

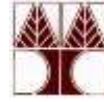


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελετώντας τον σχεδιασμό και τις δυνατότητες
παιδαγωγικής αξιοποίησης του ψηφιακού υλικού
για την διδασκαλία των μαθηματικών:
Η περίπτωση των μικροπειραμάτων

Συγγραφέας

Σαλλιάρη Μαρίνα

A.M. Δ201435

Επιβλέπων καθηγητής

Γεώργιος Ψυχάρης

Αθήνα, 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική
και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την 13.1.2017 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
❖ Γ. Ψυχάρης	Επιμ. Καθηγητή
❖ Π. Κωνηγός	Καθηγητή
❖ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε
υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα
❖ Γ. Ψυχάρης (Επιβλέπων)	Επιμ. Καθηγητή
❖ Π. Κωνηγός	Καθηγητή
❖ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- ❖ Τον κ. Ψυχάρη Γεώργιο για την βοήθεια του στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας, ως επιβλέπων.
- ❖ Τον κ. Κυνηγό Πολυχρόνη και την κα. Πόταρη Δέσποινα για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.
- ❖ Όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών», για τις γνώσεις που μου πρόσφεραν.

Επιπλέον, ευχαριστώ τους φίλους μου, αλλά συγκεκριμένα τον Δημήτρη, για την υποστήριξη τους στις δύσκολες στιγμές που εμφανίστηκαν κατά την διάρκεια των σπουδών.

Τέλος, ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου, την οικογένεια μου που με στηρίζουν πάντοτε.

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη	8
1. Εισαγωγή	9
2. Θεωρητικό πλαίσιο.....	11
2.1 Ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών	11
2.2 Ψηφιακά υλικά	15
2.2.1 Λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας	16
2.2.2 Διαδικτυακά ψηφιακά υλικά	17
2.2.2.1 Διαδικτυακά αποθετήρια - Φωτόδεντρο	18
2.2.2.2 Μικροπειράματα.....	22
2.3 Αξιολόγηση ψηφιακών υλικών.....	24
2.3.1 Σχεδιασμός υλικού.....	25
2.3.2 Αξιολόγηση της ποιότητας των ψηφιακών υλικών.....	26
2.3.3 Κατηγοριοποίηση αλληλεπιδράσεων.....	31
2.3.4 Λειτουργίες του συρσίματος	34
2.3.5 Ανθεκτικές και Εύπλαστες κατασκευές.....	35
2.3.6 Επίπεδα ενσωμάτωσης των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας	35
3. Μεθοδολογία.....	36
3.1 Στόχοι της έρευνας – Ερευνητικά ερωτήματα	36
3.2 Πλαίσιο της έρευνας.....	36
4. Πλαίσια κατηγοριοποίησης και αποτίμησης ψηφιακών υλικών.....	37
5. Ανάλυση χαρακτηριστικών μικροπειραμάτων	38
5.1 Κατηγοριοποίηση μικροπειραμάτων.....	38
5.2 Ποιοτική ανάλυση χαρακτηριστικών μικροπειραμάτων.....	40
5.2.1 Μικροπείραμα: Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου.....	40
5.2.2 Μικροπείραμα: Πολυγωνική σπείρα.....	45
5.2.3 Μικροπείραμα: Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη	53
5.2.4 Μικροπείραμα: Μία ιδιότητα της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων	59
5.2.5 Μικροπείραμα: Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου.....	63
5.2.6 Μικροπείραμα: Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβάδόν	72
5.2.7 Μικροπείραμα: Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου	80
5.2.8 Μικροπείραμα: Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου.....	87
5.3 Τροποποίηση μικροπειράματος.....	95
5.3.1 Μικροπείραμα: Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη	95
6. Συζήτηση & Συμπεράσματα	97
7. Βιβλιογραφία	102
8 Παράρτημα	112

Λίστα εικόνων

Εικόνα 1: Παροχές του "Ψηφιακού σχολείου"	19
Εικόνα 2: Ιστοσελίδα του "Φωτόδεντρου"	20
Εικόνα 3: Εμφάνιση μεταδεδομένων μικροπειράματος στην ιστοσελίδα του "Φωτόδεντρου"	24
Εικόνα 4: Αρχική δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου "	41
Εικόνα 5: Δεύτερη δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου "	42
Εικόνα 6: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος «Πολυγωνική σπείρα»	45
Εικόνα 7: Βήμα 2 του ψηφιακού υλικού «Πολυγωνική σπείρα»	46
Εικόνα 8: Βήμα 3 του ψηφιακού υλικού «Πολυγωνική σπείρα»	46
Εικόνα 9: Στατική απεικόνιση των βημάτων δημιουργίας της πολυγωνικής σπείρας στο μικροπείραμα "Πολυγωνική σπείρα".	47
Εικόνα 10: Τελική εμφάνιση του βήματος 3 στο μικροπείραμα "Πολυγωνική σπείρα"	47
Εικόνα 11: Βήμα 4 από το μικροπείραμα "Πολυγωνική Σπείρα"	48
Εικόνα 12: Εκφώνηση και βοήθεια βήματος 4 του μικροπειράματος «Πολυγωνική Σπείρα»	48
Εικόνα 13: Τελικό βήμα του ψηφιακού υλικού "Πολυγωνική Σπείρα"	49
Εικόνα 14: Εκφώνηση και βοήθεια βήματος 5 του μικροπειράματος «Πολυγωνική Σπείρα»	49
Εικόνα 15: Απάντηση βήματος 5 του μικροπειράματος «Πολυγωνική Σπείρα»	49
Εικόνα 16: Αρχική παρουσίαση του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"	53
Εικόνα 17: Βοήθεια στην δραστηριότητα 1 του μικροπειράματος «Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη»	54
Εικόνα 18: Βοηθητικό κείμενο δραστηριότητας 1 του μικροπειράματος «Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη»	54
Εικόνα 19: Δραστηριότητα 2 του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"	54
Εικόνα 20: Τετραγωνισμός των μηνίσκων του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"	55
Εικόνα 21: Μικροπείραμα " Μία ιδιότητα της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων "	60
Εικόνα 22: Ιστορικό σχόλιο του μικροπειράματος «Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου»	64
Εικόνα 23: Μοντέλο Σκοτεινού Θαλάμου του μικροπειράματος «Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου»	64
Εικόνα 24: Δραστηριότητα του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"	65
Εικόνα 25: Βοήθεια 1 ^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"	65
Εικόνα 26: Βοήθεια 2 ^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"	66
Εικόνα 27: Βοήθεια 3 ^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"	66
Εικόνα 28: Βοήθεια 4 ^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"	66
Εικόνα 29: Ανατροφοδότηση σε μορφή κειμένου της δραστηριότητας του μικροπειράματος " Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου "	68
Εικόνα 30: Σφάλμα ανατροφοδότησης του μικροπειράματος" Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου "	68
Εικόνα 31: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	72
Εικόνα 32: Αρχική βοήθεια μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	72

Εικόνα 33: Αρχική παρουσίαση του βήματος 1 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	73
Εικόνα 34: Εμφάνιση συνάρτησης του βήματος 1 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	73
Εικόνα 35: Αρχική παρουσίαση του βήματος 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	74
Εικόνα 36: Κίνηση του δρομέα και εμφάνιση της δραστηριότητα στο βήμα 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	74
Εικόνα 37: Κείμενο διερεύνησης στο βήμα 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	75
Εικόνα 38: Εκφώνηση και βοήθεια για το βήμα 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	75
Εικόνα 39: Βοηθητικό κείμενο του βήματος 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "	76
Εικόνα 40: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος «Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου».....	80
Εικόνα 41: Πρώτη δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"	81
Εικόνα 42: Εμφάνιση αλλαγών με την μεταβολή του δρομέα ν, του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"	81
Εικόνα 43: Δεύτερη δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"	82
Εικόνα 44: Σύνολο πινάκων για τις τιμές των περιμέτρων στη δραστηριότητα 2 του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"	82
Εικόνα 45: Αρχική παρουσίαση της δραστηριότητας 3 του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"	83
Εικόνα 46: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	87
Εικόνα 47: Γραμμή εργαλείων του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	87
Εικόνα 48: Βήμα 1 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	87
Εικόνα 49: Εμφάνιση κειμένου σε περίπτωση λανθασμένης εισαγωγής τιμής από τον μαθητή του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	88
Εικόνα 50: Εμφάνιση κειμένου σε περίπτωση σωστής εισαγωγής τιμής από τον μαθητή του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	88
Εικόνα 51: Βήμα 2 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	88
Εικόνα 52: Βήμα 3 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	89
Εικόνα 53: Βήμα 4 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	89
Εικόνα 54: Αρχική παρουσίας βήματος 5 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	89
Εικόνα 55: Βοηθητικά βήματα για την κατασκευή του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	90
Εικόνα 56: Βήμα 6 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	90
Εικόνα 57: Βήμα 7 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	91
Εικόνα 58: Βήμα 8 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου».....	91
Εικόνα 59: Προτεινόμενη τροποποίηση μικροπειράματος "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"	96

Λίστα πινάκων

Πίνακας 1: Περιγραφή μεταδεδομένων ΜΑ	22
Πίνακας 2: Πλαίσιο ποιοτικής αποτίμησης ψηφιακών υλικών.....	38
Πίνακας 3: Λογισμικά που εμφανίζονται στο πλήθος των μικροπειραμάτων	39
Πίνακας 4:Κατηγορίες με βάση την μαθηματική δραστηριότητα που περιέχουν τα μικροπειράματα του ΛΔΓ.	39
Πίνακας 5: Εμφάνιση λειτουργιών συρσίματος στα μικροπειράματα.	40
Πίνακας 6: Επίπεδα ενσωμάτωσης τεχνολογίας μικροπειραμάτων.....	40
Πίνακας 7: Λέξεις κλειδιά του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"	Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.
Πίνακας 8: Γενικά στοιχεία από την ποιοτική ανάλυση των χαρακτηριστικών των μικροπειραμάτων.....	98
Πίνακας 9: Αλληλεπιδράσεις που εμφανίζονται στα μικροπειράματα.....	Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.

Περίληψη

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην διδασκαλία των μαθηματικών, που αποτελεί κεντρικό στόχο πολλών προγραμμάτων σπουδών, συνοδεύεται από την ανάπτυξη ποικιλίας υλικών ψηφιακής τεχνολογίας (“digital resources”). Η ερευνητική κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών προκρίνει την χρήση των υλικών αυτών με σκοπό την υποστήριξη της δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων και την ενίσχυση της διερευνητικής μάθησης. Η παρούσα διπλωματική εργασία θα εστιαστεί στην μελέτη μιας κατηγορίας υλικών ψηφιακής τεχνολογίας, τα μικροπειράματα, που σχεδιάστηκαν για το σκοπό αυτό και διατίθεται στους Έλληνες εκπαιδευτικούς των μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση μέσα από τα επίσημα αποθετήρια του ΥΠΑΙΘ/ΕΑΙΤΥ 'Φωτόδεντρο' (<http://photodentro.edu.gr>) και 'Διαδραστικά Βιβλία' (<http://ebooks.edu.gr>). Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος, η εργασία θα εστιαστεί στην σύνθεση του θεωρητικού πλαισίου για την μελέτη της παιδαγωγικής αξιοποίησης των ψηφιακών υλικών. Στο δεύτερο μέρος, γίνεται η αποτίμηση της ποιότητας και των δυνατοτήτων της παιδαγωγικής τους αξιοποίησης (potential) στη διδασκαλία των μαθηματικών. Για την ανάλυση αυτή θα χρησιμοποιηθούν θεωρητικά εργαλεία/δομήματα που έχουν αναπτυχθεί στο πλαίσιο ερευνών από το πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών με χρήση ψηφιακών εργαλείων (π.χ. Laborde, 2002). Στο τρίτο μέρος, θα προταθούν μεταβολές στον σχεδιασμό ενός μικροπειράματος για να αναδειχτεί αν και πώς οι μεταβολές αυτές συμβάλλουν στην ενίσχυση της διερευνητικής μάθησης.

Abstract

The integration of technology in the teaching of mathematics is based on the development and use of digital resources. Researchers in the field of mathematics education indicate the critical role of digital resources in supporting students' construction of mathematical meaning mostly through inquiry-based approaches. In this thesis, our focus is on the design and pedagogical potential of “micro-experiments”, a special group of digital resources that are designed to support students' meaningful engagement in mathematics. Micro-experiments are available by the Ministry of Education in the official repository “Fotodentro” (<http://photodentro.edu.gr>) and the interactive books (<http://ebooks.edu.gr>). First, we provide a synthesis of theoretical frameworks developed for addressing the pedagogical potential of digital resources in mathematics education. Then, we use this synthesis of frameworks to evaluate the quality and the pedagogical potential of micro-experiments developed with dynamic geometry software. Finally, we propose some changes in the design of one “micro-experiment”, in order to indicate how the quality of micro-experiments can be further improved.

1. Εισαγωγή

Η αξιοποίηση των τεχνολογιών, εμπλέκουν τους μαθητές σε μαθηματικές δραστηριότητες και συμπεριλαμβάνουν πλήθος μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, οι μαθητές μπορούν να εστιάζονται στην διερεύνηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων και στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων, μέσω των διαθέσιμων εργαλείων των λογισμικών της διδακτικής των μαθηματικών. Παράλληλα, η ενσωμάτωση των τεχνολογιών, προωθεί την διερεύνηση ενός μαθηματικού προβλήματος, αλλά και την συνεργασία των μαθητών. Εντούτοις, η χρήση της τεχνολογίας στην διδακτική των μαθηματικών, μπορεί να περιθωριοποιηθεί (Karut, 1992; Artigue, 2002), οπότε η εισαγωγή της σε ένα διδακτικό σύστημα, είναι απαραίτητο να εξετάζεται συνεχώς (Laborde, 2002).

Η εστίαση σε δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα και η αξιοποίηση αυτών, αναμένεται να αποτελέσει παιδαγωγικό εργαλείο στα χέρια των εκπαιδευτικών και των μαθητών, καθώς η τεχνολογία αναπτύσσεται με ραγδαίους ρυθμούς (Ψυχάρης, 2005; Keisoglou & Kynigos, 2006; Kynigos & Gavriliis, 2006). Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην διδασκαλία των μαθηματικών, ανέδειξε τα ψηφιακά υλικά, τα οποία είναι δομήματα ή εφαρμογές, τα οποία τα τελευταία χρόνια έχουν αυξηθεί μέσω του διαδικτύου και στηρίζονται σε λογισμικά της διδακτικής των μαθηματικών, ενώ άλλα μπορούν να διατίθενται σε μορφή έτοιμων εφαρμογών (Trgalova κ.ά., 2010). Η αφθονία αυτών, σύμφωνα με έρευνα των Trgalova κ.ά. (2009), δυσχεραίνει την εύρεση των κατάλληλων, αλλά και των ποιοτικών υλικών, για την ενσωμάτωση αυτών στην διδασκαλία των μαθηματικών, από τους εκπαιδευτικούς. Επομένως, εμφανίζεται η ανάγκη για αναγνώριση των δυνατοτήτων παιδαγωγικής αξιοποίησης, των διαθέσιμων διαδικτυακών ψηφιακών εργαλείων. Επιπροσθέτως, έρευνες εστίασαν στην ανάπτυξη κριτηρίων, με τα οποία αναλύονται τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε ψηφιακού υλικού, ενώ εστιάζονται σε συγκεκριμένες πτυχές αυτού, με τελικό στόχο την αναγνώριση, των δυνατοτήτων της παιδαγωγικής αξιοποίησης και των λειτουργιών του λογισμικού, στο οποίο διεξάγεται (Trgalova κ.ά., 2010; Mahe & Noel, 2006; Sedig & Sumner, 2006; Holzl, 2001; Trgalova & Jahn, 2013; Healy, 2000; Laborde, 2002). Παράλληλα, διάφορες έρευνες έχουν ασχοληθεί με την δημιουργία ενός ψηφιακού εργαλείου (instrumental genesis) (Verillon & Rabardel, 1995), αλλά και με την ερμηνεία των σχεδιαστικών επιλογών ενός εκπαιδευτικού, κατά την ενασχόληση του με την δημιουργία ενός νέου ψηφιακού υλικού ή με την τροποποίηση ενός προϋπάρχοντος (documental genesis) (Guin & Trouche, 1999). Το σύνολο των προαναφερθέντων ερευνών, επισημαίνουν την αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων στην επέκταση της διερευνητικής μάθησης, από τον εκπαιδευτικό.

Η προσφορά των δυναμικών αναπαραστάσεων των μαθηματικών εννοιών, σε σχολικά εγχειρίδια έχουν δυνατότητες για μετεξέλιξη αυτών. Για παράδειγμα, στην Ελληνική Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μέσω των επίσημων αποθετηρίων του «Φωτόδεντρο» (<http://photodentro.edu.gr>) και των «Διαδραστικών Βιβλίων» (<http://ebooks.edu.gr>), διατίθενται τα «μικροπειράματα», τα οποία είναι ένα είδος ψηφιακού υλικού, που σχεδιάστηκε για να ενισχύσει την μαθηματική εμπειρία των μαθητών, έτσι ώστε οι ίδιοι να ενθαρρυνθούν για μαθηματική δράση, έκφραση και συλλογισμό (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014). Επιπλέον, τα μικροπειράματα μπορούν να αποτελέσουν αφορμή για τη δημιουργία νέου υλικού από τους εκπαιδευτικούς (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014). Επομένως, σύμφωνα με προαναφερθέντες θεωρίες, η μελέτη των υπαρχόντων ψηφιακών υλικών, όπως των μικροπειραμάτων, είναι απαραίτητη.

