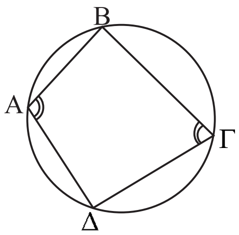
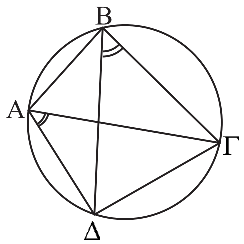
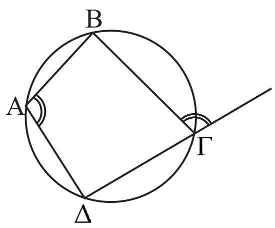


Σχήμα 16



Σχήμα 17



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Η γωνία $\hat{Α}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓΔ}$, ενώ η $\hat{Γ}$ στο $\overset{\frown}{ΒΑΔ}$, με $\overset{\frown}{ΒΓΔ} + \overset{\frown}{ΒΑΔ} = 4\llcorner$ (σχ.16). Επομένως $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2\llcorner$.

ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($Δ\hat{Α}Γ$ και $Δ\hat{Β}Γ$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ.17).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγράψιμο* όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.

Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές.

Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

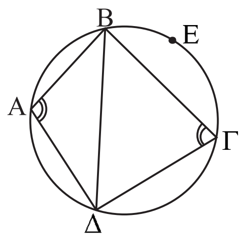
ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

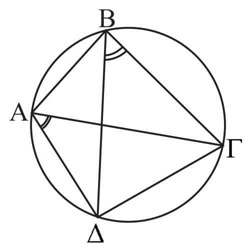
i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

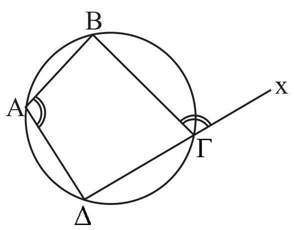
iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{BA\Delta}}$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\mathrm{BE\Delta}}$ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $\overset{\frown}{\mathrm{BE\Delta}}$ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα Α, Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. §6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α, Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}B = \hat{A}$ (σχ. 21), τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου i).

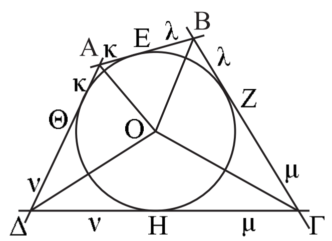
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται *περιγεγραμμένο* στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται *εγγεγραμμένος* στο τετράπλευρο αυτό.

(Α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ:
- **i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.**
- **ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.**

(Β) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:
- **i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.**
- **ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.**

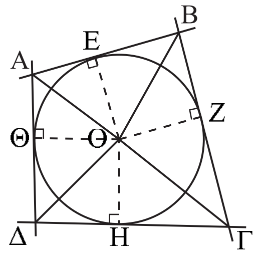


Σχήμα 22

Απόδειξη

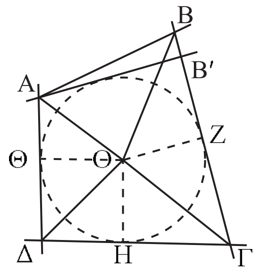
(Α) Απλή (βλ. σχ.22).

(Β) i) Από το σημείο τομής Ο των διχοτόμων φέρουμε τις κάθετες ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα (σχ.23). Το Ο ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$ ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ, ΑΔ, συνεπώς ΟΕ = ΟΘ. Ανάλογα έχουμε ότι ΟΕ = ΟΖ = ΟΗ, οπότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ανήκουν σε κύκλο (Ο, ΟΕ) και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο.



Σχήμα 23

ii) Έστω ότι ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ (1). Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο και από το Ο φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, ΟΘ⊥ΑΔ, ΟΗ⊥ΓΔ και ΟΖ⊥ΒΓ (σχ.24). Τότε ΟΘ = ΟΗ = ΟΖ και ο κύκλος (Ο, ΟΘ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ΑΒΓΔ. Έστω ότι δεν εφάπτεται στην ΑΒ. Φέρουμε την εφαπτομένη από το Α στον κύκλο (Ο, ΟΘ) η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Β′. Το τετράπλευρο ΑΒ′ΓΔ είναι περιγεγραμμένο, οπότε



Σχήμα 24

$$ΑΒ' + ΓΔ = ΑΔ + Β'Γ \qquad (2).$$

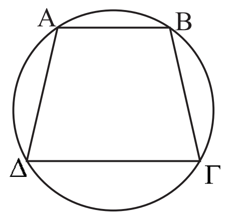
Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$ΑΒ - ΑΒ' = ΒΓ - Β'Γ \quad ή \quad ΑΒ = ΑΒ' + ΒΒ',$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά ΑΒ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 25

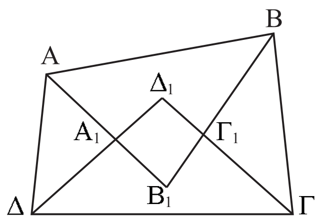
Απόδειξη

Αν το ΑΒΓΔ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{Α} = \hat{Β}$, $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ και $\hat{Α} + \hat{Δ} = \hat{Β} + \hat{Γ} = 2L$.

