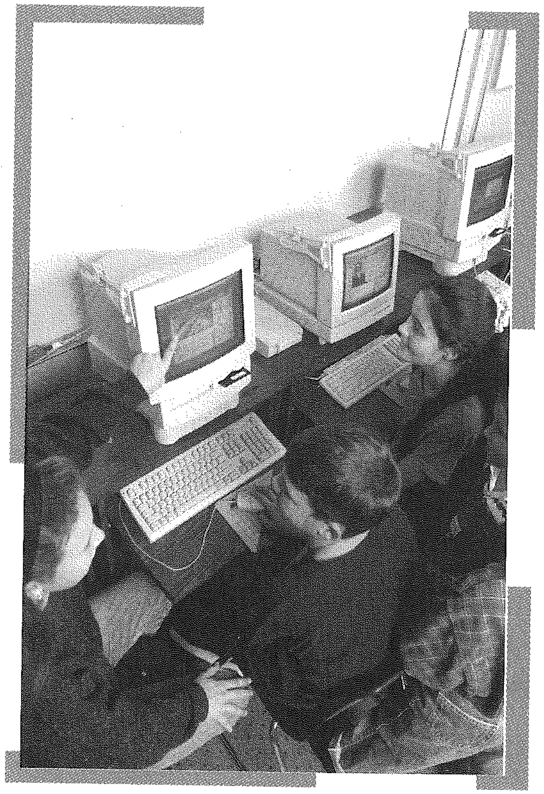
Ο Δημήτρης Καραγεώργος είναι μαθηματικός με διδακτορικές σπουδές στην Αγγλία. Υπηρέτησε τριάντα πέντε χρόνια στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση ως καθηγητής, γυμνασιάρχης, λυκειάρχης, σχολικός σύμβουλος, μόνιμος πάρεδρος και σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.
Σήμερα διδάσκει ως επίκουρος καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Αθηνών (τομέας Παιδαγωγικής του τμήματος Φ.Π.Ψ.) τα μαθήματα «Διδακτική των θετικών επιστημών» και «Μεθοδολογία έρευνας στις επιστήμες της αγωγής».
Στη μακρόχρονη εκπαιδευτική του θητεία δίδαξε το μάθημα των μαθηματικών σε όλες τις τάξεις του Γυμνασίου και Λυκείου, ασχολήθηκε με τη σύνταξη αναλυτικών προγραμμάτων, τη συγγραφή διδακτικών εγχειριδίων, που διδάσκονται στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, την παραγωγή υποστηρικτικού διδακτικού υλικού για τα μαθηματικά και την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.
Έχει γράψει εννιά βιβλία μαθηματικών και έχει δημοσιεύσει σε ελληνικά και ξένα περιοδικά περισσότερες από πενήντα εργασίες που αναφέρονται στα προηγούμενα αντικείμενα και στον εκπαιδευτικό σχεδιασμό.
Ένα από τα θέματα που τον απασχόλησαν την τελευταία εικοσαετία ήταν και η εκπαιδευτική έρευνα.
Ένα μέρος της προσπάθειάς του αυτής καταγράφεται σε αυτό το βιβλίο.

Δημήτρης Λ. Καραγεώργος

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ
Επιτ. ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ
στις επιστήμες της αγωγής

ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ



Σαββάλας
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ν	το μέγεθος του δείγματος,
Z	η z-τιμή, που αντιστοιχεί σε προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης,
E	το σφάλμα δειγματοληψίας,
p	το ποσοστό υποκειμένων της μιας κατηγορίας,
q	το ποσοστό υποκειμένων της άλλης κατηγορίας και
$p+q=1$	από τις ιδιότητες των πιθανοτήτων.

Για παράδειγμα, αν:

α) το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι 99%, τότε $Z = 2{,}58$, δηλαδή το δείγμα θα είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού με πιθανότητα 99%,

β) $E = 0{,}05$ το σφάλμα, δηλαδή η διαφορά την οποία αναμένουμε να έχει η μέση τιμή $\overline{X}$ του δείγματος από την αντίστοιχη μ του πληθυσμού,

γ) $p = 0{,}4$ το ποσοστό της μιας από τις δύο κατηγορίες και

δ) $q = 0{,}6$ το ποσοστό της άλλης κατηγορίας, τότε

$$\nu = \left(\frac{2{,}58}{0{,}05}\right)^2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 639 \text{ άτομα}$$

Επομένως με δείγμα 639 ατόμων δεν θα έχουμε σφάλμα δειγματοληψίας μεγαλύτερο ή μικρότερο του 5%.

Το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{X}}$, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, πολλές φορές υπολογίζεται από τον τύπο $\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{pq}{\nu}}$ ή $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$, όπου σ η τυπική απόκλιση της κατανομής του πληθυσμού. Όταν δεν γνωρίζουμε την τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού, χρησιμοποιούμε την τυπική απόκλιση s του δείγματος. Έτσι έχουμε το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ ή $\sigma_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{\nu}}$, οπότε η z-τιμή είναι

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} \qquad (1)$$

και αφού ορίσαμε ως σφάλμα δειγματοληψίας $E = \overline{X} - \mu$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E = \overline{X} - \mu = Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \quad \text{ή} \quad E = \overline{X} - \mu = Z \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}}$$

Δηλαδή τα όρια εμπιστοσύνης του μέσου όρου μ του πληθυσμού θα είναι:

$$\text{Ανώτατο όριο: } L_1 = \overline{X} + Z \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}} \quad \text{και}$$

$$\text{Κατώτατο όριο: } L_2 = \overline{X} - Z \cdot \frac{s}{\sqrt{\nu}}$$

Οι αντίστοιχοι τύποι για τον υπολογισμό των ορίων εμπιστοσύνης ενός ποσοστού είναι:

$$L_1 = \overline{p} + z \cdot \sqrt{\frac{pq}{\nu}} \quad \text{και} \quad L_2 = \overline{p} - z \cdot \sqrt{\frac{pq}{\nu}}$$

Για παράδειγμα, αν βρέθηκε ότι το ποσοστό υπέρ μιας θέσης, σε μια έρευνα με δείγμα μεγέθους $\nu = 400$, είναι $p = 40\%$, τότε το τυπικό σφάλμα του ποσοστού θα είναι

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{pq}{\nu}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 60}{400}} \simeq 2{,}45$$

οπότε το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι

$$(L_2, L_1) = \left(\overline{p} - z \cdot \sqrt{\frac{pq}{\nu}}, \ \overline{p} + z \cdot \sqrt{\frac{pq}{\nu}}\right) = (35{,}2, \ 44{,}8)$$

με πιθανότητα 95%. Ο αριθμός 1,96 είναι η z-τιμή που αντιστοιχεί σε πιθανότητα 95%, δηλαδή σε α-επίπεδο 5%.

3.5 Δειγματική κατανομή

Υπενθυμίζουμε ότι ένα από τα πιο σοβαρά προβλήματα της Επαγωγικής Στατιστικής είναι να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους της κατανομής ενός πληθυσμού (π.χ. τη μέση τιμή μ, την τυπική απόκλιση σ κ.λπ.) από τις αντίστοιχες παραμέτρους (τις οποίες λέμε στατιστικά) δειγμάτων που παίρνουμε, με τους τρόπους που περιγράψαμε προηγουμένως, από τον πληθυσμό. Δηλαδή να εκτιμήσουμε τα άγνωστα μ και σ από τα γνωστά $\overline{x}$ και s. Τα στατιστικά

$$\overline{x} = \frac{1}{\nu} \sum x_i \quad \text{και} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum (x_i - \overline{x})^2}$$

είναι συναρτήσεις των δεδομένων x_i κάθε δείγματος.