Η παρούσα διπλωματική εργασία, μελετάει ορισμένο πλήθος μικροπειραμάτων, τα οποία λαμβάνονται από το διαδραστικό σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας Β' Λυκείου. Η ανάλυση αυτή, γίνεται υπό το πρίσμα των θεωρητικών πλαισίων που συνθέτονται για την ολοκλήρωση αυτής. Ειδικότερα, η διαδικασία αυτή βασίζεται στην ανάπτυξη ενός ενιαίου πλαισίου, το οποίο εστιάζει στην περιγραφή των λειτουργιών των ψηφιακών περιβαλλόντων (Sedig & Sumner, 2006) και στην

αναγνώριση των λειτουργιών που παρέχουν τα λογισμικά δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων (ΛΔΧ), για την ανάδειξη των δυνατοτήτων παιδαγωγικής αξιοποίησης, αλλά και των ευκαιριών για διερευνητική μάθηση (Healy, 2000; Trgalova & Jahn, 2013; Trgalova κ.ά., 2010; Laborde, 2002). Επιπλέον, η προτεινόμενη ανάλυση, μπορεί να συνεισφέρει στην μετεξέλιξη των μικροπειραμάτων (Trgalova κ.ά.,2010). Τέλος, στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται προσπάθεια για την ενίσχυση της παιδαγωγικής αξίας και της διερευνητικής μάθησης, ενός μικροπειράματος, μέσω της εφαρμογής ορισμένων μεταβολών στον σχεδιασμό του, οι οποίες βασίστηκαν σε στοιχεία που συλλέχθηκαν κατά την ανάλυση των χαρακτηριστικών αυτού.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών

Στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, η ενσωμάτωση της τεχνολογίας, αποτελεί ένα κύριο θέμα συζήτησης. Είναι ευρέως γνωστό ότι, για την κατάκτηση των αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την ανακάλυψη αφηρημένων εννοιών και διαδικασιών. Ο χειρισμός των προαναφερθέντων αντικειμένων, ο πειραματισμός, καθώς και η παρατήρηση των ιδιοτήτων τους, είναι στοιχεία, με τα οποία ο μαθητής μπορεί να ανακαλύψει τις μαθηματικές έννοιες. Επομένως, η ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών, ευνοεί αυτές τις αφαιρετικές διαδικασίες, καθώς δίνουν την δυνατότητα στους μαθητές για πειραματισμό με τα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία καλούνται να κατασκευάσουν, ενώ παράλληλα, στοιχεία τα οποία δεν απαιτούνται για την ανακάλυψη μιας μαθηματικής έννοιας, εξαλείφονται, με την χρήση της τεχνολογίας (Laborde, 2002).

Ο ρόλος της τεχνολογίας στα νέα μαθησιακά περιβάλλοντα, παρέχει δυνατότητες ενίσχυσης των ψηφιακών αναπαραστάσεων, με αποτέλεσμα οι μαθητές να επηρεάζονται, όσον αφορά τις μαθηματικές έννοιες, που καλούνται να αναγνωρίσουν, να ανακαλέσουν καθώς και να κατασκευάσουν (Artigue, 2000; Heid & Blune, 2008). Επιπλέον, σύμφωνα με την Laborde (2002), η τεχνολογία δίνει νόημα στις μαθηματικές έννοιες, αλλά και αυτές με την σειρά τους, δικαιώνουν την χρήση της τεχνολογίας. Η τεχνολογία προσφέρει την δυνατότητα ανάπτυξης ποικίλων μαθηματικών δραστηριοτήτων, για την προώθηση της διερευνητικής μάθησης, ενώ μπορεί να περιλαμβάνονται διάφορες αλληλεπιδράσεις, όπως τέτοιες μεταξύ αλγεβρικών και γραφικών στοιχείων, αλλά και δυνατότητες χειρισμού πινάκων, φύλλων εργασίας κτλ. (Keitel & Ruthven, 2014). Το πλήθος των δυνατοτήτων αυτών, δημιουργούν νέα αντικείμενα, τα οποία χαρακτηρίζονται από τον όρο «αναπαραστάσεις» (representatives) (Schwartz & Dreyfus, 1995). Οι αναπαραστάσεις αυτές, διευκολύνουν τους μαθητές, για την δημιουργία σημαντικών συνδέσεων ανάμεσα στις διαισθητικές και τις τυπικές ιδέες τους, οι οποίες αφορούν τις μαθηματικές έννοιες που αντιμετωπίζουν (Sinclair κ.ά., 2010). Επιπροσθέτως, οι μαθητές, μέσω της δράσης τους με τις αναπαραστάσεις, έχουν την δυνατότητα να ανακαλύψουν τις αμετάβλητες ιδιότητες αυτών, οι οποίες παρέχουν νέους τρόπους για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, που ενυπάρχουν στις ίδιες (Guin & Trouche, 1998). Τέλος, ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν τη διδακτική των μαθηματικών (Κυνηγός, 2007).

Οι Dubinsky και Tall (1991), σε έρευνα τους, αναφέρονται στον υπολογιστή, ο οποίος χαρακτηρίζεται ως ένα εργαλείο για αναπτυγμένη μαθηματική σκέψη, που αξιοποιείται άμεσα από την διδακτική των μαθηματικών, ενώ παράλληλα, εμπειρικά στοιχεία των ίδιων, έδειξαν ότι η χρήση του υπολογιστή αποδεικνύεται επιτυχημένη, στην εκπαιδευτική διαδικασία, ενισχύοντας το νόημα, μέσω της επεξήγησης και της κατασκευής μαθηματικών αντικειμένων. Θετική επίδραση, είχε στα κίνητρα των μαθητών, η χρήση του υπολογιστή σύμφωνα με αποτελέσματα έρευνας του Hoffkamp (2009), ενώ επισημαίνεται ότι οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να ακολουθήσουν την προσωπική ροή σκέψων τους, μέσω της χρήσης του, καθώς και να αποφύγουν δευτερεύουσες εργασίες, τις οποίες οι ίδιοι χαρακτήριζαν ως «ενοχλητικές».

Στην συνέχεια γίνεται αναφορά, στις δυνατότητες που προσφέρει η ενσωμάτωση της τεχνολογίας ως προς τρεις καταστάσεις, που διακρίνονται μέσω της «διαδραστικότητας» (interactivity) των μαθητών και της τεχνολογίας (Laborde, 2012). Με τον όρο διαδραστικότητα, η Laborde, αναφέρεται στην αλληλεπίδραση που διεξάγεται ανάμεσα στο ψηφιακό περιβάλλον και τον χρήστη αυτού, δηλαδή τον μαθητή. Να σημειωθεί, ότι ο σχεδιασμός της διαδραστικότητας, βασίζεται στις διδακτικές επιλογές του εκπαιδευτικού, ενώ είναι σημαντική η εστίαση σε αυτές, καθώς εξαρτώνται και από τις

δυνατότητες του ψηφιακού περιβάλλοντος, για τις οποίες γίνεται ανάλυση σε διαφορετική ενότητα της διπλωματικής.

- ❖ **Διαδραστικότητα με τους μαθητές:** Η διαδραστικότητα παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης από τους μαθητές, όταν εμπλέκονται με την δραστηριότητα σε ένα ψηφιακό περιβάλλον. Η λήψη πληροφοριών από το ψηφιακό περιβάλλον, ωθούν τους μαθητές να αξιοποιήσουν τις λειτουργίες της τεχνολογίας, για την επίλυση μιας μαθηματικής δραστηριότητας.
- ❖ **Διαδραστικότητα με την διεπαφή (interface):** Ένας τρόπος για αποτελεσματική διαδραστικότητα με την διεπαφή, είναι η εμφάνιση ανατροφοδοτήσεων με την μορφή επεξηγήσεων, οι οποίες θα είναι ευανάγνωστες για τον μαθητή, ενώ θα περιέχουν ορθές μαθηματικές προτάσεις.
- ❖ **Διαδραστικότητα με την μαθηματική δραστηριότητα:** Ο ρόλος της ανατροφοδότησης, κατά την επίλυση ενός προβλήματος, παίζει καταλυτικό ρόλο για την ανάπτυξη των εικασιών και των αποτελεσμάτων, αλλά και στην αλλαγή των στρατηγικών επίλυσης του μαθητή (Brousseau, 1997). Επιπροσθέτως, οι μαθητές μπορούν να εξάγουν πληροφορίες από την ανατροφοδότηση, ακόμα και αν είναι δύσκολο για τους ίδιους, να κατανοήσουν τον λόγο που τα αποτελέσματα τους είναι λανθασμένα. Η ανατροφοδότηση, οδηγεί στην σύγκρουση μεταξύ των αναμενόμενων στοιχείων των μαθητών και της συμπεριφοράς της κατασκευής. Επιπροσθέτως, γίνεται αναφορά στις λειτουργίες του συρσίματος (dragging), οι οποίες παρέχονται από τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας (ΛΔΓ), ως μια ισχυρή πηγή ανατροφοδότησης. Τέλος, να σημειωθεί ότι, η διαδραστικότητα προέρχεται από τον συντονισμό των δυνατοτήτων που προσφέρει το περιβάλλον, αλλά και την επιλογή των μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Το διδακτικό σύστημα, αποτελείται από την σχέση μεταξύ του εκπαιδευτικού, του μαθητή και της μαθηματικής γνώσης. Όταν ένα νέο στοιχείο, εισάγεται στο προαναφερθέν σύστημα, όπως η χρήση της τεχνολογίας, το σύστημα αυτό διαταράσσεται. Επομένως, η εισαγωγή νέων τεχνολογιών σε ένα διδακτικό σύστημα, είναι απαραίτητο να εξετάζεται συνεχώς (Laborde, 2002). Όπως αναφέρει ο Chevallard (1992): «Η εισαγωγή νέων εργαλείων στο διδακτικό σύστημα δεν πρέπει να θεωρείται δεδομένη... Είναι αναγκαίο να ληφθούν υπόψη οι υπάρχουσες διδακτικές πρακτικές/νόρμες, όπως και προβλήματα της διδασκαλίας και της μάθησης που ακόμη και η τεχνολογία δεν μπορεί να παρακάμψει. Αρκετά συχνά, προβλήματα, όπως η ενορχήστρωση της τάξης, αφήνονται να αντιμετωπιστούν από τον εκπαιδευτικό στην τάξη του». Επιπροσθέτως, το διδακτικό σύστημα, υπόκειται σε διάφορους περιορισμούς, όπως τον χρόνο, τις επιλογές που αφορούν την ύλη, οι οποίες βασίζονται στην κοινότητα της τάξης, την εσωτερική δομή της γνώσης των μαθηματικών, καθώς και τις ιδέες των μαθητών. Επομένως, επισημαίνεται η εστίαση στην διδακτική μονιμότητα (didactic permanences), καθώς η ενσωμάτωση της τεχνολογίας δεν έχει την δυνατότητα να αποφύγει ή να επιλύσει ορισμένες προβληματικές καταστάσεις που παρουσιάζονται στην διδακτική και στην μάθηση (Chevallard, 1992). Συνεπώς, είναι απαραίτητη η λήψη αποφάσεων για την εξασφάλιση μιας νέας ισορροπίας (equilibrium), ενώ οι αποφάσεις αυτές συσχετίζονται με διάφορα στοιχεία, τα οποία συνθέτουν την προαναφερθείσα πολυπλοκότητα του διδακτικού συστήματος (Laborde, 2002). Μερικά από αυτά τα στοιχεία, αναλύονται, παρακάτω:

- ❖ **Η μαθηματική γνώση (the domain of knowledge):** Πως επηρεάζονται οι μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, από την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην τάξη? Ποιες απόψεις, των μαθητών, διατηρούνται μέσω αυτής? Γίνεται επανεξέταση αυτών των?
- ❖ **Η αλληλεπίδραση του καθηγητή με τον μαθητή (The interaction between teacher and students):** Από ποιον χρησιμοποιείτε η τεχνολογία και με ποιο σκοπό?

- ❖ **Ο ρόλος της τεχνολογίας και ο τρόπος ενσωμάτωσης, όσον αφορά την διδακτική ύλη και την πρόοδο αυτής** (The place and role of technology with respect to curriculum and to the course of teaching): Μέχρι ποιο σημείο, η χρήση της τεχνολογίας συνδέεται με την σχολική ύλη? Όταν η τεχνολογία χρησιμοποιείται, κάτω από ποιες εξαιρετικές περιπτώσεις εισάγεται μια νέα ιδέα. Επιπλέον, εφαρμόζεται αυτή σε οποιαδήποτε φάση της διδακτικής?

Σε έρευνα της η Artigue (2000), μελέτησε τον περιορισμό της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας και στηρίχθηκε στην άποψη, ότι η τεχνολογία χρησιμοποιείται από το διδακτικό σύστημα, απλά ως ενισχυτής (applifiet) και όχι ως διοργανωτής (reorganizer) (Pea, 1985). Επομένως, για την διερεύνηση του περιορισμού που εμφανίζεται κατά την εφαρμογή των νέων τεχνολογιών στην διδακτική των μαθηματικών, η Artigue (2002) χαρακτηρίζει την ενσωμάτωση της τεχνολογίας, ως «περιθωριακή». Για την υποστήριξη αυτού του χαρακτηρισμού, αναφέρεται σε τέσσερις βασικούς λόγους:

- ❖ Οι δυνατότητες που παρέχει η τεχνολογία, όπως αυτή της οπτικοποίησης, ενισχύουν την μάθηση και την διδακτική. Παρόλα αυτά, οι νόρμες της Διδακτικής των Μαθηματικών, παραμένουν αμετάβλητες. Επομένως, οδηγούμαστε σε έναν αναπόφευκτο, φαύλο κύκλο.
- ❖ Πολύπλοκες διαδικασίες κυριαρχούν στον μετασχηματισμό της μαθηματικής γνώσης, στο πλαίσιο της τάξης. Η χρήση του υπολογιστή, προσφέρει καινούργια επίπεδα πολυπλοκότητας, τα οποία είναι απαραίτητα να αναγνωριστούν, από τους εκπαιδευτικούς, διότι σε διαφορετική περίπτωση, οι μαθηματικές έννοιες, οι οποίες δικαιώνουν την χρήση αυτού, είναι δυνατόν να απορριφθούν.
- ❖ Ακόμα ένα λόγος, για την περιθωριοποίηση της ενσωμάτωσης της τεχνολογίας, είναι η κυρίαρχη αντίθεση, που εμφανίζεται ανάμεσα στην τεχνική και εννοιολογική διάσταση της μαθηματικής δραστηριότητας. Η αντίθεση αυτή, επιτρέπει στην τεχνολογία, την αυτόματη υποβάθμιση της τεχνικής διάστασης, ενώ παράλληλα ενδυναμώνει την εννοιολογική. Οι Trouche, Artigue, καθώς και άλλοι Γάλλοι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών, έχουν υποδείξει τις προσπάθειες, για ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην τάξη, με τις οποίες γίνεται ο απλός διαχωρισμός των δραστηριοτήτων, σε «τεχνικές» και «εννοιολογικές». Όπως αναμένετε, η πολυπλοκότητα της δημιουργίας των εργαλείων (instrumental genesis), στην οποία αναφερόμαστε στην συνέχεια, δεν λαμβάνεται υπόψη, για την προσπάθεια ενσωμάτωσης της τεχνολογίας, η οποία στοχεύει στην εστίαση των μαθητών σε μαθηματικές έννοιες και την απελευθέρωση των διαδικασιών, στις οποίες οι ίδιοι θα προβούν, από τεχνικές λεπτομέρειες.
- ❖ Η προαναφερθείσα υποβάθμιση της πολυπλοκότητας της διαδικασίας της εργαλειοποίησης (instrumentation processes), μπορεί να περιθωριοποιήσει την ενσωμάτωση της τεχνολογίας. Η αναγνώριση των «νέων» μαθηματικών και τεχνολογικών απαιτήσεων, που εμφανίζονται με την ενσωμάτωση της τεχνολογίας, είναι απαραίτητη και χρειάζεται την σύνθεση ενός θεωρητικού πλαισίου, με το οποίο θα αναδεικνύεται η «επίσημη» μαθηματική ύλη, αλλά και μια νέα μαθηματική «γλώσσα», που θα εκφράζει τις γνώσεις των μαθητών.

Η ενσωμάτωση της τεχνολογίας στα σχολικά πλαίσια, μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους. Ειδικότερα, οι Trouche και Drijvers (2013), αναφέρονται στον τρόπο ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στο σχολικό περιβάλλον, ενώ η διάκριση αυτού γίνεται με τον διαχωρισμό σε επίπεδα ανάπτυξης:

- Πρώτο επίπεδο ανάπτυξης:** Σε αυτό το επίπεδο περιλαμβάνεται το σύνολο των ψηφιακών τεχνολογιών που χρησιμοποιούνται στην διδακτική των μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι διαδραστικοί πίνακες, οι φορητοί υπολογιστές, οι αριθμομηχανές, είναι

ψηφιακές τεχνολογίες, τις οποίες μπορούν να έχουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί, στο σχολείο ή ακόμα και στο σπίτι τους. Επιπλέον, το διαδίκτυο, είναι μια ψηφιακή τεχνολογία που χρησιμοποιείται από μεγάλο εύρος ατόμων, η οποία δίνει πρόσβαση σε μαθητές και εκπαιδευτικούς για το διαθέσιμο υλικό, ενώ παράλληλα παρέχει δυνατότητες επικοινωνίας μεταξύ των ατόμων. Τέλος, το διαδίκτυο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο της προόδου των μαθητών.

- ii. **Δεύτερο επίπεδο ανάπτυξης:** Το δεύτερο επίπεδο, στηρίζεται στο πρώτο, μέσω των ατομικών εργασιών, στις οποίες εφαρμόζονται οι δυνατότητες της τεχνολογίας, των μαθητών και εκπαιδευτικών. Ένα παράδειγμα, είναι η εναλλακτική προσέγγιση μιας δραστηριότητας (task), καθώς και η προετοιμασία των μαθητών, για κάποιο διαγώνισμα. Στο παρόν επίπεδο, υπάρχει δυνατότητα ανάπτυξης διδακτικών και αξιολογικών προγραμμάτων, για την πρόοδο των μαθητών, τα οποία μπορούν να δημιουργήσουν οι εκπαιδευτικοί.

Σε έρευνα τους, οι Hoyles κ.ά. (2013), επισήμαναν την σημασία της εστίασης του διδακτικού προγράμματος, που ενσωματώνει τις ψηφιακές τεχνολογίες, τόσο στην μαθηματική ύλη, όσο και στον ρόλο του εκπαιδευτικού, για την χρήση και την ανάπτυξη των ψηφιακών εργαλείων. Η εστίαση αυτή, έχει στόχο την υποστήριξη των αλληλεπιδράσεων των μαθητών, με την τεχνολογία, με τον εκπαιδευτικό και με τους συμμαθητές τους. Επιπλέον, ο ρόλος του εκπαιδευτικού ως σχεδιαστή του εκπαιδευτικού υλικού, καθώς και των στοιχείων του ψηφιακού περιβάλλοντος, που απαιτούνται για την διεξαγωγή της διδακτικής του παρέμβασης, προβάλλεται από τις σύγχρονες αντιλήψεις της διδακτικής των μαθηματικών (Haspekian, 2005; Drijvers, 2012; Kynigos, 2014). Ο νέος ρόλος του «σχεδιαστή», επιτρέπει στον εκπαιδευτικό την δημιουργία του προσωπικού του διδακτικού υλικού, το οποίο μπορεί να επιλέξει, να κατασκευάσει και τέλος να το παρουσιάσει στην τάξη των μαθηματικών (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014).

Επιπλέον, η εμφάνιση πλήθους δυνατοτήτων, που παρέχει ένα ψηφιακό εργαλείο, μπορεί να δυσκολέψει τους μαθητές κατά την κατασκευή νοημάτων και συνδέσμων, στο εσωτερικό του ψηφιακού περιβάλλοντος, αλλά και στις μαθηματικές έννοιες (Noss & Hoyles, 1996; Artigue, 1997; Guin & Trouche, 1998). Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τους Thomas και Lin, 2013, οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να αλλάξουν την παραδοσιακή μαθησιακή τροχιά των μαθητών, ενώ είναι δυνατόν να δυσχεράνουν την ανάπτυξη των διδακτικών στρατηγικών των εκπαιδευτικών. Παράλληλα, η μάθηση βασίζεται τόσο στους μαθηματικούς και διδακτικούς περιορισμούς όσο και στις πιθανότητες για διερεύνηση των μαθηματικών αντικειμένων, μέσω του παρόντος λογισμικού (Dreyfus, 1993).

Επομένως, επισημαίνεται η σημασία της επιλογής, αλλά και ο τρόπος προώθησης των δραστηριοτήτων αυτών, από τον εκπαιδευτικό, με στόχο την αξιοποίηση του μαθησιακού εργαλείου. Η έρευνα των Guin & Trouche (1998), η οποία στηρίχθηκε στην εργαλειακή προσέγγιση (instrumental approach), επικεντρώθηκε στην ανάλυση των περιορισμών και των δυνατοτήτων των δομημάτων (artefact), για να δοθεί προσοχή στην εμπλοκή της μαθηματικής γνώσης με την χρήση του ψηφιακού εργαλείου. Η εργαλειακή προσέγγιση, βασίστηκε στην θεωρία της «δημιουργίας των εργαλείων» (instrumental genesis), η οποία περιγράφει την ανάπτυξη ενός εργαλείου. Την δημιουργία των εργαλείων, υποστηρίζει η αλληλεπίδραση των παρακάτω δυο διαδικασιών, οι οποίες αναδείχθηκαν από τους Verillon και Rabardel (1995).

- ❖ Δημιουργία του εργαλείου (instrumentation): Με την διαδικασία αυτή, το δόμημα (artefact), σχηματίζει την δραστηριότητα του μαθητή.
- ❖ Αλλοίωση του εργαλείου (instrumentalization): Η διαδικασία αυτή δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να σχηματίσει ο ίδιος το δόμημα.

Η ερευνήτρια Laborde (2007), βασίστηκε σε αυτή και διέκρινε δύο επίπεδα ενσωμάτωσης της τεχνολογίας, από τους εκπαιδευτικούς στην διδασκαλία των Μαθηματικών:

- ❖ Στο πρώτο επίπεδο, οι εκπαιδευτικοί έχουν ειδικευτεί στην χρήση της τεχνολογίας για τις μαθηματικές δραστηριότητες.
- ❖ Στο δεύτερο επίπεδο, ο εκπαιδευτικός ενσωματώνει την τεχνολογία για την οργάνωση της μάθησης και συμβάλει σε αυτήν. Για παράδειγμα, οργανώνει δραστηριότητες για να εκμεταλλευτεί την τεχνολογία, αναμένοντας τις δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές, καθώς και τις στρατηγικές επίλυσης, αυτών. Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός καλείται να ερμηνεύσει τις προαναφερθείσες στρατηγικές και να οργανώσει τις συλλογικές δραστηριότητες που οδηγούν στην εσωτερικεύση της γνώσης η οποία διδάσκεται.

Ο σχεδιασμός των ψηφιακών υλικών, ο οποίος επιτρέπει στον εκπαιδευτικό, αλλά και τον προοικαλεί, να τα τροποποιήσει, επεξηγείται με την θεωρία της «δημιουργίας μονάδων διδασκαλίας» (documental genesis) (Gueudet & Trouche, 2009; Guin & Trouche, 1999). Ειδικότερα, είναι μια μέθοδος περιγραφής και μελέτης της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού, ο οποίος κατασκευάζει συνεχώς υλικό, το οποίο μπορεί να δημοσιεύσει σε συναδέλφους του, με στόχο την προώθηση του αναστοχασμού και του διαλόγου, στα πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών. Σύμφωνα με αυτή, μια «μονάδα διδασκαλίας» είναι το σύνολο των πηγών που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός, στο οποίο επισυνάπτεται το σχήμα της χρήσης τους, ενώ παράλληλα έχει δυναμική μορφή. Καθώς η «μονάδα διδασκαλίας» εξελίσσεται, μέσα σε διαφορετικά πλαίσια, οι στάσεις και οι αντιλήψεις του εκπαιδευτικού που το εξελίσσει, είναι διακριτές (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014). Επιπλέον, η ευελιξία (flexibility) που παρέχει η ενσωμάτωση της τεχνολογίας, επιτρέπει στους εκπαιδευτικούς να σχεδιάζουν με ευκολία τις δραστηριότητες που είναι βασισμένες στην τεχνολογία, οι οποίες είναι κατάλληλες για τα προβλήματα που στην συνέχεια θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην τάξη των μαθηματικών (Laborde, 2002).

Τέλος, σύμφωνα με έρευνα των Kortenkamp κ.ά. (2009), παρατηρήθηκε ότι, ενώ υπάρχει πλήθος υλικών που διεξάγονται με την χρήση της διαδραστικής γεωμετρίας (interactive geometry), η ίδια δεν εφαρμόζεται συχνά στις σχολικές τάξεις. Το φαινόμενο αυτό, βασίζεται, μεταξύ άλλων, στην αγνόηση των νέων ενδεχομένων, από τους περισσότερους εκπαιδευτικούς, ενώ αυτό συμβαίνει κυρίως, λόγω της δύσκολης πρόσβασης στο κατάλληλο λογισμικό, αλλά και στο ψηφιακό υλικό (Trgalova 2013). Επομένως είναι σημαντικό, να εστιάσουμε στο πλήθος των διαθέσιμων ψηφιακών υλικών της Διδακτικής των Μαθηματικών, ώστε να είναι διακριτά αυτά τα νέα ενδεχόμενα.

2.2 Ψηφιακά υλικά

Πλήθος μαθηματικών ιδεών ενισχύουν τις λειτουργίες των λογισμικών, αλλά και η ενσωμάτωση των λειτουργιών τους, στην διδασκαλία των μαθηματικών, αναδεικνύουν δυνατότητες για ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές (Trgalova κ.ά., 2010). Για την ενίσχυση της διερευνητικής μάθησης, είναι αναγκαία η παρουσίαση ενός αντικειμένου γνώσης (learning object), στο οποίο θα συμπεριλαμβάνεται η δυνατότητα παιδαγωγικής αξιοποίησης αυτού (Flamand, 2004). Επιπλέον, τα LOM standards (Learning Object Metadata) (2002) κάνουν αναφορά στο παιδαγωγικό υλικό, για το οποίο θεωρούν ότι είναι οποιαδήποτε πηγή, ψηφιακή ή μη, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκπαίδευση, την διδακτική ή και την μάθηση. Ένα παιδαγωγικό υλικό μπορεί να είναι, ένας ψηφιακός πόρος ή ένα ψηφιακό υλικό, το οποίο διατίθεται στην τάξη των μαθηματικών. Κατά συνέπεια, δημιουργήθηκαν τα λεγόμενα ψηφιακά υλικά (resources) για τους εκπαιδευτικούς, τα οποία είναι δομήματα ή εφαρμογές μαθηματικών δραστηριοτήτων.

Τα ψηφιακά υλικά ενσωματώνονται με διαφορετικούς τρόπους στην διδασκαλία των Μαθηματικών, ενώ εξελίσσονται σε διαφορετικές μορφές. Τα ψηφιακά εργαλεία αυτά, περιέχουν διαφορετικά είδη

της μαθηματικής δραστηριότητας, ενώ η χρήση της εκάστοτε τεχνολογίας, γίνεται με διαφορετικό τρόπο και για ξεχωριστό σκοπό. Διάφορες έρευνες, έχουν ασχοληθεί με το πλήθος των εργαλείων αυτών, καθώς και με τις δυνατότητες παιδαγωγικής αξιοποίησης τους (Trgalova κ.ά., 2010; Mahe & Noel, 2006; Sedig & Sumner, 2006; Holzl, 2001; Trgalova & Jahn, 2013; Healy, 2000; Laborde, 2002). Επισημαίνεται ότι, οι έρευνες αυτές, κυρίως εστιάζονται στην μελέτη ψηφιακών υλικών που εξελίσσονται σε ΛΔΓ. Επομένως, η παρούσα διπλωματική εργασία, δίνει μια εκτενής αναφορά των λειτουργιών του προαναφερθέντος λογισμικού της Διδακτικής των Μαθηματικών.

2.2.1 Λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας

Οι ψηφιακές τεχνολογίες και ιδιαίτερα τα λογισμικά πακέτα, γνωστά ως περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας (Geogebra, Sketchpad, Cabri κ.ά.), εφαρμόζονται στην τάξη των Μαθηματικών, ως εργαλεία οπτικοποίησης για την διδασκαλία και την εκμάθηση της γεωμετρίας, αλλά και την ανάπτυξη των αποδεικτικών δεξιοτήτων των μαθητών (de Villers, 2003· Hanna, 2000). Ο όρος δυναμική γεωμετρία, επινοήθηκε από τους Jackiw και Rasmussen και παρουσιάζει το βασικό χαρακτηριστικό των λογισμικών αυτής, που είναι ο συνεχής και σε πραγματικό χρόνο μετασχηματισμός των γεωμετρικών αντικειμένων (ΕΠΕΑΕΚ II, 2008). Ο προαναφερθέν μετασχηματισμός, είναι μια λειτουργία του ΛΔΓ, η οποία βασίζεται στην χρήση του συρσίματος (dragging) των στοιχείων της αναπαράστασης, του ψηφιακού υλικού, με την οποία ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει τις αμετάβλητες γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος που ορίζονται από την κατασκευή του ίδιου (Trgalova κ.ά., 2013). Επιπροσθέτως, η έρευνα του Hoffkamp (2009), επισήμανε ότι τα λογισμικά αυτά, επέτρεπαν την διαδραστικότητα του μαθητή με τα ίδια, ενώ παράλληλα έχουν την δυνατότητα να παρέχουν άμεσες ανατροφοδοτήσεις, για την επιβεβαίωση του αποτελέσματος, στο οποίο καταλήγει ο ίδιος.

Η μαθηματική απόδειξη αποτελεί βασικό πυλώνα της Διδακτικής των Μαθηματικών καθώς υποστηρίζει σε μεγάλο βαθμό τη μαθηματική κατανόηση, ενώ τα ΛΔΓ διευκολύνουν την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης, καθώς προσφέρουν ευκαιρίες για ευρεία μαθηματική διερεύνηση. Η ανάπτυξη των εικασιών από τον μαθητή, είναι μια καθοριστική παράμετρος στην καλύτερη κατανόηση της γεωμετρικής απόδειξης, διότι δίνει την δυνατότητα στον ίδιο, να κάνει συλλογισμούς για την ορθότητα μιας πρότασης και εν συνεχεία να την επαληθεύσει ή να την απορρίψει. Παράλληλα, επισημαίνεται ότι η χρήση των ΛΔΓ, διευκολύνει την υπόδειξη της σημασίας και των περιορισμών μιας απόδειξης, στους μαθητές. Σημειώνεται ότι, τα εργαλεία των λογισμικών, διευκολύνουν τους μαθητές στην εύρεση των ισχυρών δεδομένων, για να υποστηρίξει ενός θεωρήματος. Εν κατακλείδι, παρατηρείτε ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να ενισχύσει την διερεύνηση καθώς και την αυτοπεποίθηση των μαθητών, σε σχέση με το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο που μελετάται. Επιπροσθέτως, η εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή ενός γεωμετρικού προβλήματος, που επιτυγχάνεται προσεγγιστικά με την χρήση του εκάστοτε ΛΔΓ, δίνει την δυνατότητα για κατανόηση της σπουδαιότητας της γεωμετρικής πρότασης που επεξεργάζονται. Μέσω της μελέτης των ιδιοτήτων του αντικειμένου που έχει δοθεί στους μαθητές, με τα εργαλεία που παρέχει το λογισμικό, οι ίδιοι έχουν την ευκαιρία να ελέγξουν υποθέσεις που έχουν δημιουργήσει στην διάρκεια της κατασκευής ή ακόμα και να «ανακαλύψουν» νέες ιδιότητες (Hanna, 2000).

Παρόλα αυτά η χρήση ενός τέτοιου λογισμικού από τον μαθητή και από τον εκπαιδευτικό, ενώ δίνει δυνατότητα για εκτεταμένη παραγωγή εικασιών και υποθέσεων μέσω της διερεύνησης ενός προβλήματος, μπορεί εύκολα να προκαλέσει σύγχυση ανάμεσα στην διερεύνηση και την απόδειξη (Hanna, 2000). Συγχρόνως, σύμφωνα με την Laborde (2005), η διττή φύση της γεωμετρίας, ως θεωρητικού σώματος γνώσεων και ως εργαλείου μοντελοποίησης, αποτελεί συχνά πηγή προβλημάτων για τους μαθητές, που συγχέουν το θεωρητικό επίπεδο με το οπτικό-αντιληπτικό και με τις απαντήσεις τους τείνουν να ικανοποιήσουν κυρίως οπτικούς περιορισμούς (Καλογερία &

Κυνηγός, 2014). Επιπλέον, είναι απαραίτητο να δοθεί προσοχή, από τον εκπαιδευτικό που θα εφαρμόσει τις λειτουργίες του ΛΔΓ για την διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης, καθώς οι περιορισμοί της απόδειξης, πρέπει να είναι πάντα διακριτοί. Συχνά, η απόδειξη έχει κυρίως το νόημα της επικύρωσης της μαθηματικής πρότασης, χωρίς να δίνεται έμφαση σε άλλες σημαντικές λειτουργίες, όπως αυτής της επαλήθευσης, της επεξήγησης, της ανακάλυψης, της επικοινωνίας, της συστηματοποίησης και της διανοητικής πρόκλησης (de Villiers, 1999).

Λαμβάνοντας υπόψη τις δυνατότητες και τους περιορισμούς, που έχει ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, η ανάλυση των υπάρχοντων ψηφιακών υλικών, συνεχίζεται, με στόχο την διάκριση των στοιχείων τους. Επομένως, στην συνέχεια γίνεται αναφορά στο πλήθος των ψηφιακών υλικών, που βασίζονται σε ΛΔΓ και διατίθενται στην κοινότητα, μέσω του διαδικτύου.

2.2.2 Διαδικτυακά ψηφιακά υλικά

Τα διαδικτυακά ψηφιακά υλικά, εμφανίζονται σε αφθονία, ενώ βασίζονται σε διαφορετικές λειτουργίες (Trgalova κ.ά., 2010). Ένα μέρος των ψηφιακών υλικών αυτών, εφαρμόζονται ως έτοιμες ψηφιακές εφαρμογές (applets), οι οποίες παρέχουν πλήθος ειδικών λειτουργιών (Gadanidis κ.ά., 2004; Sedig & Sumner, 2006; Hoffkamp, 2010). Συγχρόνως, μερικά από αυτά, αναπτύσσονται μέσω των λειτουργιών των «black-box» και παρέχουν δυνατότητες στους μαθητές, μέσω αναπαράστασεων στην οθόνη του υπολογιστή τους, ενώ τίθενται στους ίδιους ερωτήματα βασισμένα σε αυτή (Laborde, 2002). Επιπλέον, πλήθος διαδικτυακών ψηφιακών υλικών, στηρίζονται σε διαφορετικά λογισμικά της Διδακτικής των Μαθηματικών και δεν προσφέρουν έτοιμες λειτουργίες, όπως προαναφερθέντα είδη (Trgalova κ.ά., 2010).

Διάφορες έρευνες, έχουν επικεντρωθεί στην ανάδειξη των δυνατοτήτων που παρέχουν τα διαδικτυακά ψηφιακά υλικά. Ειδικότερα, ο Hoffkamp (2010), μελέτησε έτοιμες ψηφιακές εφαρμογές, οι οποίες ήταν ενσωματωμένες σε ορισμένη ιστοσελίδα και έδιναν την δυνατότητα στον χρήστη, για εφαρμογή αυτών, χωρίς την εγκατάσταση ορισμένου λογισμικού, στον υπολογιστή του ίδιου, με αυτό τον τρόπο η χρήση ενός προγράμματος περιήγησης στο διαδίκτυο, ήταν το μοναδικό απαραίτητο ψηφιακό εργαλείο. Επομένως, η εργασία ενός ατόμου, με τέτοιες διαδραστικές δραστηριότητες, δεν απαιτούσε ειδική γνώση για την τεχνολογία. Επιπλέον, οι δραστηριότητες εκμεταλλεύονταν την εμπειρία των μαθητών στη χρήση του διαδικτύου και γενικότερα των ψηφιακών τεχνολογιών (όπως ενέργειες συρσίματος, μετάβαση σε συνδέσμους, χρήση κουμπιών κτλ.). Οι μαθητές καθώς και οι εκπαιδευτικοί, έχουν την δυνατότητα να εργαστούν άμεσα με το πρόβλημα, χωρίς να απαιτείται κάποια ιδιαίτερη γνώση για την χρήση του λογισμικού ή για το μαθηματικό μέρος του λογισμικού. Επιπροσθέτως, έρευνα έδειξε ότι η χρήση των ψηφιακών εφαρμογών από τους εκπαιδευτικούς, ανέδειξε ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, οι οποίες υποστήριζαν την γνωστική ανάπτυξη (Drijvers κ.ά., 2007). Ειδικότερα, δίνεται έμφαση στις ευκαιρίες των μαθητών, για διερευνητική μάθηση, καθώς οι ίδιοι καλούνται να διατυπώσουν ερωτήσεις που συσχετίζονται με την μεταβολή των στοιχείων του λογισμικού, σε σύγκριση με την παραδοσιακή τροχιά της διδασκαλία, με την οποία ο μαθητής καλείται να παρακολουθήσει μια παρουσίαση από μαθηματικές ιδέες, σχεδιασμένη από τον εκπαιδευτικό (Gueudet & Trouche, 2013).

Εντούτοις, οι δυνατότητες των διαδικτυακών ψηφιακών υλικών, περιορίζονται από διάφορους παράγοντες. Το διαδίκτυο καθιστά τις ψηφιακές τεχνολογίες, άμεσα διαθέσιμες στους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές, με αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί να αντιμετωπίζουν δυσκολίες, οι οποίες εμφανίζονται στην πρόσβαση στα ψηφιακά υλικά και στην προετοιμασία αυτών, για την εφαρμογή τους στην τάξη των μαθηματικών. Οι Trouche και Drijvers (2013), εξέφρασαν ως κύριο προβληματισμό, την διαθεσιμότητα των ψηφιακών υλικών στο διαδίκτυο και τις δυνατότητες που περιέχουν στον μαθητή, για αναγνώριση των συνδέσεων μεταξύ των εργαλείων, περιβάλλοντος χαρτί-μολύβι (X-M) και των ψηφιακών περιβαλλόντων. Επιπλέον, η έρευνα των Kortenkamp κ.ά. (2009)

καθώς και των Trgalova κ.ά. (2009), εστιάστηκε στην αντιμετώπιση προβλημάτων που προκύπτουν από τον σχεδιασμό, την διαθεσιμότητα καθώς και την προετοιμασία των ψηφιακών υλικών από τους εκπαιδευτικούς, ενώ επισημαίνεται ότι η εύρεση των κατάλληλων υλικών (resources) για την διδασκαλία των μαθηματικών, παρεμποδίζεται από την αφθονία αυτών, στο διαδίκτυο, ενώ ταυτόχρονα το πλήθος τους, δυσχεραίνει τον εκπαιδευτικό για την εκτίμηση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων που παρέχουν. Επιπλέον, σύμφωνα με έρευνα των Sedig και Sumner (2006), λόγω της μεγάλης διαθεσιμότητας των διαδικτυακών ψηφιακών εφαρμογών (applets), τα ίδια επιδρούν στην μαθηματική σκέψη χιλιάδων μαθητών. Επιπροσθέτως, σύμφωνα με ανάλυση των ερευνητών Gadaniadis κ.ά. (2004), παρατηρήθηκε ότι «πολλές διαδικτυακές ψηφιακές εφαρμογές, όπως αυτής του NCTM, δεν είναι καταλλήλως σχεδιασμένα». Επομένως, επισημαίνεται η ανάγκη για κατάλληλο σχεδιασμό των διαθέσιμων ψηφιακών υλικών.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζεται στα διαδικτυακά ψηφιακά υλικά, τα οποία διεξάγονται σε ΛΔΓ. Τα προαναφερθέντα ψηφιακά υλικά, εστιάζουν στις σχέσεις ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα (σημείων, γραμμών, κύκλων, κ.α.), τα οποία μελετάει ο μαθητής. Παράλληλα οδηγούν τον μαθητή στην διερεύνηση, τον πειραματισμό και την ανακάλυψη, μέσω μιας καθοδηγούμενης ροής δραστηριοτήτων, αλλά και με την παροχή ανοικτών γεωμετρικών προβλημάτων, ώστε να αξιοποιηθούν οι δυνατότητες διερεύνησης, εκ μέρους του μαθητή. Εντούτοις, είναι σημαντικό να αναγνωρίζονται και οι περιορισμοί της ενσωμάτωσης ενός ΛΔΓ στην διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς έχει παρατηρηθεί ότι δραστηριότητες που καθοδηγούν τους μαθητές σε αναστοχασμό των μαθηματικών εννοιών, δεν είναι εύκολο να δημιουργηθούν, ακόμα και από εκπαιδευτικούς που έχουν εμπειρία στην χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (Laborde, 2002).

2.2.2.1 Διαδικτυακά αποθετήρια - Φωτόδεντρο

Επισημαίνεται ότι το πλήθος των ψηφιακών υλικών, μπορούν να διατεθούν ελεύθερα στο διαδίκτυο, από οποιονδήποτε, ενώ παράλληλα εμφανίζονται στα πλαίσια διαδικτυακών αποθετηρίων, τα οποία έχουν δημιουργηθεί από ειδικούς εκπαιδευτικούς, που ασχολούνται με την αξιοποίηση των παιδαγωγικών τους δυνατοτήτων καθώς και την αποτελεσματική ένταξη τους στην τάξη των μαθηματικών. Στην Ελλάδα, το «Ψηφιακό Σχολείο», είναι πρόγραμμα που υλοποιεί την ψηφιακή στρατηγική του Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων (ΥΠΔΒΜΘ), για τη σχολική εκπαίδευση και στοχεύει στην επιτυχή ένταξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (ΓΠΕ) στην καθημερινή εκπαιδευτική πρακτική στο σχολείο (Μεγάλου & Κακλαμάνης, 2015). Επιπλέον, η δράση για το Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Περιεχόμενο εστιάζει αφενός στη δημιουργία εκπαιδευτικού ψηφιακού υλικού, αφετέρου στην ανάπτυξη και τη λειτουργία της υπολογιστικής υποδομής για την ευρεία διάθεση του περιεχομένου και των εργαλείων για την παιδαγωγική αξιοποίησή του στην εκπαιδευτική κοινότητα. (Φωτόδεντρο, 2012)[2]



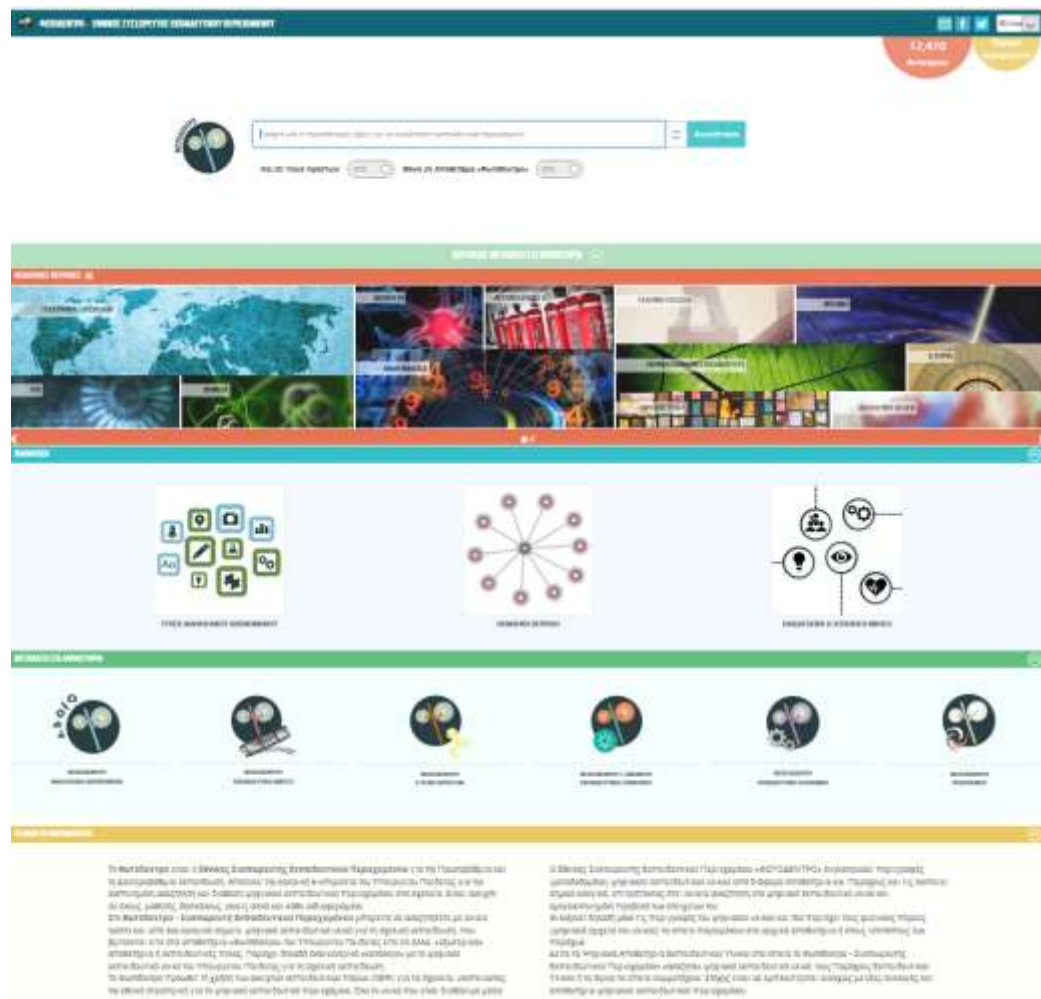
Εικόνα 1: Παροχές του "Ψηφιακού σχολείου"

Συγκεκριμένα, η υποδομή του Ψηφιακού Σχολείου για το εκπαιδευτικό περιεχόμενο περιλαμβάνει, την Ψηφιακή Εκπαιδευτική Πλατφόρμα, όπου επιτρέπει στους χρήστες την ενεργή συμμετοχή, μέσω της οποίας θα διατίθεται και θα αξιοποιείται από την εκπαιδευτική κοινότητα, το εκπαιδευτικό περιεχόμενο (<http://digitalschool.minedu.gov.gr>). Επιπλέον, παρέχεται μεγάλο εύρος από ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα για όλα τα γνωστικά αντικείμενα Δημοτικού, Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου, που δημιουργούνται από εκπαιδευτικούς της πράξης, ενώ παράλληλα τα διαδραστικά Ηλεκτρονικά Σχολικά Βιβλία (interactive books), είναι διαθέσιμα σε όλους, μέσω της ψηφιακής εκπαιδευτικής πλατφόρμας. (Φωτόδεντρο, 2012)[2]

Συγχρόνως, το Ψηφιακό σχολείο, έχει δημιουργήσει ένα Πανελλήνιο Ψηφιακό Αποθετήριο Μαθησιακών Αντικειμένων για την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, το Φωτόδεντρο (<http://www.photodentro.edu.gr>). Το Φωτόδεντρο λειτουργεί ως Εθνικός Συσσωρευτής Εκπαιδευτικών Μεταδεδομένων, στο οποίο διατίθενται το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο στα σχολεία. Το αποθετήριο αυτό, αποτελείται από επαναχρησιμοποιήσιμα ψηφιακά μαθησιακά αντικείμενα, τα οποία επιλέγονται και μετασχηματίζονται, με εκπαιδευτικά μεταδεδομένα και έχουν βασιστεί σε διεθνή πρότυπα. Το Ψηφιακό Αποθετήριο Μαθησιακών Αντικειμένων (Learning Objects Resource Repository – LORs), προσφέρει συστήματα που παρέχουν δυνατότητες για αποθήκευση, διατήρηση, διαχείριση, ανάκτηση και παράδοση ψηφιακού περιεχομένου οποιαδήποτε τύπου. Επιπλέον, το Φωτόδεντρο αποτελεί το κεντρικό σημείο πρόσβασης στο ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο και είναι ανοιχτό σε μαθητές, εκπαιδευτικούς, γονείς κτλ. Επιπλέον, αποθηκεύει επαναχρησιμοποιήσιμα μαθησιακά αντικείμενα, για το οποία γίνεται αναφορά παρακάτω, που είτε αναπτύσσονται από εκπαιδευτικούς στο πλαίσιο του εμπλουτισμού των σχολικών βιβλίων της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, είτε έχουν δημιουργηθεί στο πλαίσιο άλλων έργων που χρηματοδοτήθηκαν από το Υπουργείο Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων (ΥΠΔΒΜΘ), είτε έχουν επιλεγεί από άλλες πηγές. Επιπροσθέτως, η χρήση των δομών του Φωτόδεντρου, έχει στόχο, την διευκόλυνση των εκπαιδευτικών και των μαθητών, στην εύρεση εκπαιδευτικού υλικού αλλά και στην ένταξη και αξιοποίησή του σε εκπαιδευτικά σενάρια και μαθήματα. (Φωτόδεντρο, 2012)[2]

Επομένως, μέσω του Φωτόδεντρου, αλλά και των διαδραστικών βιβλίων, διάφορες πηγές παρέχονται στους εκπαιδευτικούς, με τις οποίες μπορούν να ενασχοληθούν. Παράλληλα, η διαμόρφωση του Φωτόδεντρου έχει γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε ο ρόλος του εκπαιδευτικού να υποστηρίζεται, ως

σχεδιαστή εκπαιδευτικού υλικού (Κυνηγός, 2014). Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να «κατεβάζει», τα υλικά που διατίθενται, μέσω αυτού, στον προσωπικό του υπολογιστή, ενώ επιτρέπεται στον ίδιο, να τα επανασχεδιάσει. Ένα ακόμα στοιχείο που προσφέρει το Φωτόδεντρο, είναι η δυνατότητα δημοσίευσης των δομημάτων, που έχει δημιουργήσει ένας εκπαιδευτικός, μέσα σε κοινότητες συναδέλφων, ώστε να αποτελούν αντικείμενο συζήτησης σε αυτές. Οι κοινότητες αυτές χαρακτηρίζονται ως κοινότητες πρακτικής (CoP) (Wenger, 1998), στις οποίες οι εκπαιδευτικοί αλληλεπιδρούν και έχουν την δυνατότητα να μάθουν ο ένας από τον άλλο. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν σε τέτοιες κοινότητες, είναι επαγγελματίες εκπαιδευτικοί, οι οποίοι ασχολούνται με την χρήση των μαθησιακών αντικειμένων στη διδακτική των μαθηματικών, ενώ προσορίζεται να συμμετέχουν ενεργά σε αυτές, και αναμένεται να αναπτύξουν μια κοινή ορολογία, αλλά και τρόπους επικοινωνίας, δηλαδή μια κοινή «γλώσσα» (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014).



Εικόνα 2: Ιστοσελίδα του "Φωτόδεντρο"

Στην συνέχεια, αναλύεται ο όρος του μαθησιακού αντικειμένου, ώστε να είναι διακριτή η χρήση αυτού και οι δυνατότητες που προσφέρει στην διερευνητική μάθηση. Σύμφωνα με τον ορισμό του μαθησιακού αντικειμένου (ΜΑ), είναι κάθε ψηφιακός πόρος που:

- ❖ εξυπηρετεί εκπαιδευτικούς στόχους,
- ❖ έχει νόημα να επαναχρησιμοποιηθεί και σε άλλα μαθησιακά περιβάλλοντα,
- ❖ και αποτελεί μια ολοκληρωμένη οντότητα.

Κάθε μαθησιακό αντικείμενο που αναρτάται στο Φωτόδεντρο, θα πρέπει να είναι ολοκληρωμένο και «λειτουργικά αυτόνομο», δηλαδή να λειτουργεί ομαλά εφόσον πληρούνται οι τεχνικές απαιτήσεις και προδιαγραφές που περιγράφονται σε αυτό. Παραδείγματα ψηφιακών πόρων, περιλαμβάνουν αρχεία εικόνων, βίντεο, ήχου, κειμένων, ιστοσελίδες, αλληλεπιδραστικές προσομοιώσεις (π.χ. Java Applets, Flash κλπ) ή συλλογές αρχείων (Φωτόδεντρο, 2012) [1]. Ένα ακόμα παράδειγμα μαθησιακού αντικειμένου, είναι τα μικροπειράματα, τα οποία αναλύονται σε επόμενη ενότητα.

Για την δημοσίευση ενός ΜΑ στο Φωτόδεντρο, ακολουθείται μία ροή εργασιών που αφορά στη μεταφόρτωση των αρχείων που περιέχονται στο ΜΑ, το μετασχολιασμό του ΜΑ και τον έλεγχο των μεταδεδομένων. Η βασική ροή εργασιών περιλαμβάνει τις παρακάτω φάσεις:

- ❖ Μεταφόρτωση των αρχείων του ΜΑ
- ❖ Ανάθεση μετασχολιασμού του ΜΑ
- ❖ Μετασχολιασμός του ΜΑ
- ❖ Ανάθεση ελέγχου των μεταδεδομένων και των αρχείων του ΜΑ
- ❖ Έλεγχος των μεταδεδομένων και των αρχείων του ΜΑ
- ❖ Δημοσίευση του ΜΑ στο Φωτόδεντρο ή απόρριψή του

Επισημαίνεται, ότι στην φάση του ελέγχου και της επικύρωσης των μεταδεδομένων ελέγχεται η ορθότητα, η ποιότητα και η πληρότητα των στοιχείων που το απαρτίζουν. Επομένως, αποτελεί σημαντικό σημείο της ροής εμπλουτισμού του μαθησιακού αντικειμένου. (Φωτόδεντρο, 2012) [1]

Για την διευκόλυνση της αναζήτησης και ανάκτησης των μαθησιακών αντικειμένων που είναι αποθηκευμένα σε αποθετήρια, ψηφιακές βιβλιοθήκες, βάσεις δεδομένων κλπ., απαιτείται η ύπαρξη των μεταδεδομένων, δηλαδή η καταγραφή πληροφοριών που σχετίζονται με αυτά. Ειδικότερα, τα μεταδεδομένα είναι δεδομένα που περιγράφουν άλλα δεδομένα (Berners-Lee, 1997). Η περιγραφή των ΜΑ με Εκπαιδευτικά Μεταδεδομένα, βασίστηκε στο διεθνές πρότυπο IEEE LOM (Learning Object Metadata). Η εφαρμογή του συγκεκριμένου προτύπου προβλέπει πληθώρα δεδομένων, με την οποία περιγράφεται το ΜΑ, ενώ ταυτόχρονα περιλαμβάνονται στοιχεία που περιγράφουν συνιστώσες της εκπαιδευτικής διαδικασίας που ενδεχομένως καλείται να υποστηρίξει το ΜΑ (Φωτόδεντρο, 2012) [3]. Παρακάτω παρατίθεται πίνακας, με τον οποίο ο εκπαιδευτικός έχει δυνατότητα περιγραφής του ΜΑ, δηλαδή την αναφορά στα μεταδεδομένα αυτού, που ο ίδιος έχει δημιουργήσει και έχει αποστείλει για την ένταξη του στα πλαίσια του Φωτόδεντρου.

Στοιχείο στην φόρμα	Σχόλια
Τίτλος ΜΑ (Υποχρεωτικό)	Ο τίτλος θα πρέπει να αποδίδει, σε λίγες λέξεις, την περιγραφή του ΜΑ. Να σημειωθεί, ότι μπορούν να προστεθούν περισσότεροι από έναν τίτλοι.
Περιγραφή ΜΑ (Υποχρεωτικό)	Περιλαμβάνει μια εκτενέστερη περιγραφή του ΜΑ, από ότι στον τίτλο αυτού.
Λέξεις Κλειδιά (Συνιστώμενο)	Οι λέξεις κλειδιά είναι λέξεις ή μικρές φράσεις ελεύθερου κειμένου, οι οποίες χαρακτηρίζουν το περιεχόμενο του ΜΑ, καθώς περιγράφουν αυτό. Οι λέξεις αυτές βελτιώνουν τη διαδικασία της αναζήτησης και της ανάκτησης του ΜΑ από το Αποθετήριο.
Γλώσσα ΜΑ (Συνιστώμενο)	Προσδιορίζει την γλώσσα ή τις γλώσσες που χρησιμοποιούνται στο ΜΑ.

Πίνακας 1: Περιγραφή μεταδεδομένων ΜΑ

Τέλος, να σημειωθεί ότι η ταξινόμια που χρησιμοποιείται στο Φωτόδεντρο, αποτελεί σημαντικό στοιχείο αυτού, καθώς διευκολύνει την αναζήτηση των ΜΑ. Σκοπός αυτής, είναι η δημιουργία μίας συλλογής από όρους, οι οποίοι θα είναι οργανωμένοι με ιεραρχία, ώστε να είναι εφικτή η κατηγοριοποίηση των ΜΑ, ανά θεματική περιοχή. Η συλλογή των όρων εξυπηρετεί τις ανάγκες αναζήτησης και ανεύρεσης ΜΑ, στα πλαίσια του αποθετηρίου από το τελικό χρήστη (εκπαιδευτικό, μαθητή, γονέα) (Φωτόδεντρο, 2012) [4].

2.2.2.2 Μικροπειράματα

Για την επέκταση του συνόλου των ΜΑ, του ψηφιακού αποθετηρίου «Φωτόδεντρο», προτάθηκε η δημιουργία των «μικρο-πειραμάτων». Τα μικροπειράματα είναι ψηφιακές εφαρμογές, βασισμένες στην προγραμματιστική γλώσσα «Java», τα οποία είναι ενσωματωμένα στην ιστοσελίδα των διαδραστικών βιβλίων, ενώ τα περισσότερα μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς της εγκατάσταση κατάλληλου λογισμικού, αλλά με την βοήθεια οποιουδήποτε περιηγητή διαδικτύου (browser). Το σκοπικό της δημιουργίας των μικροπειραμάτων, στηρίχθηκε στην διευκόλυνση της κατανόησης και της καθοδήγησης, στην διδασκαλία των μαθηματικών, μέσω μιας διερευνητικής κατεύθυνσης, όπου αυτό είναι δυνατό, ενώ παράλληλα στόχος ήταν, η παροχή εργαλείων στους εκπαιδευτικούς, για την οργάνωση των μαθημάτων τους και την τροποποίηση των ίδιων, με βάση τις διδακτικές τους ανάγκες. (ΕΠΕΑΕΚ II, 2008)

Τα μικροπειράματα, χρησιμοποιούν τα ψηφιακά εργαλεία για την έκφραση των μαθηματικών εννοιών. Η οργάνωση αυτών μπορεί να γίνει σε πέντε κατηγορίες, ανάλογα με τον τρόπο χρήσης της ελάχιστης τεχνολογίας (ΕΠΕΑΕΚ II, 2008). Οι προαναφερθείσες κατηγορίες βασίζονται στην χρήση λογισμικών:

- ❖ Μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού
- ❖ Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων
- ❖ Αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα
- ❖ Διερεύνηση, πειραματισμός και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες
- ❖ Πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα

Τα μικροπειράματα, όσο είναι εφικτό, είναι ανοιχτά στον εκπαιδευτικό για διαμόρφωση, αλλά και για επέκταση και περαιτέρω εμπλουτισμό, ενώ δεν εντάσσονται στη λογική «black box» ψηφιακών εφαρμογών (Κυνηγός, 2014). Επιπλέον, τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι:

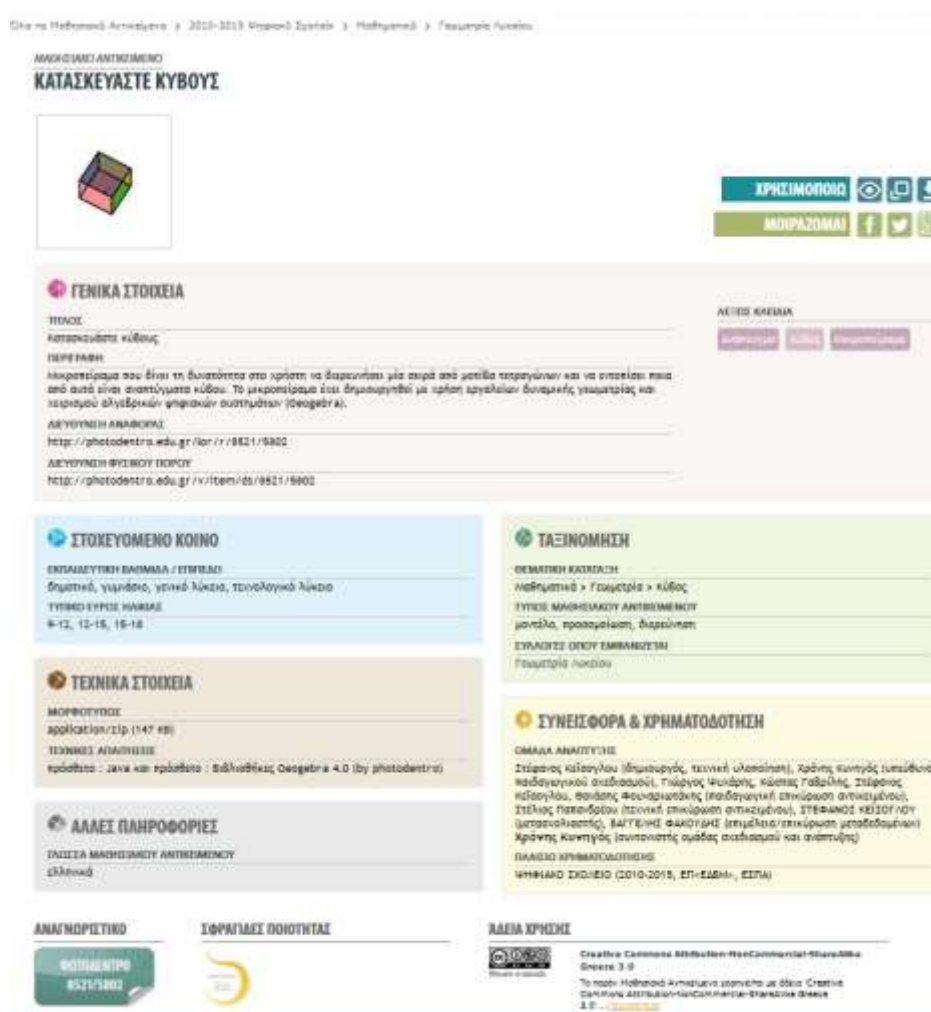
- i. Ο μαθητής ή μια ομάδα μαθητών, μπορεί να χειριστεί τα μικροπειράματα, ενώ μπορεί να υπάρξει διδακτική υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό, αλλά και τον γονέα. Η εφαρμογή αυτών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια του μαθήματος, καθώς και να λειτουργήσει ως κίνητρο συνθετικής εργασίας ή και διερεύνησης.
- ii. Εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις μαθηματικού φορμαλισμού, μαθηματικών αναπαραστάσεων, αλλά και προσομοιώσεων φαινομένων με μαθηματική συμπεριφορά και ιδιότητες. Παράλληλα, αποφεύγονται αναπαραστάσεις, εικονικά αντικείμενα και προσομοιώσεις, που δεν έχουν σχέση με τα μαθηματικά που υποστηρίζει το ψηφιακό δόμημα.
- iii. Τα θεσμοθετημένα εργαλεία μαθηματικής έκφρασης, στα οποία γίνεται αναφορά παραπάνω, δημιουργούν τα μικροπειράματα. Συγχρόνως, τα εργαλεία αυτά παρέχονται στους μαθητές για να κάνουν οι ίδιοι μαθηματικά.
- iv. Ο δυναμικός χειρισμός των μαθηματικών αντικειμένων, δίνει στους μαθητές την δυνατότητα για παρατήρηση του τι παραμένει σταθερό και τι αλλάζει καθώς μετεξελίσσονται τα αντικείμενα. Επομένως, κύριο χαρακτηριστικό των μικροπειραμάτων, είναι η παροχή δυνατοτήτων για δυναμικό χειρισμό, ώστε διάφορες συμπεριφορές των μαθηματικών αντικειμένων, να γίνονται αντικείμενο προβληματισμού, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης.
- v. Το εκάστοτε μικροπείραμα καλύπτει μια μαθηματική έννοια ή ένα ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο, στο οποίο εμπλέκονται συνδεδεμένες έννοιες.
- vi. Το μικροπείραμα μπορεί να ξεινήσει από μια δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου, με στόχο την επεξήγηση μιας έννοιας ή την εμβάθυνση αυτής, ώστε ο μαθητής να μπορεί να την κατανοήσει. Παράλληλα, μέσω της εφαρμογής τους, είναι δυνατή η διερεύνηση της έννοιας, πέρα από το στενό πλαίσιο μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας του σχολικού βιβλίου.
- vii. Το κάθε μικροπείραμα δεν παρέχει τη λύση, αφήνοντας την εύρεση αυτής στον εκπαιδευτικό. (Κυνηγός, 2014)

Επομένως, τα μικροπειράματα είναι σχεδιασμένα ώστε οι όποιες απαντήσεις των μαθητών να αφήνουν πεδίο παρέμβασης στον εκπαιδευτικό και αφορμές για συζήτηση στην τάξη των μαθηματικών. Η προαναφερθείσα παρέμβαση, θα μπορούσε να είναι μια συζήτηση για την επιλογή μεθόδου επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, για την εύρεση ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος, καθώς και για την γενίκευση μιας λύσης, στην οποία έχουν καταλήξει οι μαθητές. Παράλληλα ο εκπαιδευτικός έχει την δυνατότητα να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα και τις συμπεριφορές των μαθηματικών αντικειμένων. Επιπροσθέτως, επισημαίνεται ότι τα συγκεκριμένα δομήματα, λειτουργούν ως εργαλεία μελέτης της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού από τους ερευνητές (documental genesis), αλλά και ως φορείς ιδεών και μέσα διαλόγου, στο εσωτερικό της εκπαιδευτικής κοινότητας (CoP), με την οποία θα είναι εφικτή η συλλογική κατασκευή κειμένων, καθώς και συλλογικών αντιλήψεων των εκπαιδευτικών. Η συμμετοχή αυτή, δίνει την δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς να εκφράζουν την κριτική τους για τα υπάρχοντα μικροπειράματα, αλλά και να τροποποιούν αυτά, ώστε να κατασκευάζονται νέα δομήματα, τα οποία θα λειτουργούν και ως αντικείμενα διαμεσολάβησης και διαλόγου (Kynigos & Kalogeria, 2012).

Επομένως, η μελέτη των μικροπειραμάτων, είναι σημαντική, αφενός γιατί είναι η πρώτη απόπειρα για εμπλουτισμό, με ψηφιακά δομήματα, των πανελλήνιων σχολικών βιβλίων, αφετέρου διότι είναι

ένα ψηφιακό υλικό, που σχεδιάστηκε για διδακτικές παρεμβάσεις και παρέχει καινοτόμους στόχους. Επιπλέον, η μελέτη των χαρακτηριστικών των μικροπειραμάτων, έχει θεωρητικό και ερευνητικό υπόβαθρο, καθώς έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών, ανέπτυξαν, προβληματισμούς για την διαθεσιμότητα των ψηφιακών υλικών, μέσω του διαδικτύου, αλλά και την ανάγκη αποτίμησης των δυνατοτήτων παιδαγωγικής αξιοποίησης τους (Τργαλινα κ.ά., 2010; Sedig & Sumner, 2006). Συγχρόνως, τα είδη των εργαλείων που παρέχουν τα μικροπειράματα, αποτελούν στοιχεία διερεύνησης, καθώς με αυτά δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό για την οργάνωση του μαθήματος του.

Τέλος, παρουσιάζεται η ιστοσελίδα στην οποία εμφανίζονται τα διάφορα μεταδεδομένα, ενός μικροπειράματος. Η περιγραφή των μεταδεδομένων, η οποία αναλύθηκε σε προηγούμενη ενότητα, διευκολύνει τον εκπαιδευτικό, τον μαθητή καθώς και τον γονέα, να κατανοήσει τις δυνατότητες του μικροπειράματος, ώστε να είναι αποτελεσματική η αξιοποίηση αυτών.