Επομένως θα είναι και $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2L$, οπότε είναι εγγράψιμο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.



Σχήμα 26

Απόδειξη

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ.26). Τότε έχουμε ότι

$$Β_1\hat{Α}_1Δ_1 = Α\hat{Α}_1Δ = 2L - \left(\frac{\hat{Α} + \hat{Δ}}{2}\right) \quad \text{και} \quad Δ_1\hat{Γ}_1Β_1 = Β\hat{Γ}_1Γ = 2L - \left(\frac{\hat{Β} + \hat{Γ}}{2}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$Β_1\hat{Α}_1Δ_1 + Δ_1\hat{Γ}_1Β_1 = 4L - \left(\frac{\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} + \hat{Δ}}{2}\right) = 2L,$$

επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:*

i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα. □Σ □Λ

ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. □Σ □Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:*

α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\llcorner$ *β.* $\hat{A} = \hat{\Gamma}$

γ. $\hat{A} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$ *δ.* $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ *ε.* $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;*

4. *i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;*

ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. *Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;*

6. *Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι* $\hat{A} = 120°$ *και* $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 80°$. *Να βρείτε τις γωνίες* $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ *και* $\hat{\Delta}$ *του τετραπλεύρου.*

2. *Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ'//ΔΔ'.*

2. *Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.*

3. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.*

4. *Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (Ο, R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι* $OA \perp \Delta E$ *(Θεώρημα Nagel).*

2. *Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (Ο, R) και οι εφαπτόμενες* ε_1 *και* ε_2 *στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις* ε_1 *και* ε_2 *στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.*

3. *Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
- *i) δύο δοσμένα σημεία,*
- *ii) τρία δοσμένα σημεία,*
- *iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,*

και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.

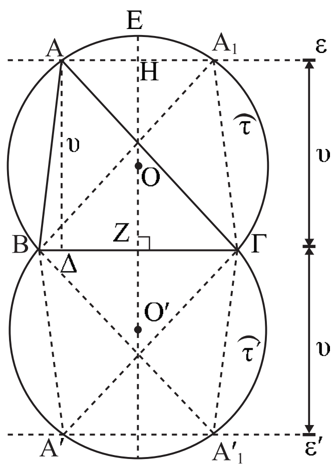
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, όπου α, υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω. Επειδή $\hat{A}$ = ω η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27

Σύνθεση. Με χορδή τμήμα ΒΓ = α γράφουμε τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που δέχονται γωνία ω. Στη συνέχεια σε απόσταση ΖΗ = υ από τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες ε, ε′//ΒΓ που τέμνουν τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$. Αν Α είναι ένα από τα σημεία τομής των T_1, T_2, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη. Το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A} = \omega$, αφού το Α είναι σημείο π.χ. του τόξου $\overset{\frown}{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία ω.

Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι T_1 και T_2 να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν ΑΔ < ΕΖ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{\tau}$ σε δύο σημεία Α και A_1 και η ε′ τέμνει το $\overset{\frown}{\tau'}$ στα Α′ και A_1', οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν ΑΔ = ΕΖ, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}$, το Ε, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ και η ε′ έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau'}$, το Ε′, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο Ε′ΒΓ. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν ΑΔ > ΕΖ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των T_1, T_2 και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ = α, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή Α. Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

i) βλέπει το τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία ω και

ii) απέχει από την πλευρά ΒΓ, γνωστή απόσταση υ.

Επομένως το Α είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους T_1, T_2 στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των T_1, T_2 είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:

i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή

ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή

iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.

Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

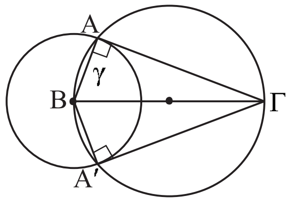
Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ = α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1∟$, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:

i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β, γ), και

ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.



Σχήμα 28

Σύνθεση. Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α′. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

Απόδειξη. Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1∟$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β, γ).

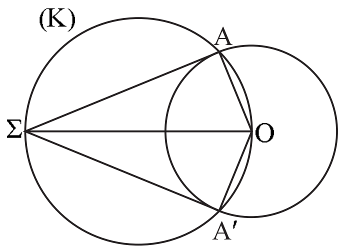
Διερεύνηση. Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν $α > γ$. Όταν $α \leq γ$, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $O\hat{A}Σ$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο, R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.