Αν από έναν πληθυσμό μεγέθους N πάρουμε δύο δείγματα μεγέθους ν, τότε για το καθένα θα έχουμε έναν μέσο όρο $\overline{x}$ και μια τυπική απόκλιση s. Σπάνια οι μέσες τιμές των δειγμάτων και οι τυπικές αποκλίσεις συμπίπτουν.

Η μεταβλητότητα αυτή των στατιστικών, που οφείλεται στη μεταβλητότητα των δεδομένων, καθιστά τα στατιστικά τυχαίες μεταβλητές, οπότε το καθένα έχει μια κατανομή πιθανότητας. Αυτή η κατανομή πιθανότητας ονομάζεται δειγματική κατανομή. Δηλαδή **δειγματική κατανομή** (sampling distribution) **ονομάζεται η κατανομή πιθανότητας ενός στατιστικού που μετράται σε όλα τα τυχαία δείγματα μεγέθους ν τα οποία μπορούμε να πάρουμε από κάποιον πληθυσμό**.

Είναι φανερό ότι σε κάθε μέτρο που περιγράφει τη θέση, τη διασπορά, την ασυμμετρία, την κύρτωση κ.λπ. της κατανομής ενός δείγματος τιμών αντιστοιχεί μια δειγματική κατανομή. Έτσι έχουμε τη δειγματική κατανομή του μέσου όρου, της τυπικής απόκλισης, της διαμέσου κ.λπ.

Πριν προχωρήσουμε θα πρέπει να γίνει σαφές, απ' όσα έχουμε πει στα προηγούμενα, ότι δεν πρέπει να συγχέουμε τις τρεις διαφορετικές κατανομές, την **κατανομή του πληθυσμού**, την **κατανομή του δείγματος** και τη **δειγματική κατανομή** ενός στατιστικού.

Η κατανομή του πληθυσμού αναφέρεται στις τιμές όλων των ατόμων του πληθυσμού. Σε αυτή την κατανομή δεν γνωρίζουμε τις παραμέτρους της (μέση τιμή, τυπική απόκλιση κ.λπ.) και είναι αυτές που θέλουμε να εκτιμήσουμε με βάση τα αντίστοιχα στατιστικά ενός δείγματος. Η κατανομή του δείγματος αναφέρεται σε περιορισμένο αριθμό μετρήσεων, οι οποίες είναι αντιπροσωπευτικές του πληθυσμού και είναι αυτές ακριβώς που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού. Η δειγματική κατανομή ενός στατιστικού ($\bar{x}$, s, ...) αναφέρεται στις τιμές του που παίρνουμε απ' όλα τα ισοπληθή δείγματα τα οποία είναι δυνατό να ληφθούν από τον πληθυσμό.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε τους 150.000 μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου ως προς το βάρος τους. Αν είχαμε τη δυνατότητα να ζυγίσουμε όλους τους μαθητές και να καταγράψουμε τα βάρη τους, τότε θα είχαμε την κατανομή του πληθυσμού των βαρών. Αυτή η κατανομή θα είχε έναν μέσο όρο μ, δηλαδή το μέσο βάρος των μαθητών αυτών. Αυτό φυσικά είναι δύσκολο να γίνει. Αντ' αυτού παίρνουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 7500 μαθητών (5% του πληθυσμού) της Γ' τάξης του Γυμνασίου. Για τα βάρη των μαθητών αυτών έχουμε μια κατανομή. Αυτή είναι η κατανομή του δείγματος. Από το δείγμα έχουμε μια μέση τιμή $\bar{x}$ των βαρών, την οποία παίρνουμε τις περισσότερες φορές ως μέση τιμή όλου του πληθυσμού, αλλά με «ρίσκο» να μην έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση.

Αν δεν πάρουμε μόνο ένα δείγμα 7500 ατόμων, αλλά πάρουμε πολλά δείγματα αυτού του μεγέθους και για καθένα από αυτά υπολογίσουμε τη μέση τιμή, τότε μπορούμε να έχουμε μια κατανομή αυτών των μέσων τιμών. Αυτή η κατανομή είναι η δειγματική κατανομή του μέσου όρου και η μέση τιμή της είναι η μέση τιμή των μέσων τιμών των δειγμάτων. Η μέση τιμή της δειγματικής κατανομής του μέσου όρου, όπως θα δούμε στη συνέχεια, προσεγγίζει απόλυτα (ταυτίζεται με) τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Τέτοιες δειγματικές κατανομές μπορούμε να κάνουμε εμπειρικά όταν σχηματίζουμε δείγματα από έναν πεπερασμένο πληθυσμό. Η κατανομή αυτή **ονομάζεται εμπειρική δειγματική κατανομή**. Ο συνήθης τρόπος δημιουργίας μιας τέτοιας κατανομής είναι ο ακόλουθος:

α) Από τον πληθυσμό μεγέθους N (πεπερασμένο) παίρνουμε με τυχαία δειγματοληψία δείγματα μεγέθους ν.

β) Υπολογίζουμε το στατιστικό ($\bar{x}$, s, r, ...) σε κάθε δείγμα.

γ) Κάνουμε την κατανομή συχνοτήτων αυτού του στατιστικού.

Επισημαίνουμε ότι αυτή η διαδικασία είναι δύσκολο να ακολουθηθεί για πληθυσμό μεγάλου μεγέθους, ενώ είναι αδύνατο για άπειρο πληθυσμό. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατή η προσέγγιση της δειγματικής κατανομής με τη χρησιμοποίηση μεγάλου αριθμού δειγμάτων.

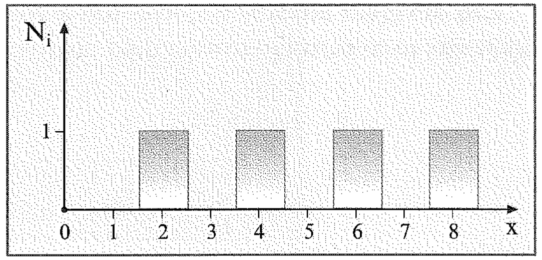
Συνήθως **μας ενδιαφέρουν τρία χαρακτηριστικά μιας δειγματικής κατανομής**: ο μέσος όρος $\overline{X}$, η τυπική απόκλιση s και η γραφική της παράσταση. Ας μιλήσουμε πρώτα για τον μέσο όρο $\overline{X}$.

3.6 Η κατανομή του μέσου όρου $\overline{X}$ και το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{X}}$ του μέσου όρου $\overline{X}$

Ας δούμε πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε τη δειγματική κατανομή του μέσου όρου $\overline{X}$, χρησιμοποιώντας ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω ο πληθυσμός μεγέθους N = 4 με στοιχεία τους αριθμούς 2, 4, 6 και 8. Θα πάρουμε όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους ν = 2, θα βρούμε τους μέσους όρους όλων των δειγμάτων και θα φτιάξουμε την κατανομή συχνοτήτων αυτών των μέσων όρων.



Καταρχήν βλέπουμε στο διπλανό σχήμα το ιστόγραμμα της κατανομής συχνοτήτων του πληθυσμού. Προκειμένου να πάρουμε τυχαία δείγματα, βάζουμε τους αριθμούς (γραμμένο τον καθένα σ' ένα χαρτάκι) σ' ένα κουτί και ανακατεύοντας τραβάμε έναν έναν αριθμό, τον καταγράφουμε και τον ξαναβάζουμε στο κουτί (δειγματοληψία με επανατοποθέτηση).

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα, ο οποίος δείχνει τον αριθμό όλων των δειγμάτων, τον πρώτο και τον δεύτερο αριθμό καθώς και τον μέσο όρο κάθε δείγματος. Φυσικά, τα δείγματα αυτά είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

α/α δείγματος	**Πρώτος αριθμός δείγματος**	**Δεύτερος αριθμός δείγματος**	**Μέση τιμή δείγματος ($\bar{x}$)**
1	2	2	2
2	2	4	3
3	2	6	4
4	2	8	5
5	4	2	3
6	4	4	4
7	4	6	5
8	4	8	6
9	6	2	4
10	6	4	5
11	6	6	6
12	6	8	7
13	8	2	5
14	8	4	6
15	8	6	7
16	8	8	8

Σημειώνουμε ότι αφού έχουμε δειγματοληψία με επανατοποθέτηση από πληθυσμό μεγέθους $N = 4$, το πλήθος των δειγμάτων μεγέθους $\nu = 2$ θα είναι $4^2 = 16$.

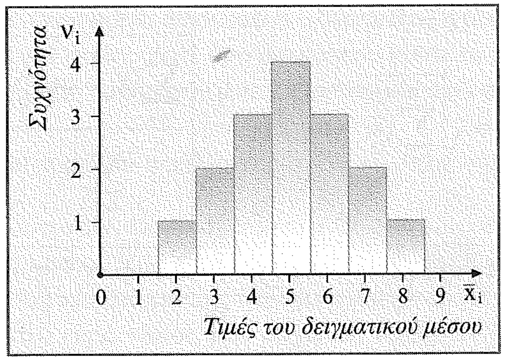
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων των μέσων όρων και το αντίστοιχο ιστόγραμμα κατανομής συχνοτήτων.

Πίνακας δειγματικής κατανομής συχνοτήτων των 16 δειγμάτων για τον $\overline{X}$.

i	$\bar{x}_i$	**Συχνότητα** ν_i	**Πιθανότητα** $p_i = \frac{\nu_i}{\nu}$
1	2	1	$\frac{1}{16}$
2	3	2	$\frac{2}{16}$
3	4	3	$\frac{3}{16}$
4	5	4	$\frac{4}{16}$
5	6	3	$\frac{3}{16}$
6	7	2	$\frac{2}{16}$
7	8	1	$\frac{1}{16}$
Σύνολο		**16**	$\mathbf{\frac{16}{16} = 1}$

όπου $i = 1, 2, 3, \ldots, 7$ είναι δείκτης του αντίστοιχου μέσου και $\kappa = 7$ το πλήθος των τιμών των δειγματικών μέσων.

Ιστόγραμμα δειγματικής κατανομής συχνοτήτων του δειγματικού μέσου $\overline{X}$.



Παρατηρούμε ότι:

1. Η διαφορά ανάμεσα στο ιστόγραμμα της κατανομής του πληθυσμού και στο ιστόγραμμα της δειγματικής κατανομής του $\overline{X}$ είναι εντυπωσιακή. Ενώ στην πρώτη οι τιμές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, στη δεύτερη παρουσιάζεται κορυφή και είναι τελείως συμμετρική.
2. Οι μέσες τιμές των δειγμάτων συγκεντρώνονται γύρω από την τιμή 5, που είναι ο μέσος όρος των τιμών του πληθυσμού $\left(\mu = \dfrac{2+4+6+8}{4} = 5\right)$.
3. Η δειγματική κατανομή συχνοτήτων του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ φαίνεται να έχει σχήμα κανονικής κατανομής. Αυτό είναι σημαντικό όπως θα δούμε παρακάτω.

Ας υπολογίσουμε τώρα την τυπική απόκλιση σ της κατανομής του πληθυσμού, τη μέση τιμή $\mu_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής και την τυπική απόκλιση $\sigma_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής.

Έχουμε:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2}{4}} = \sqrt{\frac{9+1+1+9}{4}} = \sqrt{5}$$

$$\mu_{\overline{X}} = \sum_{i=1}^{7} \overline{x}_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{7} \overline{x}_i \nu_i}{\sum_{i=1}^{7} \nu_i} =$$

$$= \frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 3+7\cdot 2+8\cdot 1}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} (\overline{x}_i - \mu_{\overline{X}})^2 p_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{7} (\overline{x}_i - \mu_{\overline{X}})^2 \nu_i}{\sum_{i=1}^{7} \nu_i}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2-5)^2\cdot 1+(3-5)^2\cdot 2+(4-5)^2\cdot 3+(5-5)^2\cdot 4+(6-5)^2\cdot 3+(7-5)^2\cdot 2+(8-5)^2\cdot 1}{16}}$$

δηλαδή

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{40}{16}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Βλέπουμε ότι:

- Ο μέσος όρος $\mu_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής του μέσου $\overline{X}$ είναι ίσος με τον μέσο μ του πληθυσμού, δηλαδή $\mu_{\overline{X}} = \mu$.
- Η τυπική απόκλιση $\sigma_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής του μέσου $\overline{X}$ είναι μικρότερη από την τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού και μάλιστα είναι $\sigma_{\overline{X}} = = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$, γιατί $\nu = 2$ είναι το μέγεθος του δείγματος.

Τα παραπάνω συμπεράσματα, στα οποία καταλήξαμε με αυτό το απλό παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι ισχύουν για οποιαδήποτε δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$.

Γενικά ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ δειγμάτων μεγέθους ν, που λαμβάνονται από έναν πληθυσμό με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ, έχει μέσο $\mu_{\overline{X}} = \mu$ και τυπική απόκλιση:

- $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ ***στην περίπτωση άπειρου πληθυσμού ή πεπερασμένου πληθυσμού και δειγματοληψίας με επανατοποθέτηση,***
- $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \cdot \sqrt{\dfrac{N-\nu}{N-1}}$ ***στην περίπτωση πεπερασμένου πληθυσμού μεγέθους N και δειγματοληψίας χωρίς επανατοποθέτηση.***

Η τυπική απόκλιση $\sigma_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής ονομάζεται **τυπικό σφάλμα του μέσου $\overline{X}$** ή απλά **τυπικό σφάλμα** (standard error).

Το τυπικό σφάλμα φανερώνει πόσο καλά ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ εκτιμά τον μέσο μ του πληθυσμού. Είναι φανερό ότι όσο μικρότερο είναι το τυπικό σφάλμα, τόσο καλύτερη είναι η εκτίμηση του μέσου μ του πληθυσμού από τον μέσο $\overline{x}$ του δείγματος.

Από τον τύπο του τυπικού σφάλματος $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$ φαίνεται ότι όσο μικρότερη είναι η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού (δηλαδή όσο μικρότερη είναι η διασπορά του πληθυσμού), τόσο μικρότερο είναι και το τυπικό σφάλμα. Επίσης, **όσο μεγαλύτερο** είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο **μικρότερο** είναι το τυπικό σφάλμα. Το τελευταίο είναι γνωστό ως ο **νόμος των μεγάλων αριθμών** (the law of large numbers).

Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρήσαμε ότι το ιστόγραμμα της δειγματικής κατανομής φαίνεται να έχει σχήμα κανονικής κατανομής. Στο απλό αυτό παράδειγμα πήραμε όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους $\nu = 2$. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως δεν είναι δυνατό να έχουμε όλα τα δείγματα μεγέθους ν και να υπολογίσουμε όλους τους δειγματικούς μέσους $\overline{X}$. Έτσι είναι αναγκαίο να αναπτύξουμε τα γενικά χαρακτηριστικά της δειγματικής κατανομής των μέσων όρων, τα οποία να μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε περίπτωση.

Ευτυχώς αυτά τα χαρακτηριστικά εξειδικεύονται στην παρακάτω μαθηματική πρόταση, η οποία είναι γνωστή ως **κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)**. Αυτό το σπουδαίο και χρήσιμο θεώρημα λειτουργεί ως ακρογωνιαίος λίθος της στατιστικής συμπερασματολογίας και έχει ως εξής:

Κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ.): *Για κάθε πληθυσμό με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ, η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ για δείγματα μεγέθους ν προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέσο όρο μ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$, καθώς το ν αυξάνεται απεριόριστα.*

Η αξία αυτής της πρότασης προέρχεται από δύο γεγονότα. **Πρώτο** ότι αναφέρεται στη δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ κάθε πληθυσμού (αδιάφορο του σχήματος, του μέσου όρου, της τυπικής απόκλισης κ.λπ.) και **δεύτερο** ότι η δειγματική κατανομή προσεγγίζει μια κανονική κατανομή. Στην περίπτωση που το μέγεθος ν του δείγματος είναι $\nu \geq 30$ η κατανομή είναι τελείως κανονική. Γι' αυτό το Κ.Ο.Θ. διατυπώνεται σε πολλά βιβλία και ως εξής:

«*Για δειγματικά μεγέθη $\nu \geq 30$ η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή με μέσο $\mu_{\overline{X}} = \mu$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$*».

Ή συμβολικά:

$$«\text{Αν } \nu \geq 30, \text{ τότε } \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)»$$

Από το σπουδαίο αυτό συμπέρασμα προκύπτει ότι:

$$«\text{Αν } \nu \geq 30, \text{ τότε } \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right) \text{ και } Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}} \sim N(0, 1)»$$

Σημειώνουμε ότι το Κ.Ο.Θ. περιγράφει τη δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ αναγνωρίζοντας τα τρία βασικά χαρακτηριστικά κάθε κατανομής: σχήμα, κεντρική τάση και μεταβλητότητα.

Το σχήμα της δειγματικής κατανομής θα είναι τελείως κανονικό (σχήμα κανονικής κατανομής) όταν ικανοποιείται μία τουλάχιστον από τις ακόλουθες συνθήκες:

α) Ο πληθυσμός από τον οποίο παίρνουμε τα δείγματα είναι κανονικός.

β) Ο αριθμός ν (το μέγεθος του δείγματος) είναι $\nu \geq 30$.

Ο μέσος όρος $\mu_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής του μέσου $\overline{X}$ (κεντρική τάση) ταυτίζεται με τον μέσο όρο μ του πληθυσμού, δηλαδή $\mu_{\overline{X}} = \mu$. Ο αριθμός $\mu_{\overline{X}}$ ονομάζεται αναμενόμενη τιμή του $\overline{X}$.

Το τρίτο χαρακτηριστικό της δειγματικής κατανομής του μέσου $\overline{X}$ είναι η **μεταβλητότητα**, που δηλώνεται με το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{X}}$ το οποίο μετρά την απόσταση μεταξύ του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ και του μέσου μ του πληθυσμού.

Ας δούμε τώρα μερικά ερωτήματα και παραδείγματα για να εμπεδώσουμε καλύτερα όσα είπαμε προηγουμένως.

Ερωτήματα - Παραδείγματα

1. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της κατανομής των τιμών μιας μεταβλητής και της δειγματικής κατανομής;

Απάντηση

Η διαφορά είναι ότι η κατανομή των τιμών μιας μεταβλητής γίνεται από τις αρχικές τιμές της μεταβλητής, ενώ η δειγματική κατανομή γίνεται από κάποια στατιστικά (μέσους όρους, τυπικές αποκλίσεις κ.λπ.).

2. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις διασφαλίζεται ότι η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ θα είναι κανονική;

Απάντηση

Η δειγματική κατανομή θα είναι κανονική όταν ο πληθυσμός από τον οποίο παίρνουμε τα δείγματα είναι κανονικός ή το μέγεθος ν των δειγμάτων είναι τουλάχιστον 30 ($\nu \geq 30$).

3. Ένας πληθυσμός δεδομένων είναι κανονικά κατανεμημένος με $\mu = 60$ και $\sigma = 15$. Να περιγραφεί η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ για δείγματα μεγέθους $\nu = 25$ που παίρνουμε από αυτόν τον πληθυσμό.

Απάντηση

Όταν λέμε να περιγραφεί η δειγματική κατανομή, εννοούμε να μιλήσουμε για το σχήμα της, την κεντρική της τάση και τη μεταβλητότητά της. Η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ θα είναι κανονική, αφού ο πληθυσμός είναι κανονικός, θα έχει αναμενόμενη τιμή $\mu_{\overline{X}} = 60$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$.

4. Ένας πληθυσμός δεδομένων είναι κανονικός με $\mu = 60$ και $\sigma = 8$.

i) Αν πάρουμε στην τύχη μια τιμή από αυτόν τον πληθυσμό, τότε, κατά μέσο όρο, πόσο κοντά στον μέσο όρο του πληθυσμού μπορεί να είναι αυτή η τιμή;

ii) Αν πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $\nu = 4$, πόση διαφορά, κατά μέσο όρο, θα αναμένουμε μεταξύ του δειγματικού μέσου και του μέσου του πληθυσμού;

iii) Αν πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $\nu = 64$, πόση θα είναι τότε η διαφορά μεταξύ του δειγματικού μέσου και του μέσου του πληθυσμού;

Απάντηση

i) Η τυπική απόκλιση είναι $\sigma = 8$. Αυτή μετρά τη σταθερή απόσταση από τον μέσο όρο του πληθυσμού.

ii) Για $\nu = 4$, το τυπικό σφάλμα θα είναι $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{8}{\sqrt{4}} = 4$ μονάδες.

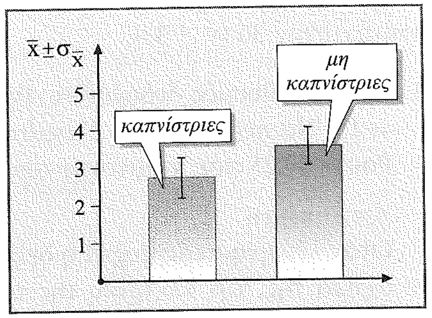
iii) Για $\nu = 64$, το τυπικό σφάλμα θα είναι $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{8}{\sqrt{64}} = 1$ μονάδα.

5. Ας πάρουμε έναν πληθυσμό μεγέθους $\nu = 3$. Για παράδειγμα, η βαθμολογία ενός φοιτητή σε τρία μαθήματα είναι 1, 8 και 9.

Ο μέσος όρος της βαθμολογίας είναι $\mu = 6$. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον πληθυσμό ας προσπαθήσουμε να πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $\nu = 2$, το οποίο να έχει μέσο όρο $\bar{x} = 6$, δηλαδή ίσο με τον μέσο μ του πληθυσμού. Αυτό είναι αδύνατο να το πετύχουμε. Εδώ έχουμε μια περίπτωση όπου φαίνεται καθαρά ότι ο μέσος $\bar{X}$ ενός δείγματος δεν είναι πάντοτε ακριβής εκτίμηση του μέσου μ του πληθυσμού.

Ο σκοπός του τυπικού σφάλματος $\sigma_{\bar{X}}$ είναι να μας δώσει ένα ποσοτικό μέτρο της διαφοράς μεταξύ $\bar{x}$ και μ. Τυπικό σφάλμα είναι η σταθερή απόσταση μεταξύ $\bar{x}$ και μ.

6. Ένας ερευνητής εξετάζει την επίδραση του καπνίσματος κατά τη διάρκεια της εγκυμοσύνης στο βάρος του νεογνού. Εξετάστηκαν δύο δείγματα, ένα δείγμα από νεογνά των οποίων οι μητέρες κάπνιζαν κατά τη διάρκεια της εγκυμοσύνης και ένα άλλο ισοπληθές δείγμα από νεογνά των οποίων οι μητέρες δεν κάπνιζαν κατά τη διάρκεια της εγκυμοσύνης. Ζυγίστηκαν και καταγράφηκαν τα βάρη όλων των νεογνών και υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι για κάθε δείγμα χωριστά. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα, ενώ δίπλα δίνονται τα ιστογράμματα των δειγμάτων.



ομάδα	$\bar{X}$	$\sigma_{\bar{X}}$
καπνίστριες	2,8 kg	0,6 kg
μη καπνίστριες	3,6 kg	0,4 kg

Όπως είπαμε και προηγουμένως, το μέγεθος του δείγματος είναι σημαντικός παράγοντας προσδιορισμού του πόσο καλά το δείγμα εκπροσωπεί τον πληθυσμό. Τονίσαμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο καλύτερα το δείγμα εκπροσωπεί τον πληθυσμό. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα γι' αυτό.

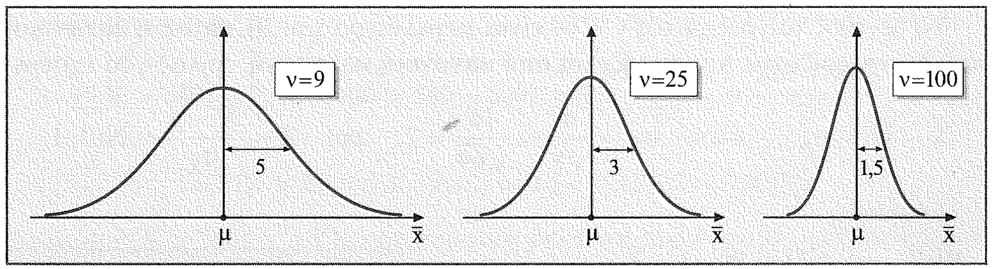
Γνωρίζουμε ότι οι IQ-τιμές σχηματίζουν κανονική κατανομή με $\mu = 100$ και $\sigma = 15$. Εμείς όμως θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή μ για το IQ των μαθητών ενός συγκεκριμένου σχολείου. Είναι φανερό ότι το να μετρήσουμε το IQ όλων των μαθητών είναι μια δύσκολη δουλειά. Γι' αυτό αποφασίσαμε να κάνουμε τυχαία δειγματοληψία. Μπορούμε να πάρουμε δείγματα μεγέθους $\nu = 9$, $\nu = 25$ ή $\nu = 100$. Σαφώς το δείγμα $\nu = 100$ εκπροσωπεί καλύτερα τον πληθυσμό. Το τυπικό σφάλμα $\sigma_{\bar{X}}$ μας λέει ακριβώς πόσο καλύτερα τον εκπροσωπεί. Τα τυπικά σφάλματα για τις τρεις δειγματικές κατανομές είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3 \quad \text{και} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = 1{,}5$$

Αυτά μας λένε απλά τα εξής:

Για τα δείγματα μεγέθους $\nu = 9$ είναι δυνατό κάποιο να έχει μέση τιμή $\bar{x}$ πολύ κοντά στον άγνωστο μέσο μ του πληθυσμού, αλλά είναι δυνατό και να απέχει 5 ή και περισσότερες μονάδες από αυτόν. Αντιλαμβανόμαστε ότι η εκτίμηση του μ με αυτό το $\bar{x}$ δεν είναι πολύ καλή. Αντίθετα, όταν $\nu = 100$, τότε, κατά μέσο όρο, αναμένουμε η μέση τιμή $\bar{x}$ ενός δείγματος από αυτά να είναι πολύ κοντά στον μ (πολύ καλή εκτίμηση), αφού θα απέχει μόνο 1,5 μονάδα από αυτόν ή το μέγιστο $+3\sigma_{\bar{X}} = 4{,}5$ μονάδες, που πάλι είναι μικρότερο του 5.

Τα επόμενα διαγράμματα μας δίνουν τις τρεις αυτές δειγματικές κατανομές.



Η διαφορά $\bar{x} - \mu$, την οποία συμβολίζουμε πολλές φορές με E, δηλαδή $E = \bar{x} - \mu$, ονομάζεται **σφάλμα εκτίμησης**. Συνήθως παίρνουμε ως σφάλμα εκτίμησης την απόλυτη τιμή του E, δηλαδή $|E| = |\bar{x} - \mu|$.

3.7 Πιθανότητα και δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$

Ένα σοβαρό πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε τώρα είναι το εξής: Ποια είναι η πιθανότητα το σφάλμα εκτίμησης του μέσου μ από τον μέσο $\overline{X}$ ενός δείγματος να είναι μικρότερο μιας δοσμένης τιμής κ; Δηλαδή ποια είναι η $P(|\overline{X} - \mu| < \kappa)$;

Η κατανομή των μέσων τιμών δειγμάτων μεγέθους ν είπαμε ότι είναι κανονική όταν ο αρχικός πληθυσμός είναι κανονικός ή όταν $\nu \geq 30$. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα έχουμε:

$$P(|\overline{X} - \mu| < \kappa) = P(-\kappa < \overline{X} - \mu < \kappa) =$$

$$= P\left(-\frac{\kappa}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{\kappa}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(-\frac{\kappa}{\sigma_{\overline{X}}} < Z < \frac{\kappa}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$

οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα από τους πίνακες.

Παραδείγματα

1. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε σφάλμα $E < 3$ όταν χρησιμοποιηθεί ο μέσος $\overline{X}$ δειγμάτων μεγέθους 64 για την εκτίμηση του μέσου μ ενός άπειρου πληθυσμού με $\sigma = 16$;

Απάντηση

Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν γίνεται αναφορά στην κατανομή που έχει η τυχαία μεταβλητή X στον πληθυσμό. Δηλαδή δεν ξέρουμε την κατανομή του πληθυσμού της τυχαίας μεταβλητής X, παρά μόνο ότι η τυπική της απόκλιση είναι $\sigma = 16$.

Το μέγεθος του δείγματος $\nu = 64$ είναι μεγαλύτερο του 30, **οπότε η κατανομή που δεν γνωρίζουμε προσεγγίζεται από κανονική κατανομή**. Δηλαδή θα έχουμε:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2_{\overline{X}}), \quad \text{όπου} \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2, \quad \text{και} \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} \sim N(0, 1)$$

Επομένως

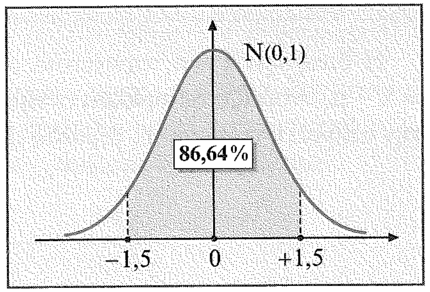
$$P(|\overline{X} - \mu| < 3) = P(-3 < \overline{X} - \mu < 3) =$$

$$= P\left(-\frac{3}{2} < \frac{\overline{X} - \mu}{2} < \frac{3}{2}\right) =$$

$$= P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) =$$

$$= 2P(0 < Z < 1{,}5) = 2A(1{,}5) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}43319 = 0{,}86638$$



Δηλαδή $P(E < 3) \simeq 86{,}64\%$, που σημαίνει ότι έχουμε περίπου 87% πιθανότητα το σφάλμα εκτίμησης του μέσου μ σε αυτή την άγνωστη κατανομή να είναι μικρότερο των 3 μονάδων.

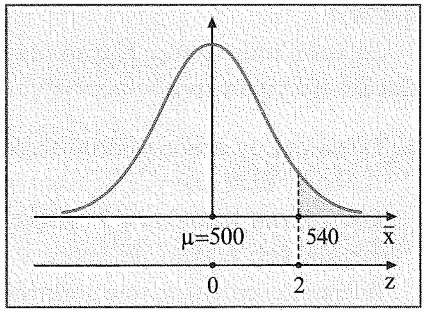
2. Οι βαθμοί σ' ένα τεστ δεξιοτήτων σχηματίζουν κανονική κατανομή με $\mu = 500$ και $\sigma = 100$. Αν πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα από 25 μαθητές (δηλαδή μεγέθους $\nu = 25$), ποια είναι η πιθανότητα ο μέσος $\overline{X}$ του δείγματος να είναι μεγαλύτερος του 540, δηλαδή ποια είναι η $P(\overline{X} > 540)$;

Απάντηση

Το δείγμα το πήραμε από πληθυσμό που έχει κανονική κατανομή, επομένως αν πάρουμε όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους $\nu = 25$ από τον πληθυσμό και για το καθένα υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\overline{x}$, τότε η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ θα προσεγγίζεται από κανονική κατανομή.

Το ερώτημά μας είναι ταυτόσημο με το ακόλουθο: «Απ' όλους τους δειγματικούς μέσους της δειγματικής κατανομής του μέσου $\overline{X}$, τι ποσοστό έχει τιμές μεγαλύτερες του 540;».

Η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ εδώ θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά: α) Σχήμα κανονικής κατανομής. β) Μέση τιμή $\mu = 500$, γιατί ο πληθυσμός είναι κανονικός. γ) Τυπική απόκλιση (τυπικό σφάλμα) $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \frac{100}{\sqrt{25}} = 20$. Το διπλανό σχήμα δίνει τη γραφική παράσταση της κατανομής.



Διαδοχικά έχουμε:

$$P(\overline{X} > 540) = P(\overline{X} - 500 > 540 - 500) = P\left(\frac{\overline{X} - 500}{20} > \frac{540 - 500}{20}\right) =$$

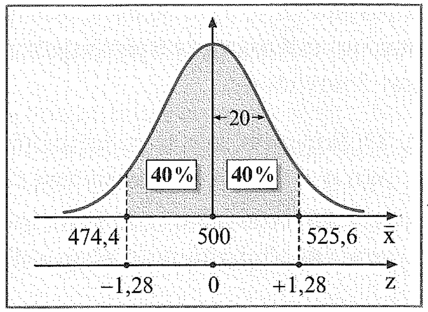
$$= P(Z > 2) = 0{,}5 - A(2) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275$$

Δηλαδή $P(\overline{X} > 540) \simeq 2{,}3\%$, που σημαίνει ότι είναι πολύ μικρή η πιθανότητα να έχουμε ένα δείγμα 25 μαθητών με μέσο όρο στο τεστ μεγαλύτερο του 540.

3. Αναφερόμενοι στο προηγούμενο παράδειγμα, σε ποιο διάστημα τιμών (μικρότερη βαθμολογία - μεγαλύτερη βαθμολογία) θα αναμένουμε να βρίσκεται το 80% των μέσων τιμών των δειγμάτων;

Απάντηση

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, καλό είναι να χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα της δειγματικής κατανομής του μέσου $\overline{X}$. Βλέποντας την κατανομή αυτή, την οποία επαναλαμβάνουμε στο διπλανό σχήμα, η πιο πιθανή τιμή που αναμένουμε να έχει ο μέσος $\overline{X}$ ενός δείγματος είναι κοντά στην τιμή 500 (μέση τιμή). Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το 80% των μέσων τιμών των δειγμάτων θα είναι στο 80% των μεσαίων τιμών της κατανομής (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αφού η κατανομή είναι κανονική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα και να βρούμε την τιμή Z που αντιστοιχεί στο ποσοστό (πιθανότητα) 0,40. Αυτή είναι περίπου + 1,28, οπότε από τον τύπο $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}}$ παίρνουμε:

$$+1{,}28 = \frac{\overline{X} - 500}{20} \Leftrightarrow 25{,}6 = \overline{X} - 500 \Leftrightarrow \overline{X} = 500 + 25{,}6 = 525{,}6$$

Για Z = − 1,28 βρίσκουμε το αριστερό άκρο του διαστήματος, που είναι $\overline{X} =$ $= 474{,}4$.

Δηλαδή παίρνοντας όλα τα δείγματα μεγέθους ν = 25 από αυτό το τεστ, το 80% των μέσων τιμών αυτών των δειγμάτων θα βρίσκεται στο διάστημα (474,4 , 525,6).

4. Έστω ότι σε ετήσια βάση ο χρόνος απουσίας των μαθητών της Γ′ τάξης του Λυκείου όλης της χώρας ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 12 ημέρες και τυπική απόκλιση 3 ημέρες. Από τους μαθητές της Γ′ τάξης επιλέγουμε τυχαία ένα δείγμα μεγέθους ν = 4 μαθητών. Να βρεθεί η πιθανότητα η μέση διάρκεια απουσίας των μαθητών του δείγματος σ' ένα έτος να είναι μεγαλύτερη των 15 ημερών. Μιλάμε για ημέρες που παίρνουν απουσίες οι μαθητές.

Απάντηση

Η κατανομή του πληθυσμού είναι κανονική, επομένως και η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ είναι κανονική, οπότε προσεγγίζεται με την N(0, 1). Ζητάμε την $P(\overline{X} > 15)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$P(\overline{X} > 15) = P(\overline{X} - 12 > 15 - 12) =$$

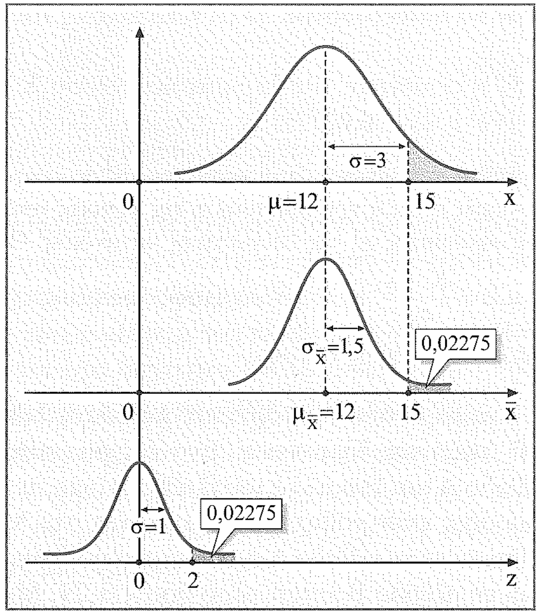
$$= P\left(\frac{\overline{X} - 12}{\sigma_{\overline{X}}} > \frac{15 - 12}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(\frac{\overline{X} - 12}{1{,}5} > \frac{3}{1{,}5}\right) =$$

$$= P(Z > 2) = 0{,}5 - A(2) = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275, \quad \text{αφού}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Δηλαδή έχουμε μια μικρή πιθανότητα, περίπου 2,3%, ο μέσος όρος της απουσίας των 4 μαθητών να είναι μεγαλύτερος από 15 ημέρες.

Στη συνέχεια δίνουμε την απάντηση γραφικά.



5. α) Μια κανονική κατανομή έχει μ = 80 και σ = 10. Ένα δείγμα μεγέθους ν = 25 έχει $\overline{x} = 83$. Ποια είναι η z - τιμή που αντιστοιχεί σε αυτόν τον δειγματικό μέσο;

β) Ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν = 9 επιλέγεται από έναν κανονικό πληθυσμό με μ = 40 και σ = 6.

i) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε έναν δειγματικό μέσο μεγαλύτερο του 41;

ii) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε έναν δειγματικό μέσο μικρότερο του 46;

γ) Μια «λοξή» κατανομή έχει μ = 60 και σ = 8.

i) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε έναν δειγματικό μέσο μεγαλύτερο από 62 από ένα δείγμα μεγέθους ν = 4;

ii) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε έναν δειγματικό μέσο μεγαλύτερο από 62 από ένα δείγμα μεγέθους ν = 64;

Απάντηση

α) Είναι $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\nu}} = \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 2$, οπότε $z = \dfrac{83 - 80}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

β) i) $P(\overline{X} > 41) = P(\overline{X} - 40 > 41 - 40) = P\left(\dfrac{\overline{X} - 40}{\sigma_{\overline{X}}} > \dfrac{41 - 40}{\sigma_{\overline{X}}}\right) =$

$$= P(Z > 0{,}5) = 0{,}5 - A(0{,}5) = 0{,}30854, \quad \text{αφού} \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

ii) $P(\overline{X} < 46) = P(Z < 3) = 0{,}5 + A(3) = 0{,}5 + 0{,}49865 = 0{,}99865$.

γ) i) **Δεν μπορούμε να απαντήσουμε**, γιατί η κατανομή του δειγματικού μέσου δεν είναι κανονική.

ii) Με $\nu = 64 > 30$ η κατανομή του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ θα είναι κανονική, οπότε $P(\overline{X} > 62) = P(Z > 2) = 0{,}02275$.

Σχόλιο: Ένα σοβαρό λάθος που γίνεται όταν μετασχηματίζουμε τιμές δειγματικής κατανομής του μέσου σε z-τιμές είναι η χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης σ του πληθυσμού αντί του τυπικού σφάλματος $\sigma_{\overline{X}}$ της δειγματικής κατανομής. Θυμίζουμε ότι ο τύπος μετασχηματισμού είναι $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}}$, γιατί μετασχηματίζουμε μέσες τιμές σε z-τιμές και όχι πραγματικές τιμές της μεταβλητής σε z-τιμές.

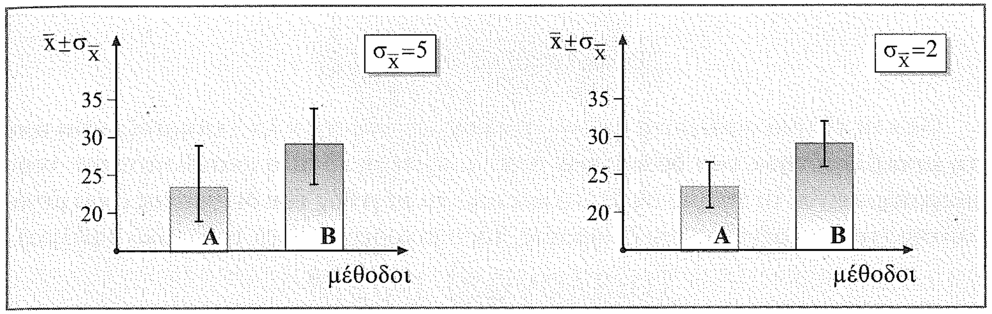
6. Ένας ερευνητής δοκιμάζει δύο διαφορετικές μεθόδους διδασκαλίας των Μαθηματικών στη Γ′ τάξη του Γυμνασίου. Ένα δείγμα μαθητών διδάσκεται το μάθημα με τη μέθοδο Α και ένα άλλο ισοπληθές δείγμα με τη μέθοδο Β. Μετά από μερικές εβδομάδες κάθε μαθητής δίνει ένα τεστ στα Μαθηματικά. Οι μαθητές που διδάχθηκαν με τη μέθοδο Α έχουν μέσο όρο βαθμολογίας $\bar{x} = 23$ και οι διδαχθέντες με τη μέθοδο Β έχουν μέσο όρο $\bar{x} = 29$. Με αυτά και μόνο τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος Β πράγματι δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τη μέθοδο Α για όλους τους μαθητές;

Απάντηση

Πρώτα πρέπει να προσέξουμε ότι ο ερευνητής έθεσε ένα **συμπερασματικό ερώτημα**. Δηλαδή αν μπορεί να γενικεύσει τα συμπεράσματα από το δείγμα στον πληθυσμό. Στη συνέχεια πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι καθένας από τους μέσους όρους των δειγμάτων είναι ένα στατιστικό και έτσι πάντα υπάρχει περιθώριο λάθους. Αυτό το λάθος εκφράζεται από το τυπικό σφάλμα κάθε κατανομής, γιατί μην ξεχνάμε ότι το τυπικό σφάλμα μάς παρέχει ένα μέτρο για να εκτιμήσουμε τη διαφορά που αναμένεται μεταξύ του στατιστικού και της αντίστοιχης παραμέτρου. Επομένως, για να απαντήσουμε στο ερώτημά μας, πρέπει να γνωρίζουμε το τυπικό σφάλμα.

Ας δούμε πώς διαμορφώνεται η απάντηση στην περίπτωση που ο ερευνητής βρήκε $\sigma_{\overline{X}} = 5$ και για τις δύο ομάδες ή $\sigma_{\overline{X}} = 2$ και για τις δύο ομάδες.

Ακολουθούν γραφικά τα συμπεράσματα αυτά.



Τα ύψη των ορθογωνίων στα σχήματα αντιστοιχούν στους δύο δειγματικούς μέσους και το ευθύγραμμο τμήμα I δείχνει πώς μεταβάλλεται το ύψος των ορθογωνίων υπολογίζοντας το τυπικό σφάλμα.

Έτσι, αν $\sigma_{\overline{X}} = 5$, τότε ο μέσος μ του πληθυσμού για τη μέθοδο Α, που είναι $\bar{x} = 23$, θα μεταβάλλεται στο διάστημα $[18, 28]$, δηλαδή $23 - \sigma_{\overline{X}} \le \mu \le 23 + \sigma_{\overline{X}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 18 \le \mu \le 28$. Αντίστοιχα, για τη μέθοδο Β θα είναι $24 \le \mu \le 34$. Δηλαδή, όταν έχουμε $\sigma_{\overline{X}} = 5$, ο ερευνητής δεν μπορεί να συμπεράνει για τη διαφορά των δύο διδακτικών μεθόδων, γιατί το μέγιστο της μεθόδου Α, που είναι 28, είναι μεγαλύτερο του ελάχιστου της μεθόδου Β, που είναι 24. Με άλλα λόγια έχουμε μερική επικάλυψη των δύο διαστημάτων.

Αν όμως $\sigma_{\overline{X}} = 2$, τότε τα διαστήματα τιμών του μέσου μ για τις μεθόδους Α και Β θα είναι $21 \le \mu \le 25$ και $27 \le \mu \le 31$ αντιστοίχως. Σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε επικάλυψη των δύο διαστημάτων. Εδώ ο ερευνητής μπορεί να πει με βεβαιότητα ότι η μέθοδος Β είναι καλύτερη της μεθόδου Α κατά μέσο όρο.

Με το παράδειγμα αυτό δώσαμε έμφαση στο ό,τι από μόνοι τους οι μέσοι όροι δεν μας δίνουν πληροφορίες για να απαντούμε με βεβαιότητα σε ερωτήματα που έχουν σχέση με συμπεράσματα συγκρίσεων. Χρειάζεται να λαμβάνουμε υπόψη μας και τα περιθώρια λάθους.

Σημειώνουμε ότι, όπως έχουμε δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$, μπορούμε να έχουμε και δειγματική κατανομή της τυπικής απόκλισης s.

Πράγματι, αν πάρουμε όλες τις τυπικές αποκλίσεις των δειγμάτων μεγέθους ν από έναν πληθυσμό, τότε για το πρώτο δείγμα θα έχουμε τυπική απόκλιση s_1, για το δεύτερο s_2 κ.λπ.

Αν κατασκευάσουμε την κατανομή s όλων αυτών των τυπικών αποκλίσεων (δειγματική κατανομή της τυπικής απόκλισης s), αυτή θα έχει μια μέση τιμή $\bar{s}$ και μια τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{s}}$. Η τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{s}}$ μετρά τη διαφορά της $\bar{s}$ από την τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού. Το $\sigma_{\bar{s}}$ θα το λέμε, σε αντιστοιχία με το $\sigma_{\overline{X}}$, τυπικό σφάλμα τυπικής απόκλισης. Δηλαδή για το τυπικό σφάλμα μπορούμε να έχουμε γενικά τον ακόλουθο συμβολισμό:

Τυπικό σφάλμα = $\sigma_{\text{στατιστικό}}$

Όλα τα τυπικά σφάλματα (μέσου, τυπικής απόκλισης κ.λπ.) **επηρεάζονται από τη μεταβλητότητα των δεδομένων** (όσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητα, τόσο μικρότερο είναι το τυπικό σφάλμα) και από **το μέγεθος του δείγματος** (όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος, τόσο μικρότερο είναι το τυπικό σφάλμα).

- *Ερωτήσεις κατανόησης*

1. Τι είναι στατιστική εκτίμηση;
2. Πώς καθορίζεται η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος;
3. Σε μια συστηματική δειγματοληψία το βήμα είναι 20 και ο πρώτος αριθμός που κληρώθηκε είναι ο 12. Ποιοι είναι οι επόμενοι 9 αριθμοί που επιλέχθηκαν;
4. Από έναν πληθυσμό μεγέθους $N = 8$ παίρνουμε δείγματα μεγέθους $\nu = 3$ με επανατοποθέτηση. Το πλήθος όλων των δυνατών δειγμάτων είναι 3^8. Σ □ Λ □
5. Η δειγματική κατανομή του μέσου $\overline{X}$ που κατασκευάζουμε από πεπερασμένο πληθυσμό μεγέθους N και δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση έχει τυπικό σφάλμα $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}$. Σ □ Λ □
6. Να σχεδιάσετε δύο κανονικές κατανομές με τον ίδιο μέσο μ και τυπικές αποκλίσεις $\sigma = 4$ και $\sigma = 2$.
7. Να ορίσετε την έννοια της δειγματικής κατανομής.
8. Οι μαθητές ενός σχολείου θα εξεταστούν στα Μαθηματικά σε 18 ερωτήσεις. Από αυτές, οι 7 θα είναι απλές, οι 8 μέτριες και οι 3 δύσκολες. Οι ερωτήσεις θα ληφθούν με συστηματική δειγματοληψία από τον κατάλογο των ερωτήσεων που περιέχει 200 απλές, 160 μέτριες και 100 δύσκολες. Να δώσετε (υποθετικά) τις ερωτήσεις στις οποίες θα απαντήσουν οι μαθητές.
9. Δίνεται ο πληθυσμός 3, 4, 6, 8 και 9. Να πάρετε όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους $\nu = 2$, κάνοντας δειγματοληψία με επανατοποθέτηση. Στη συνέχεια να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων των μέσων όρων και το αντίστοιχο ιστόγραμμα κατανομής συχνοτήτων.
10. Ποια είναι τα σημαντικότερα κριτήρια επιλογής δειγματοληψίας;
11. Ποιοι είναι οι κυριότεροι παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται το μέγεθος ν του δείγματος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μέσα (εργαλεία) συλλογής δεδομένων

4.1 Γενικά

Η συλλογή δεδομένων είναι από τα σπουδαιότερα μέρη της έρευνας, γιατί τα όποια συμπεράσματα θα στηριχθούν ακριβώς σε ό,τι θα αποκαλυφθεί από τα δεδομένα. Γι' αυτό, το **είδος** των δεδομένων που θα συγκεντρωθούν, η **μέθοδος** συλλογής τους που θα χρησιμοποιηθεί και το **εύρος** των δεδομένων θα πρέπει να προσεχθούν ιδιαίτερα.

Ο όρος **«δεδομένα»** (data) αναφέρεται στο είδος των πληροφοριών που συγκεντρώνει ο ερευνητής για τα άτομα ή τα αντικείμενα ερευνών. Δημογραφικές πληροφορίες (ηλικία, γένος, εθνικότητα, θρήσκευμα κ.λπ.), εμπορικές πληροφορίες (προτίμηση προϊόντων), μορφές αποταμίευσης (καταθέσεις σε τράπεζες, ομόλογα, μετοχές κ.λπ.), απαντήσεις σε προφορικές συνεντεύξεις, απαντήσεις σε ερωτηματολόγιο, πληροφορίες από καταχωρημένα στοιχεία για μαθητές και διδακτικό προσωπικό κ.λπ. είναι όλα δεδομένα τα οποία θα χρησιμοποιήσει ο ερευνητής, ανάλογα με το πρόβλημα που μελετά. Είναι φανερό ότι μία από τις πιο σημαντικές αποφάσεις του ερευνητή, κατά τη διάρκεια του σχεδιασμού της έρευνας, είναι το είδος των δεδομένων που θα συγκεντρώσει και η διαδικασία με την οποία θα γίνει αυτό.

Ο όρος **«μέσα»** συλλογής δεδομένων αναφέρεται σε οτιδήποτε (ένα τεστ, ένα ερωτηματολόγιο, μια συνέντευξη, μια γραπτή αναφορά, μια παρατήρηση, ένα καταχωρημένο υλικό κ.λπ.) μας βοηθά να συγκεντρώσουμε το απαιτούμενο υλικό, δηλαδή να **μετρήσουμε τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής** για την έρευνα που κάνουμε. Ποιο είναι το καλύτερο μέσο για τη συλλογή των δεδομένων είναι ένα άλλο θέμα και εξαρτάται από την ίδια την έρευνα και τις δυνατότητες του ερευνητή.