Εικόνα 3: Εμφάνιση μεταδεδομένων μικροπειράματος στην ιστοσελίδα του "Φωτόδεντρου"

2.3 Αξιολόγηση ψηφιακών υλικών

Η δυσκολία του εκπαιδευτικού, στην εύρεση κατάλληλων υλικών για την εφαρμογή αυτών στην τάξη των μαθηματικών, είναι απαραίτητη. Ειδικότερα, η εύρεση αυτών, δυσχεραίνεται από την έλλειψη των μεταδεδομένων (metadata), που περιγράφουν με ακρίβεια το περιεχόμενο ενός υλικού (Τργαλινα κ.ά., 2011). Στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται προσπάθεια για την σύνθεση των

υπαρχόντων θεωρητικών πλαισίων, με την οποία θα είναι εφικτή η περιγραφή των χαρακτηριστικών των ψηφιακών υλικών, ενώ στοχεύει στην αξιολόγηση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων αυτών.

2.3.1 Σχεδιασμός υλικού

Ένα ψηφιακό υλικό, στηρίζεται στις μαθηματικές δραστηριότητες που παρέχει, ενώ η μελέτη του σχεδιασμού αυτών, είναι σημαντική. Επισημαίνεται ότι, οι μαθηματικές δραστηριότητες (tasks) διαθέτουν δυνατότητες για την αντιμετώπιση μαθηματικών εννοιών, ιδεών και στρατηγιών. Παράλληλα, οι δραστηριότητες εστιάζονται, στην εφαρμογή και στην ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής. Η διδακτική των μαθηματικών επικεντρώνεται, εκτός των άλλων, στην επιλογή, στην διαμόρφωση, στον σχεδιασμό, στην παρακολούθηση, στην εισαγωγή, στην αναγνώριση καθώς και στην συνεχή αξιολόγηση, αυτών των δραστηριοτήτων. (Watson κ.ά., 2012)

Ο σχεδιασμός των προαναφερθέντων δραστηριοτήτων, απαιτεί μεγάλη προσοχή και από τον εκπαιδευτικό που τις αναπτύσσει. Η έρευνα των Ainley και Pratt (2002), παρουσίασε το παράδοξο του σχεδιασμού, με το οποίο οι εκπαιδευτικοί ξεκινούν να σχεδιάζουν την δραστηριότητα, από το μαθηματικό αντικείμενο, που έχουν στόχο να διδάξουν, με αποτέλεσμα οι δραστηριότητες να μην είναι μαθηματικά επικερδής για τους μαθητές, καθώς το μαθηματικό κομμάτι των δραστηριοτήτων μπορεί να είναι περιορισμένο. Σε αντίθετη περίπτωση, αν οι εκπαιδευτικοί ξεκινούν τον σχεδιασμό τους από τις ιδέες που έχουν για τις δραστηριότητες, τότε η δράση των μαθητών πιθανόν αποπροσανατολίζονται, καθώς δυσχεραίνεται η εκτίμηση του αντικείμενου μάθησης. Κατά συνέπεια, οι Ainley και Pratt (2002), πρότειναν τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων με έμφαση στον σκοπό (purpose) και στην χρησιμότητα (utility). Μια δραστηριότητα, θεωρείται ότι έχει σκοπό, όταν το αποτέλεσμα της έχει νόημα για τον μαθητή (purposeful task), δηλαδή είναι ένα πραγματικό ή ένα ψηφιακό αντικείμενο, που παράγει ο ίδιος, ενώ μπορεί να είναι και η ίδια η λύση του μαθηματικού προβλήματος που μελετάται. Επειδή, η εστίαση στον σκοπό, μπορεί να παράγει πλούσιες δραστηριότητες με κίνητρο, αλλά μπορεί και να αποτύχει στο δεύτερο μέρος του σχεδιαστικού παραδόξου, καθώς είναι πιθανή η έλλειψη εστίασης στις μαθηματικές έννοιες, οι ερευνητές προτείνουν την παρουσίαση της χρησιμότητας αυτής. Οπότε, η ενασχόληση των μαθητών σε μια τέτοια δραστηριότητα τους διευκολύνει για την χρήση μιας τεχνικής, η οποία εφαρμόζεται σε μια συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα, αλλά και για την κατανόηση του λόγου που αυτή η ιδέα είναι χρήσιμη. Επιπλέον, για την αντιμετώπιση του σχεδιαστικού παραδόξου, οι Ainley και Pratt (2002), στην έρευνα τους προτείνουν την ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών με στόχο την αξιοποίηση των δυνατοτήτων τους, για την ενίσχυση της διερευνητικής μάθησης. Ενώ παράλληλα, επισημαίνεται ότι, η χρήση της τεχνολογίας δίνει την δυνατότητα για δημιουργία δραστηριοτήτων με σκοπό, μέσω της εργασίας των μαθητών με μαθηματικά εργαλεία, ενώ ταυτόχρονα εκτιμάται η χρησιμότητα αυτών των εργαλείων, με τέτοιους τρόπους που κάποιος οδηγάτε στην διερευνητική μάθηση.

Ένα ακόμα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο αναπτύχθηκε για την διάκριση του σχεδιασμού μιας δραστηριότητας, είναι αυτό της περιγραφής των σχεδιαστικών αρχών (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014). Σύμφωνα με την έρευνα αυτή, διακρίνονται πέντε πεδία σχεδιασμού:

- ❖ **Ο παιδαγωγικός σχεδιασμός (Pedagogical Design).** Στο πεδίο αυτό, συμπεριλαμβάνονται παράμετροι, που επιτρέπουν στο ψηφιακό υλικό την μετατροπή του σε ένα αποτελεσματικό διδακτικό εργαλείο. Η γνώση των πιθανών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την διαπραγμάτευση με διάφορα παραδοσιακά μέσα, τις έννοιες που συνυπάρχουν στα πλαίσια του μικροπεριβάματος, καθώς και τα προσωπικά νοήματα που ενδεχομένως αναπτύσσουν οι ίδιοι, βοηθούν το σχεδιαστή για την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικού ψηφιακού υλικού. Επομένως, μέσω του παιδαγωγικού σχεδιασμού, η ενασχόληση του μαθητή με το ψηφιακό υλικό, θα έχει πρόσθετη αξία για τον ίδιο που θα το χρησιμοποιήσει.

- ❖ **Ο τεχνολογικός σχεδιασμός (Technological Design).** Από τεχνολογικής άποψης, ο σχεδιασμός σχετίζεται με το ψηφιακό εργαλείο, το οποίο αναπτύσσει ο σχεδιαστής. Επίσης, είναι διακριτές οι δυνατότητες, που παρέχει το εργαλείο, που κατέχει ο σχεδιαστής, μέσω της ενασχόλησης του με αυτό, αλλά και ο τρόπος με τον οποίο θα επιτευχθεί αυτό.
- ❖ **Ο μαθηματικός σχεδιασμός που σχετίζεται με το μαθηματικό πλαίσιο του μικροπειράματος.** Στον σχεδιασμό αυτό συμπεριλαμβάνονται, έννοιες που παρουσιάζονται στον μαθητή ή εφαρμόζονται από τον ίδιο, καθώς και πιθανές δράσεις του μαθητή, μέσω του πειραματισμού και της διερεύνησης αυτών των εννοιών. Είναι απαραίτητο, ο σχεδιαστής να είναι βαθύς γνώστης των εννοιών αυτών, ώστε να αποφύγει την δημιουργία ενός ψηφιακού υλικού, το οποίο δεν θα ανταποκρίνεται στην μαθηματική έννοια, που έχει τελικό στόχο να αναπαραστήσει.
- ❖ **Ο σχεδιασμός σε σχέση με τις αναπαραστάσεις (Representational Design) και τον τρόπο που χρησιμοποιούνται κυρίως για παιδαγωγικούς και μαθησιακούς σκοπούς (Kynigos, 2012).** Στο πεδίο αυτό διακρίνεται η αναπαράσταση ή οι αναπαραστάσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται από τον σχεδιαστή στο ψηφιακό υλικό, ώστε να είναι δυνατή η αναπαράσταση μιας μαθηματικής έννοιας, ενός φυσικού ή και εικονικού (virtual) αντικειμένου, αλλά και των λειτουργιών αυτών.
- ❖ **Ο σχεδιασμός που λαμβάνει υπόψη του την αλληλεπίδραση των παραπάνω (Interaction Design).** Η αλληλεπίδραση των παραπάνω είναι αντικείμενο ενός άλλου πεδίου σχεδιασμού, ώστε το μικροπείραμα να έχει χαρακτηριστικά που το κάνουν διαδραστικό και προκλητικό για το μαθητή.

Επομένως, ο σχεδιασμός μιας δραστηριότητας, η οποία ενσωματώνεται στα πλαίσια ενός ψηφιακού υλικού, όπως είναι τα μικροπειράματα, τα οποία μελετούνται από διάφορους ερευνητές, επηρεάζεται από τις αντιλήψεις και τους στόχους του εκπαιδευτικού, για την διδασκαλία ενός μαθηματικού αντικειμένου. Όπως γίνεται σαφές και από την έρευνα του Κυνηγού και του Διαμαντίδης (2014): «Το παραπάνω μοντέλο του σχεδιασμού ενός μικροπειράματος δεν προϋποθέτει ότι ένας εκπαιδευτικός έχει σκεφτεί με τέτοιο τρόπο πριν σχεδιάσει ένα μικροπείραμα. Συνήθως, ο σχεδιασμός γίνεται ταυτόχρονα με την κατασκευή του μικροπειράματος, μάλλον αυθόρμητα και όχι από πριν. Αλλά ακόμα και μετά το σχεδιασμό του μικροπειράματος, αλλά και τη χρήση του, δεν συνεπάγεται ότι ο σχεδιαστής συνειδητοποιεί με ποιο τρόπο τοποθετείται το μικροπείραμα που έφτιαξε μέσα στο παραπάνω μοντέλο. Πρόκειται περισσότερο για ένα μοντέλο περιγραφής του σχεδιασμού του μικροπειράματος που μας επιτρέπει να «διαβάσουμε» τι ήθελε να κάνει με αυτό ο εκπαιδευτικός που το σχεδίασε ή και εκείνος που άλλαξε το σχεδιασμό για να το χρησιμοποιήσει». Η άποψη αυτή, έρχεται σε συμφωνία με το σχεδιαστικό παράδοξο, των ερευνητών Ainley και Pratt (2002), καθώς γίνεται διάκριση των ενδεχομένων δυσκολιών που εμφανίζονται κατά τον σχεδιασμό ενός ψηφιακού υλικού, ενώ ταυτόχρονα υποστηρίζεται ότι η αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, γίνεται με την δυνατότητα περιγραφής της σχεδιαστικής διαδικασίας που ακολούθησε ο δημιουργός του ψηφιακού υλικού, ώστε να είναι διακριτές οι επιθυμίες του ίδιου για τις δυνατότητες του ψηφιακού αυτού υλικού. Λαμβάνοντας υπόψη τις έρευνες αυτές, η παρούσα διπλωματική εργασία, εστιάζεται στο υπάρχον ψηφιακό υλικό και την αξιολόγηση αυτού, ως προς την παιδαγωγική αξιοποίησή του, την εκτεταμένη διερευνητική μάθηση καθώς και των λειτουργιών που παρέχουν το λογισμικό, στου οποίου τις λειτουργίες, βασίζεται το ίδιο.

2.3.2 Αξιολόγηση της ποιότητας των ψηφιακών υλικών

Οι Trgalova κ.ά. (2010) και Kortenkamp κ.ά. (2009), επικεντρώθηκαν στο πλήθος των διαθέσιμων ψηφιακών υλικών, και την επίδραση αυτού για την ενσωμάτωση των τεχνολογιών, στην διδασκαλία των μαθηματικών. Η μεγαλύτερη δυσκολία, αναγνωρίζεται από τους ερευνητές, ως η εύρεση των κατάλληλων υλικών (resources) για την διδακτική των μαθηματικών. Επομένως, οι ίδιοι παραθέτουν

διάφορα εμπόδια που μπορούν να εμφανιστούν κατά την ενσωμάτωση ενός ψηφιακού υλικού, το οποίο βασίζεται στις λειτουργίες ενός ΛΔΓ, στην τάξη των μαθηματικών:

- ❖ Η πολύπλοκη επιλογή ενός αξιόπιστου και εύκολου στην χρήση, ψηφιακού υλικού, ανάμεσα στο πλήθος των ήδη υπαρχόντων, καθώς και ύπαρξη των περιορισμών στην επιλογή των ψηφιακών υλικών, έτσι ώστε να συμβαδίζει με τις διαθέσιμες λειτουργίες του εκάστοτε ΛΔΓ.
- ❖ Παρατηρήθηκε δυσκολία στην εύρεση του κατάλληλου παιδαγωγικού υλικού, για κάποιο συγκεκριμένο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Το εμπόδιο αυτό, αποδίδεται από τους ερευνητές, είτε στο πλήθος των διαθέσιμων διαδικτυακών υλικών, είτε στη έλλειψη δεδομένων για την περιγραφή του περιεχομένου του υλικού.
- ❖ Η ποιότητα ενός υλικού, δυσχεραίνει την κατάλληλη επιλογή αυτού, από τον εκπαιδευτικό. Πιο συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός κατά την ενσωμάτωση ενός ψηφιακού υλικού στην διδακτική του πρακτική, αντιμετωπίζει δυσκολίες στην αξιοποίηση αυτού, καθώς και στην διάκριση της επάρκειας του, όσον αφορά το μέρος των μαθηματικών.

Ως αποτέλεσμα των ανωτέρω, οι ερευνητές Trgalova κ.ά. (2010) ασχολήθηκαν με την διάκριση της ποιότητας του διαθέσιμου ψηφιακού υλικού. Ειδικότερα, επικεντρώθηκαν στην ποιότητα των υλικών των ΛΔΓ, για την διαρκής βελτίωση αυτών. Για την έρευνα τους, μελέτησαν δύο προγράμματα, το Intergeo (2010) και το In2geo (2013). Ειδικότερα, βασικός στόχος του αρχικού προγράμματος Intergeo ήταν, η παρουσίαση των υπαρχόντων ΛΔΓ, η κοινοποίηση παιδαγωγικών ψηφιακών υλικών, καθώς και η εφαρμογή και παρουσίαση της αξιολογικής διαδικασίας των ψηφιακών υλικών. Η έρευνα τους βασίστηκε στην διάθεση ενός ερωτηματολογίου σε εκπαιδευτικούς, οι οποίοι χρησιμοποιούσαν το υπάρχον ψηφιακό υλικό. Με την διάθεση του ερωτηματολογίου, οι εκπαιδευτικοί, ενεργοποιήθηκαν για την ανάλυση των υλικών, ενώ δόθηκε ανατροφοδότηση για την διάκριση των δυνατών και αδύναμων στοιχείων ενός υλικού, με σκοπό την βελτίωση των πτυχών αυτών, του υλικού. Επιπλέον, να σημειωθεί ότι, το πρόγραμμα In2geo εστίασε στην εξέλιξη των εκπαιδευτικών, για την εύρεση κατάλληλων υλικών, για την τροποποίηση των ήδη υπαρχόντων, για την εφαρμογή τους σε διαφορετικά λογισμικά, ενώ κυρίως επικεντρώθηκαν στον τρόπο που ένας εκπαιδευτικός επιβεβαιώνει την ποιότητα ενός ψηφιακού υλικού, η οποία θα παρέχετε στον ίδιο, μέσω ειδικής περιγραφής (μεταδεδομένα) και θα συνοδεύει το αρχείο ΛΔΓ αυτού. Τέλος, επισημαίνεται ότι μέσω της διάκρισης των στοιχείων του ψηφιακού υλικού, εμφανίστηκε βελτίωση του ίδιου.

Η αξιολογική διαδικασία, βασίζεται στην ποιότητα των ψηφιακών υλικών, η οποία εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του υλικού και από την επάρκεια αυτού για το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται. Επίσης για τον καθορισμό και την βελτίωση της ποιότητας του υλικού, είναι σημαντικό να γίνει διάκριση στους εκπαιδευτικούς στόχους καθώς και στο συστημικό πλαίσιο, στο οποίο θα εφαρμοστεί, διότι ενδέχεται να εμφανιστεί διαφορετική αποτελεσματικότητα στην εφαρμογή του ψηφιακού υλικού σε περιβάλλον που περιέχει διαφορετικές συνθήκες.

Επομένως, οι ερευνητές Trgalova κ.ά. (2010), προτείνουν την παρακάτω ταξινόμηση για την αποτίμηση της ποιότητας των ψηφιακών υλικών, η οποία συμπεριλαμβάνει 9 κλάσεις:

1. Μεταδεδομένα (Metadata)
2. Τεχνική πτυχή (Technical aspect)
3. Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου (Mathematical dimension of the content)
4. Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου (Instrumental Dimension of the Content)
5. Δυνατότητες του ΛΔΓ (Potentialities of DG)
6. Διδακτική εφαρμογή (Didactical Implementation)
7. Παιδαγωγικές αρχές (Pedagogical Implementation)

8. Ενσωμάτωση του υλικού στην διδακτική (Integration of the Resource into a Teaching Sequence)
9. Αναφορές χρηστών (Usage Reports)

Για την καλύτερη κατανόηση της επιλογής των ανωτέρω κλάσεων της αξιολογικής διαδικασίας, από τους ερευνητές, παρουσιάζεται η αναλυτική περιγραφή αυτών. Να σημειωθεί, ότι τα μεταδεδομένα και η τεχνική πτυχή δεν αναλύονται, καθώς τα συγκεκριμένα στοιχεία προέρχονται, από την αρχική περιγραφή του ψηφιακού υλικού (όπως και στα μεταδεδομένα των μικροπειραμάτων που εμφανίζονται στο Φωτόδεντρο) και από το ψηφιακό περιβάλλον στο οποίο βασίζεται το ελάχιστο υλικό.