Σχήμα 29

Σύνθεση. Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο, R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

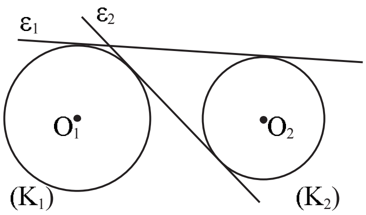
Απόδειξη. Είναι $O\hat{A}Σ = O\hat{A}'Σ = 1∟$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο, R).

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (Ο, R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (Ο, R).

Συμπέρασμα:

Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

► Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων



Σχήμα 30

Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2). Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται ***κοινή εφαπτομένη*** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως ***εξωτερική***, όπως η ε_1, όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως ***εσωτερική***, όπως η ε_2, όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.

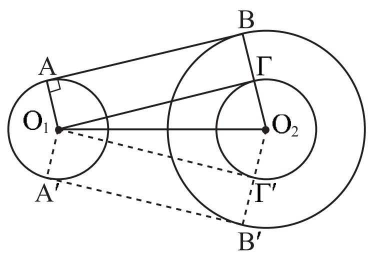
Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, ρ), (O_2, R) με $R > \rho$ και $O_1O_2 > R - \rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

Ανάλυση. Έστω ΑΒ μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1, ρ), (O_2, R), όπου Α, Β τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31). Τότε οι ακτίνες O_1A, O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ, που τέμνει την O_2B στο Γ, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Έτσι $O_1Γ \perp O_2Γ$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2Γ = O_2B - BΓ = O_2B - O_1A = R - \rho$ εφάπτεται στην $O_1Γ$ στο Γ.



Σχήμα 31

Σύνθεση. Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R - \rho$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2Γ$, $O_2Γ'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2, R) στα Β, Β′ και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου (O_1, ρ) παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες ΑΒ και Α′Β′ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

Απόδειξη. Το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ έχει, από την κατασκευή, $O_1A // ΓB$ και $ΓB = O_2B - O_2Γ = R - (R - \rho) = O_1A$, δηλαδή $O_1A =// ΓB$, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η γωνία του $\hat{Γ}$ είναι ορθή, αφού η $O_1Γ$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(O_2, R - \rho)$ το $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες O_1A και O_2B είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως η ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η ΑΒ είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η Α′Β′ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.

Διερεύνηση. Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ από το O_1 προς τον κύκλο $(O_2, R-ρ)$. Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το O_1 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου $(O_2, R-ρ)$, το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $O_1O_2 > R-ρ$. Επομένως, όταν $O_1O_2 > R-ρ$ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων $(O_1, ρ)$ και (O_2, R).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνονται δύο κύκλοι $(O_1, ρ)$ και (O_2, R) με $O_1O_2 > R+ρ$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που*

- *i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο,*
- *ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β,*
- *iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε,*
- *iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,*
- *v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,*
- *vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,*
- *vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα ΑΒ υπό ορισμένη γωνία ω.*

2. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζεται όταν δίνονται:*

- *i) δύο κάθετες πλευρές του.* ☐ Σ ☐ Λ
- *ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα.* ☐ Σ ☐ Λ
- *iii) μία οξεία γωνία του.* ☐ Σ ☐ Λ
- *iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του.* ☐ Σ ☐ Λ
- *v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα.* ☐ Σ ☐ Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:*

- *i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,*
- *ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.*

2. *Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:*

- *i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,*
- *ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.*

3. *Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.*

4. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.*

2. *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου Α πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο Β.*

3. *Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Οι κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$∟) κι-*

νούνται πάνω στις Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της υποτείνουσας ΒΓ.

4. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1⌊) του οποίου δίνονται:
   i) η διάμεσος ΑΜ = μ και μία κάθετη πλευρά.
   ii) η διάμεσος ΑΜ = μ και το ύψος ΑΔ = λ.

Σύνθετα Θέματα

1. Από ένα μεταβλητό σημείο P της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.
2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:
   i) η πλευρά ΒΓ = λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΑΜ = μ.
   ii) η πλευρά ΒΓ = λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΒΝ = μ.
3. Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β, Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Bx και By στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Bx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:
   i) τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά,
   ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,
   iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.
2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.
3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B}$ = ω, $\hat{\Gamma}$ = φ και την περίμετρό του δ.
4. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β, Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.
5. Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).
6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
7. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.
8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, ΓH_3 τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
   i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,
   ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,
   iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, i = 1, 2, 3 είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Εγγεγραμμένη γωνία

i) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

ii) Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

iii) Κάθε εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Εγγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Περιγεγραμμένο τετράπλευρο

Ιδιότητες

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Περιγράψιμο τετράπλευρο

Κριτήρια

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές