε τις τιμές x_i μιας μεταβλητής X, μπορούμε να τις μετατρέψουμε πρώτα σε z - τιμές και στη συνέχεια σε αντίστοιχες τιμές μιας άλλης κατανομής με γνωστό μέσο όρο $\bar{y}$ και γνωστή τυπική απόκλιση S_y.

Η όλη εργασία γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των τιμών x_i.

β) Βρίσκουμε την τυπική απόκλιση S των τιμών x_i.

γ) Μετατρέπουμε τις τιμές x_i σε z - τιμές z_i. Αυτό γίνεται, όπως είπαμε, με τον τύπο $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$.

δ) Στη συνέχεια μετατρέπουμε τις τιμές z_i που βρήκαμε στις αντίστοιχες τιμές y_i της νέας κατανομής. Αυτό γίνεται επιλύοντας τον τύπο $z_i = \frac{y_i - \bar{y}}{S_y}$ ως προς y_i, δηλαδή

$$y_i - \bar{y} = z_i \cdot S_y \Leftrightarrow y_i = \bar{y} + z_i \cdot S_y$$

Παράδειγμα

Σ' ένα διαγώνισμα μαθητών έχουμε $\bar{x} = 57$ και $S = 14$. Ο εξεταστής θέλει να απλοποιήσει την κατανομή των βαθμών μετασχηματίζοντας τη βαθμολογία των μαθητών σε μια άλλη κατανομή (συνήθως θα τη λέμε **κανονικοποιημένη**) με μέση τιμή $\bar{y} = 50$ και τυπική απόκλιση $S_y = 10$. Έστω ότι ο Γιώργος πήρε βαθμό $x_Γ = 64$ στο διαγώνισμα και η Εύη $x_E = 43$. Ποιοι θα είναι οι βαθμοί των μαθητών αυτών στη νέα κατανομή;

Απάντηση

Πρώτα μετασχηματίζουμε τους βαθμούς του Γιώργου και της Εύης σε z - τιμές.

Για τον Γιώργο έχουμε: $z_Γ = \frac{64 - 57}{14} = +0{,}50$.

Για την Εύη έχουμε: $z_E = \frac{43 - 57}{14} = -1{,}00$.

Έπειτα μετασχηματίζουμε τις z - τιμές των παιδιών σε αντίστοιχες τιμές της νέας κατανομής με τον προηγούμενο τύπο $y_i = \bar{y} + z_i \cdot S_y$ και έχουμε:

Για τον Γιώργο: $y_Γ = 50 + 0{,}50 \cdot 10 = 55$.

Για την Εύη: $y_E = 50 + (-1{,}00) \cdot 10 = 50 - 10 = 40$.

Διάφορες κανονικοποιημένες κατανομές συναντάμε στις εργασίες (τεστ) που μελετούν θέματα ψυχολογίας. Για παράδειγμα, οι πραγματικές τιμές του SAT (Scholastic Aptitude Test) μετασχηματίζονται σε τιμές μιας κανονικοποιημένης κατανομής με $\mu = 500$ και $\sigma = 100$.