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου (*Mathematical dimension of the content of a resource*)

Είναι προφανές ότι για την εφαρμογή ενός υλικού στα πλαίσια μιας σχολικής τάξης, είναι απαραίτητο το περιεχόμενο αυτού, να περιέχει ορθές μαθηματικές προτάσεις. Ειδικότερα, η αναφορά στα στοιχεία της μαθηματικής διάστασης ενός περιεχομένου, σύμφωνα με τους ερευνητές, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στα παρακάτω κριτήρια:

- **Εγκυρότητα** (Validity): Όσον αφορά την χρήση ενός υλικού στην τάξη, είναι σημαντικό να δοθεί προσοχή στο μαθηματικό περιεχόμενο αυτού.
- **Επάρκεια αναφορικά με το περιεχόμενο** (Adequacy to the curriculum): Η εστίαση στην επάρκεια του μαθηματικού περιεχομένου του υλικού, ως προς την μαθηματική ύλη που διδάσκεται, γίνεται για την αξιολόγηση της χρηστικότητας του υλικού.
- **Επάρκεια σχετικά με τους διδακτικούς στόχους** (Adequacy to declared goals): Η καταλληλότητα των υλικών για την εκπλήρωση συγκεκριμένων διδακτικών στόχων, είναι σημαντική για την τελική αξιολόγηση των ψηφιακών υλικών.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου (*Instrumental dimension of the content of a resource*)

Στην συνέχεια, γίνεται έλεγχος της συνοχής ανάμεσα στην προτεινόμενη δραστηριότητα και στις δοθείσες γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Παρακάτω παρουσιάζονται τα κριτήρια, στα οποία οι ερευνητές αναδεικνύουν τα διάφορα χαρακτηριστικά της εργαλειακής διάστασης ενός περιεχομένου:

- **Επάρκεια αναπαραστάσεων** (Adequacy of diagrams): Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί κατά πόσο είναι επαρκείς οι δυναμικές αναπαραστάσεις του υλικού, όσον αφορά την ανταπόκριση τους στις προτεινόμενες δραστηριότητες.
- **Συμπεριφορά των αναπαραστάσεων** (Behaviour of diagrams): Η συμπεριφορά των αναπαραστάσεων πρέπει να είναι η αναμενόμενη, σύμφωνα με την δοθείσα δραστηριότητα.
- **Ο χειρισμός των οριακών περιπτώσεων** (Management of limit cases): Ο χειρισμός των οριακών περιπτώσεων της αναπαράστασης, πρέπει να είναι αποδεικτός, βάση των μαθηματικών εννοιών.
- **Ο χειρισμός των αριθμητικών τιμών** (Management of numerical values): Η διαχείριση των αριθμητικών τιμών πρέπει να μην εμποδίζει τους μαθηματικούς στόχους της δραστηριότητας.
- **Ειδικές λειτουργίες** (Special functionalities): Είναι σημαντικό να γίνει σαφής ο λειτουργικός τρόπος των αναπαραστάσεων που βασίζονται σε ειδικές λειτουργίες του ΛΔΓ.

Δυνατότητες του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (*Potentialities of dynamic geometry*)

Διάφορες έρευνες εστίασαν στην ανάδειξη των δυνατοτήτων των ΛΔΓ, και την συμβολή αυτών στην διδασκαλία της γεωμετρίας (Laborde 2002; Lins 2003). Οι προαναφερθέντες ερευνητές, επικεντρώθηκαν στην αξιολόγηση των δυνατοτήτων ενός υλικού και συγκεκριμένα την συμβολή των ΛΔΓ στην βελτίωση των δραστηριοτήτων, σε σύγκριση με την συμβολή ενός περιβάλλοντος X-M.

Οι ερευνητές Τργαλονα κ.ά. (2010), βασίστηκαν στις παραπάνω έρευνες, για την παρουσίαση κριτηρίων για την διάκριση των δυνατοτήτων του ΛΔΓ, το οποίο εφαρμόζεται από το εκάστοτε ψηφιακό υλικό. Επιπλέον, οι ερευνητές παρουσιάζουν ακόμα ένα πλήθος κριτηρίων, το οποίο έχει στόχο την διάκριση της χρήσης και του ρόλου του συρσίματος (dragging), του ψηφιακού υλικού, το οποίο βασίζεται στις έρευνες της Laborde (2002), της Healy (2000) καθώς και της Mariotti (2000).

1. Διάκριση των στοιχείων που συμβάλουν στην πρόσθετη αξία του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, για το ψηφιακό υλικό (Elements contributing to the added value of DG in the resource).

Η διάκριση των στοιχείων αυτών εξετάζει εάν οι λειτουργίες του ΛΔΓ:

- i. Ενισχύουν την διερεύνηση.
- ii. Βελτιώνουν την ποιότητα και την ακρίβεια των αναπαραστάσεων.
- iii. Ευνοούν τον πειραματισμό των μαθητών.
- iv. Παρέχουν, μέσω της ανατροφοδότησης, δυνατότητες στους μαθητές, να εξετάσουν την ορθότητα των κατασκευών τους και των υποθέσεων/συμπερασμάτων τους.
- v. Παρέχουν δυνατότητες πολλαπλής αναπαραστάσης ενός μαθηματικού προβλήματος.
- vi. Διευκολύνουν τον μαθητή στην προσπέλαση των γραφικών και χωρικών χαρακτηριστικών μιας γεωμετρικής κατασκευής ώστε να εστιάσει στις γεωμετρικές ιδιότητες της.
- vii. Καταστούν απαραίτητη την χρήση του ΛΔΓ για την διεξαγωγή της μαθηματικής δραστηριότητας ή μπορεί να γίνει και εκτός ψηφιακού περιβάλλοντος.
- viii. Συνεισφέρουν η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας στην επίτευξη των διδακτικών στόχων του μικροπειράματος.

2. Διάκριση του ρόλου και της χρήσης του συρσίματος (Use and role of the drag mode in the resource).

Η διάκριση του ρόλου εξετάζει τον τρόπο που χρησιμοποιείται το σύρσιμο:

- i. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση μιας γεωμετρικής ιδιότητας; Για παράδειγμα, ενθαρρύνονται οι μαθητές να σύρουν γεωμετρικά αντικείμενα και να παρατηρήσουν αν διατηρείται μια γεωμετρική ιδιότητα;
- ii. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη εικασιών; Για παράδειγμα, με την χρήση του, εξετάζεται αν μια ιδιότητα διατηρείται κατά το σύρσιμο;
- iii. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση διαφορετικών περιπτώσεων σε μια γεωμετρική κατασκευή;
- iv. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για την επίτευξη μιας κατασκευής με βάση συγκεκριμένους περιορισμούς.
- v. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για την αναγνώριση εξαρτήσεων μεταξύ αντικειμένων.
- vi. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για την σύνδεση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων, σε ένα θεώρημα.
- vii. Το σύρσιμο χρησιμοποιείται για την διερεύνηση των τροχιών που διαγράφουν γεωμετρικά αντικείμενα (π.χ. ίχνη, γεωμετρικοί τόποι).
- viii. Γίνεται αναφορά στη χρήση του συρσίματος στις οδηγίες του υλικού, προς τους μαθητές.

Διδακτική εφαρμογή (Didactical implementation of the resource)

Οι ερευνητές επισημαινουν ότι η ποιότητα ενός υλικού, συσχετίζεται και με την διευκόλυνση του εκπαιδευτικού, στον χειρισμό της τεχνολογίας για την μάθηση των μαθηματικών. Η παραπάνω άποψη απορρέει, από την θεωρία του Trouche (2004) για την «ενορχήστρωση της τάξης» (class orchestration). Ο Trouche, στα πλαίσια της προαναφερθείσας θεωρίας, αναφέρει ότι η

αποτελεσματική ενσωμάτωση των ψηφιακών τεχνολογιών, στα πλαίσια της τάξης, απαιτεί μια συγκεκριμένη οργάνωση των αλληλεπιδράσεων, μεταξύ των ατόμων και των υπολογιστών. Με αυτό τον τρόπο, δίνεται έμφαση στις εργαλειακές (instrumental) διαδικασίες χειρισμού, για την μάθηση των μαθηματικών. Η παραπάνω αλλαγή, σύμφωνα με τους ερευνητές, συσχετίζεται άμεσα με το κριτήριο της διδακτικής εφαρμογής των υλικών, η οποία είναι μια από τις πτυχές που καθορίζουν την ποιότητα του υλικού. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ερωτήσεις των δυο βασικών κριτηρίων της διδακτικής εφαρμογής:

1. Διαχείριση της μαθησιακής διαδικασίας (Mathematical learning management)

Στο παρόν κριτήριο, εξετάζονται οι παρακάτω δυνατότητες που παρέχει το ψηφιακό υλικό, όσον αφορά την διαχείριση της διδακτικής των μαθηματικών:

- Οι μαθητές διευκολύνονται για την εργασία τους στην δοθείσα δραστηριότητα;
- Δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές, για επιλογή προσωπικής τους στρατηγικής;
- Γίνεται περιγραφή στις πιθανές στρατηγικές και απαντήσεις, των μαθητών;
- Παρέχονται πληροφορίες για τις στρατηγικές που πρέπει να αναπτύξει ο εκπαιδευτικός, στην εμφάνιση λανθασμένων απαντήσεων από τους μαθητές;
- Παρέχονται πληροφορίες για τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, κατά την εισαγωγή της δραστηριότητας;
- Παρέχονται πληροφορίες για τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες διευκολύνουν την ανάπτυξη των στρατηγιών των μαθητών;
- Παρέχονται πληροφορίες για τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, κατά την σύνθεση των στοιχείων που έχουν ανακαλύψει οι μαθητές;
- Παρέχονται πληροφορίες, κατά την επαλήθευση των εικασιών των μαθητών;
- Γίνεται περιγραφή, των βασικών χαρακτηριστικών της δραστηριότητας, την επίδραση τους στις συμπεριφορές των μαθητών, κτλ;

2. Διαχείριση των αλληλεπιδράσεων με τα εργαλεία (Instrumented activities management)

Στο παρόν κριτήριο, εξετάζονται οι παρακάτω δυνατότητες που παρέχει το ψηφιακό υλικό, όσον αφορά την διεύθυνση των εργαλειακών δραστηριοτήτων:

- Παρέχονται πληροφορίες για τις ανατροφοδοτήσεις του ΛΔΓ;
- Παρέχεται ανατροφοδότηση, από τις δυναμικές αναπαραστάσεις, για την ενεργοποίηση των μαθητών στην πρόοδο της επίλυσης των δοθέντων δραστηριοτήτων;
- Παρέχονται πληροφορίες, για τις πιθανές παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού, όσον αφορά τις εργαλειακές πτυχές της δραστηριότητας;

Τέλος, επισημαίνεται ότι η αξιολογική διαδικασία της ποιότητας των ψηφιακών υλικών, παρέχει δυνατότητες για βελτίωση αυτών. Η έρευνα των Trgalova κ.ά. (2010) αποσκοπούσε στην ανάπτυξη μιας κοινής «γλώσσας», με την οποία θα γινόταν περιγραφή των χαρακτηριστικών των γεωμετρικών αναπαραστάσεων που εμφανίζονται στα ψηφιακά περιβάλλοντα. Στόχος ήταν να επιτραπεί η ενίσχυση ορισμένων πτυχών του υλικού, καθώς και ο σχεδιασμός νέων υλικών, τα οποία θα ικανοποιούν τα συγκεκριμένα κριτήρια, από την αρχή του σχεδιασμού τους (Trousche & Geudet, 2013). Επιπλέον, η έρευνα για τις δυνατότητες ενός ψηφιακού υλικού, οδηγεί στην διερεύνηση της έννοιας της ποιότητας του ίδιου (Geudet κ.ά., 2013). Επομένως, η κοινή αυτή «γλώσσα», στοχεύει στην αναγνώριση των λειτουργιών των γεωμετρικών αναπαραστάσεων, η οποία υποβοηθάτε από τις λειτουργίες του ΛΔΓ. Στην συνέχεια γίνεται αναφορά, σε μια ακόμα έρευνα, η οποία στηρίχθηκε στην ανάγκη ανάπτυξης μιας ενιαίας «γλώσσας».

2.3.3 Κατηγοριοποίηση αλληλεπιδράσεων

Σύμφωνα με στοιχεία προηγούμενης παραγράφου, η χρήση της τεχνολογίας για την διεκπεραίωση μιας μαθηματικής δραστηριότητας, παρουσιάζει πλήθος πλεονεκτημάτων, τις οποίες ο εκπαιδευτικός είναι σε θέση να εκμεταλλευτεί. Όμοια, οι ερευνητές Sedig και Sumner (2006), θεωρούν ότι οι αλληλεπιδράσεις των οπτικών μαθηματικών αναπαραστάσεων (Visual Mathematical Representations)(OMA), παρέχουν δυνατότητες για την εξέλιξη της διερευνητικής μάθησης. Παρακάτω γίνεται ανάλυση της έρευνας αυτής, στην οποία προωθείτε η ιδέα της αξιολόγησης του ψηφιακού υλικού, μέσω μιας κοινής γλώσσας.

Στην έρευνα των Sedig & Sumner (2006), γίνεται μια κατηγοριοποίηση των διαδραστικών τεχνικών που βασίζονται στην χρήση των υπολογιστών, από τους μαθητές. Μέσω αυτών των τεχνικών, οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να διερευνήσουν και να εξερευνήσουν τις OMA. Η τεχνική αυτή, αναφέρεται στις δράσεις του μαθητή, ο οποίος αλληλεπιδρά με μια ή περισσότερες OMA, με την χρήση κάποιου ψηφιακού περιβάλλοντος. Η αλληλεπίδραση αυτή έχει δύο ενέργειες, αυτή με την οποία ο μαθητής δρα στην OMA καθώς και οι ενέργειες που εμφανίζονται από την OMA, τις οποίες προκαλεί ο ίδιος με την δράση του σε αυτή. Οι προαναφερθείσες αναπαραστάσεις καθορίζονται από μια επιλογή γραφικών συμβόλων που παρουσιάζουν την αιτία, την λειτουργία, την δομή και τις σημασιολογικές ιδιότητες και σχέσεις του χώρου στον οποίο τίθεται η αναπαράσταση (Glasgow, Narayanan and Chandrasekran, 1995; Peterson, 1996; Card, MacKinlay and Shneiderman, 1999; Cheng, 2002). Επιπροσθέτως, διάφοροι ερευνητές έχουν δείξει ότι οι OMA, αξιοποιούν τις διαδικασίες επίλυσης ενός προβλήματος και την μαθηματική λογική, που αναπτύσσει ο μαθητής, αλλά και τις δυνατότητες για μάθηση (Paivio, 1983; Pettersson, 1989, 1996; Jonassen, Beissner and Yacci, 1993; Glasgow et al., 1995; Peterson, 1996; Zhang, 1997; Hansen, 1999; NCTM, 2000; Cuoco and Curcio, 2001; Cheng, 2002). Τέλος, αναλύονται τα χαρακτηριστικά των διαφόρων τεχνικών αλληλεπίδρασης, ενώ στην συνέχεια γίνεται ομαδοποίηση αυτών, βάση των κοινών τους χαρακτηριστικών, των στόχων, αλλά και του συνόλου των στοιχείων τους.

Με την παρούσα κατηγοριοποίηση οι ερευνητές προσπαθούν να δημιουργήσουν ένα πλαίσιο, δηλαδή μια «γλώσσα» για την περιγραφή των τεχνικών αλληλεπίδρασης, και ως συνέπεια των ίδιων των ψηφιακών υλικών. Συμπερασματικά, επιδιώκεται η διευκόλυνση του εκπαιδευτικού, για την επιλογή και την χρήση των κατάλληλων ψηφιακών υλικών, καθώς και η αναγνώριση των λειτουργιών των αλληλεπιδράσεων, που παρέχουν τα υλικά αυτά, ώστε να εμφανίζεται αποτελεσματικότερη λειτουργία αυτών και ως συνέπεια να υποστηριχθεί η διερευνητική μάθηση.

Οι αλληλεπιδράσεις μπορούν να λειτουργήσουν σε δύο επίπεδα, στο μακρο-επίπεδο και στο μικρο-επίπεδο. Οι αλληλεπιδράσεις στο μακρο-επίπεδο, αφορούν τις παιδαγωγικές σχεδιαστικές επιλογές, «ψηλού» επιπέδου, οι οποίες βασίζονται στις θεωρίες μάθησης όπως τον κονστρουκτιβισμό, την εμπλαισωμένη μάθηση, του αντικειμενισμού (instructivism) κτλ. (Boyle, 1997). Οι αλληλεπιδράσεις στο μικρο-επίπεδο, αφορούν τις δυνατότητες του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων, «χαμηλότερου» επιπέδου, όπως είναι η δυνατότητα εστίασης (zooming), η εύρεση, η αναδιοργάνωση, η συσχέτιση κτλ (Card κ.ά. 1999). Διαφορετικές αλληλεπιδράσεις του μικρο-επιπέδου μπορούν να ενσωματωθούν στον σχεδιασμό των αλληλεπιδράσεων του μακρο-επιπέδου. Επειδή οι αλληλεπιδράσεις του μικρο-επιπέδου, έχουν σχηματιστεί για να υποστηρίξουν τις δραστηριότητες του χαμηλότερου επιπέδου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πλήθος περιβαλλόντων, όπως αυτό των προσομοιώσεων, των μικρόκοσμων και των εκπαιδευτικών παιχνιδιών. Τέλος, να σημειωθεί, ότι στην παρούσα διπλωματική, δεν γίνεται αναφορά στις αλληλεπιδράσεις του μακρο-επιπέδου αλλά του μικρο-επιπέδου, διότι τα ψηφιακά υλικά που μελετώνται περιέχονται σε αυτό.

Για να μπορεί ένα σχεδιαστής γνωστικών μαθηματικών εργαλείων, να σχεδιάσει μια OMA, πρέπει να γνωρίζει τους διάφορους τύπους των αλληλεπιδράσεων που είναι διαθέσιμοι, να κατανοεί τα

χαρακτηριστικά του κάθε τύπου, να γνωρίζει του ποικίλους τρόπους που ένας συγκεκριμένος τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να έχει οικειότητα με κάποια παραδείγματα του τρόπου που οι τεχνικές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αλληλεπιδράσουν με τις OMA. Παρακάτω παραθέτονται οι δυο βασικές κατηγορίες για τις αλληλεπιδράσεις με τις OMA, ενώ στην συνέχεια αναλύονται οι κατηγορίες των αλληλεπιδράσεων που είναι βασισμένες σε δραστηριότητες, σε μικρό-επίπεδο:

A. **Βασικές αλληλεπιδράσεις (Basic):** Οι βασικές αλληλεπιδράσεις υποστηρίζονται από τρεις βασικές «μεταφορές», οι οποίες παράγονται από τον τρόπο που το ανθρώπινο σώμα κινείται για να αλληλεπιδράσει με τον εξωτερικό κόσμο.

- i. **Συνομιλία (Conversing):** Χρήση της δυνατότητας για ομιλία. Πιο συγκεκριμένα, μέσω αυτής της αλληλεπίδρασης εμφανίζονται τεχνικές εισαγωγής πληροφοριών, δυνατότητες για συμπλήρωση δοθείσας φόρμας, μενού βασισμένο σε δοθέν κείμενο (εκφώνηση δραστηριότητας), διάλογοι που απαρτίζονται από φυσική γλώσσα, χειρονομίες με το στυλό (από τα άτομα που εργάζονται στην δραστηριότητα), μακροεντολές, προγραμματιστικές γλώσσες που βασίζονται σε διαδικασίες, και κείμενα που βασίζονται σε εντολές.
- ii. **Χειρισμός (manipulating):** Ο χειρισμός, ο οποίος βασίζεται στην χρήση των χεριών, από το άτομο. Ειδικότερα, αλληλεπιδράσεις του χειρισμού, είναι δράσεις του μαθητή, όπως η επιλογή στοιχείων του OMA, σύρσιμο (dragging), μετακίνηση, μετατροπή και μορφοποίηση των OMA.
- iii. **Πλοήγηση (navigating):** Η πλοήγηση, που βασίζεται στην περιπλάνηση του ατόμου. Η πλοήγηση διαμέσου της OMA, αναφέρεται στην κίνηση πάνω ή μέσα στην αναπαράσταση, μέσω της οποίας οι μαθητές διευκολύνονται για την ανάπτυξη ενός εσωτερικού γνωστικού χάρτη, που αντιστοιχεί σε αυτόν της OMA (Golledge, 1999; Spence, 1999; NCTM, 2000; Sedig κ.ά., 2003).

B. **Αλληλεπιδράσεις βασισμένες σε δραστηριότητες (task-based):** Βασίζονται σε «χαμηλών» επιπέδων δραστηριότητες, τις οποίες οι μαθητές εκτελούν για να διερευνήσουν μια OMA. Αυτές οι δραστηριότητες είναι:

- i. **Παραγωγή κίνησης (Animating):** Χρήση αλληλεπιδράσεων που παραπέμπουν στην εμφάνιση κινουμένων σχεδίων. Η αλληλεπίδραση αυτή, εστιάζει την προσοχή των μαθητών σε κάποια ενσωματωμένη λεπτομέρεια της OMA, διευκολύνει την οπτικοποίηση δυναμικών αναπαραστάσεων των κωδικοποιημένων πληροφοριών και των αντιλήψεων για τις σημασιολογικές μετατροπές της OMA, ενώ παράλληλα υποστηρίζει την γνωστική λειτουργία, η οποία αναπτύσσεται από τον μαθητή.
- ii. **Σχολιασμός (Annotating):** Τοποθέτηση σημειώσεων (σχολίων), από τον μαθητή ή από την OMA. Η αλληλεπίδραση αυτή διευκολύνει τους μαθητές να περιγράψουν τις λειτουργίες και τις δυνατότητες της OMA, να αναρωτηθούν για το περιεχόμενο αυτής και να παρατηρήσουν συγκεκριμένα στοιχεία της (Sherman & Craig, 2003). Επιπλέον, η κατανόηση για τις μαθηματικές έννοιες που εμφανίζονται, αλλά και ο αναστοχασμός, προωθείται από την παρούσα αλληλεπίδραση (Peper & Mayer, 1986). Τέλος, μειώνει τις νοητικές δραστηριότητες, ώστε να υποστηριχθούν οι στόχοι των μαθητών (Preece κ.ά., 2002), γίνεται ανάκληση σε παρελθοντικές ενέργειες και επιτυγχάνεται ο αναστοχασμός αυτών (Pimm, 2005; Preece κ.ά., 2002; Sedig κ.ά.; 2002), ενώ παράλληλα επιτρέπεται στους μαθητές η οργάνωση και η σύνδεση διαφορετικών αντικειμένων (Shneiderman & Kang, 2000).
- iii. **Σπάσιμο σε κομμάτια (Chunking):** Ομαδοποίηση ενός πλήθους συνδεμένων ή ασύνδετων στοιχείων της OMA. Η αλληλεπίδραση αυτή υποστηρίζει τις γνωστικές διαδικασίες που αφορούν την κωδικοποίηση, την εξαγωγή πληροφοριών, την μνήμη,

καθώς και την κατανόηση των πληροφοριών (Winn, 1993; Gobet κ.ά., 2001). Ο μαθητής αντιμετωπίζει ένα σύνολο στοιχείων και όχι επιμέρους στοιχεία, μειώνοντας έτσι, το πλήθος των πληροφοριών που πρέπει να αποθηκευτούν στην μνήμη του (Fleming, 1993).

- iv. **Σύνθεση** (Composing): Συνδυασμός διαχωρισμένων στοιχείων για την δημιουργία μιας ΟΜΑ. Ο μαθητής έχει την δυνατότητα να διεξάγει την προαναφερθείσα αλληλεπίδραση, μέσω της συνάθροισης, της κατασκευής και της ένωσης των στοιχείων αυτών. Η αλληλεπίδραση αυτή, είναι παρόμοια με αυτήν «σπάσιμο σε κομμάτια», αλλά ο στόχος της είναι να κατασκευάσει ο μαθητή, ολόκληρη την ΟΜΑ. Έτσι δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να επιβεβαιώσει, να διερευνήσει και να πειραματιστεί με τις δοθείσες μαθηματικές έννοιες (Hazzan and Goldenberg, 1997; Jones, 2000; Marrades and Gutierrez, 2000; Healy and Hoyles 2001). Επίσης χρησιμοποιείται για την προώθηση ενός παραγωγικού συλλογισμού, ώστε να παρέχονται μέσα για διεξαγωγή μαθηματικών. (Hanna, 2000; Scher and Goldenberg, 2001; Leung and Lopez-Real, 2002).
- v. **Κόψιμο** (Cutting): Αφαίρεση ανεπιθύμητων ή μη αναγκαίων στοιχείων από την ΟΜΑ. Οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να εστιάσουν σε συγκεκριμένα στοιχεία του ΟΜΑ, για περαιτέρω ανάλυση. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα αυτής της αλληλεπίδρασης, εμφανίζεται σε ΟΜΑ τα οποία «αρβύζουν» την δομή τους, ενώ με την συγκεκριμένη αλληλεπίδραση, ο μαθητής μπορεί να την «αποκαλύψει».
- vi. **Φιλτράρισμα** (Filtering): Εμφάνιση ή απόκρυψη ή μετατροπή ενός επιλεγόμενου υποσυνόλου στοιχείων μιας ΟΜΑ, σύμφωνα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά ή κριτήρια. Η αλληλεπίδραση αυτή δίνει τον έλεγχο των αντικειμένων, στους μαθητές, ενώ παρουσιάζει συγκεκριμένο βαθμό λεπτομέρειας και αφαίρεσης, που παρέχει η ΟΜΑ. Συμπερασματικά, η χρήση της παρούσας αλληλεπίδρασης παρέχει δυνατότητες για διερεύνηση της δομής της ΟΜΑ.
- vii. **Κατακερματισμός** (Fragmenting): Η διάσπαση μιας ΟΜΑ, σε στοιχειώδης μέρη. Πιο συγκεκριμένα, το μαθηματικό αντικείμενο το οποίο μελετάται, και το οποίο δέχεται την αλληλεπίδραση του κατακερματισμού και μέσω αυτής χωρίζεται σε διαφορετικά μέρη, η νέα αναπαράσταση που προκύπτει, διατηρεί τις συνδέσεις ανάμεσα στα επιμέρους αντικείμενα και στις σχετικές θέσεις αυτών (Webb, 2003).
- viii. **Διερεύνηση** (Probing): Η εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές, ιδιότητες ή στοιχεία μιας ΟΜΑ, για εμφάνιση σημαντικών πληροφοριών και για περαιτέρω ανάλυση. Μερικά από τα εργαλεία που μπορεί να περιέχει μια ΟΜΑ για την διεξαγωγή της προαναφερθείσας αλληλεπίδρασης είναι: αναδυόμενα μενού (pop-up menus), αιώρηση (panning), ζουμ και η εντολή «μεγεθυντικός φακός» (magic lenses). Οι λεπτομέρειες που μπορεί να εμφανίσει η συγκεκριμένη αλληλεπίδραση, έχουν την δυνατότητα να παρουσιάζονται σε διαφορετικά μέρη του δυναμικού περιβάλλοντος, χωρίς απαραίτητα να επικαλύπτεται η ΟΜΑ ή μερικές πτυχές αυτής, έτσι μειώνεται ο οπτικός «θόρυβος» και επιτρέπεται περισσότερος χώρος για την εμφάνιση άλλων πληροφοριών.
- ix. **Αναδιοργάνωση** (Rearranging): Η αλλαγή της θέσης ή της κατεύθυνσης των στοιχείων της ΟΜΑ, στο χώρο. Η παρούσα αλληλεπίδραση, παρέχει δυνατότητες για εξέλιξη της κατανόησης των εσωτερικών σχέσεων και δομών της ΟΜΑ, ενώ είναι χρήσιμη για την επίλυση ενός προβλήματος, επιτρέποντας στους μαθητές να εστιάσουν σε νέες πληροφορίες, καθώς εστιάζουν σε συγκεκριμένες δοθείσες πληροφορίες, που σε άλλη περίπτωση θα ήταν δύσκολη η διάκριση αυτών (Spence, 2001). Τέλος, οι Kordaki και Πόταρη (2002) περιγράφουν την αναδιοργάνωση, ως μια μέθοδο που βοηθάει τους μαθητές να υπολογίσουν τον χώρο των πολύπλοκων σχημάτων, ενώ έμμεσα επιδεικνύεται η έννοια της διατήρησης του χώρου.

- x. **Αναδιαμόρφωση (Repicture):** Η παρουσίαση της OMA, με εναλλακτικό τρόπο, η οποία επιτρέπει στους μαθητές να παρατηρήσουν την OMA, με διαφορετικές οπτικές. Η παρούσα αλληλεπίδραση μπορεί να επιτευχθεί με λειτουργίες του λογισμικού, όπως αυτής του συρσίματος.
- xi. **Οριοθέτηση του πεδίο (Scoring):** Η αλλαγή του βαθμού ορατότητας της κατασκευής ή της καινούργιας κατασκευής μιας OMA, με την προσαρμογή του οπτικού πεδίου (Sedig & Morey, 2005). Με την δυναμική μεταβολή του οπτικού πεδίου μιας OMA, οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν το σημείο εκκίνησης, να ανακαλύψουν την διαδικασία και την ροή της εξέλιξης της, καθώς και την κατασκευή της από το σημείο αυτό. Η παρούσα αλληλεπίδραση, αποτελεί μια σημαντική τεχνική, διότι επιτρέπει στον μαθητή να εξερευνήσει την διαδικασία κατασκευής μιας πολύπλοκης OMA, μέσω της συνεχής ροής και ελέγχου των βημάτων κατασκευής της αλληλεπίδρασης.
- xii. **Αναζήτηση (Searching):** Η αναζήτηση για την ύπαρξη ή την τοποθεσία, συγκεκριμένων ιδιοτήτων ή στοιχείων ή δομών του OMA. Η αλληλεπίδραση αυτή, είναι μια άμεση δραστηριότητα, στην οποία οι μαθητές προσπαθούν να απαντήσουν ενεργά στις δοθείσες ερωτήσεις ή να αναπτύξουν την κατανόηση τους για μια συγκεκριμένη ερώτηση ή ιδέα (Bates, 1986). Απαιτείται από τον μαθητή να γνωρίζει τα στοιχεία που αναζητά, ενώ είναι σημαντικό να μπορεί να εκφράσει τις προθέσεις του, μέσω της αναπαράστασης. Συμπερασματικά, κατά την διεξαγωγή της έρευνας των μαθητών είναι απαραίτητη η αναζήτηση καθώς και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

C. Ένωση αλληλεπιδράσεων που βασίζονται σε δραστηριότητες (combing task-based)

Συχνά μια αλληλεπίδραση μπορεί να αντιπροσωπεύει ένα πλήθος από τεχνικές που έχουν κοινά στοιχεία, στόχους και επιδιωκόμενα οφέλη, καθώς και χαρακτηριστικά. Αυτές οι τεχνικές χαρακτηρίζονται ως παραλλαγές μιας άλλης τεχνικής και κατατάσσονται στην τρίτη αυτή βασική κατηγορία. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το εργαλείο παρέχει στους μαθητές διαφορετικές αλληλεπιδράσεις για την υποστήριξη των διαφόρων δραστηριοτήτων που διεξάγουν οι ίδιοι (Sedig κ.ά. 2003).

Συμπερασματικά, η κατηγοριοποίηση που αναπτύχθηκε μέσω αυτής της έρευνας, έχει στόχο, την υποστήριξη των γνωστικών μαθηματικών εργαλείων, για την επιλογή και την ανάλυση των διαφορετικών τεχνικών αλληλεπίδρασης καθώς και την ενθάρρυνση για σχεδιασμό περισσότερων καινοτόμων μαθηματικών εργαλείων που βασίζονται στην αλληλεπίδραση των μαθητών με αυτά.

2.3.4 Λειτουργίες του συρσίματος

Ένα περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, επιτρέπει στον μαθητή την δημιουργία γεωμετρικών αντικειμένων και την τροποποίηση αυτών, μέσω της λειτουργίας του συρσίματος (dragging). Διάφοροι ερευνητές, έχουν ασχοληθεί με την αξιοποίηση των λειτουργιών του συρσίματος (Healy 2000; Laborde 2001; Arzarello κ.ά. 2002; Holzl, 2001). Η παρούσα διπλωματική εργασία, εστιάζει σε τρεις βασικές λειτουργίες του συρσίματος, που παρατίθενται σε έρευνα των Trgalova και Jahn (2013). Συγκεκριμένα, προτείνεται η αναγνώριση των λειτουργιών του συρσίματος για την ενίσχυση του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων, ενώ παράλληλα παρέχονται δυνατότητες για δημιουργία απαιτητικών δραστηριοτήτων. Οι προαναφερθείσες λειτουργίες αναλύονται παρακάτω:

- ❖ **Σύρσιμο για επιβεβαίωση:** Γίνεται ο έλεγχος των γνωστών γεωμετρικών ιδιοτήτων, που συμπεριλαμβάνονται σε δοθέν γεωμετρικό σχήμα.
- ❖ **Σύρσιμο για παραγωγή εικασιών:** Παρέχει δυνατότητες για εύρεση των νέων ιδιοτήτων του σχήματος, μέσω της αντίληψης της αμεταβλητότητας των στοιχείων, η οποία παρατηρείται με τις λειτουργίες του συρσίματος.
- ❖ **Σύρσιμο για επικύρωση ή απόρριψη:** Γίνεται ο έλεγχος της διατήρησης των γεωμετρικών ιδιοτήτων, του σχήματος που κατασκευάζει μαθητής, μέσω του συρσίματος.

2.3.5 Ανθεκτικές και Εύπλαστες κατασκευές

Σύμφωνα με έρευνα της Healy (2000), οι κατασκευές που περιέχονται σε ένα ψηφιακό υλικό, μπορούν να διακριθούν σε δύο είδη. Η διαδικασία κατασκευής του προαναφερθέντος αντικειμένου, μπορεί να διακρίνει μια «ανθεκτική» ή μια «εύπλαστη» κατασκευή. Παρακάτω παρατίθενται μερικά στοιχεία για τα δυο αυτά είδη, κατασκευών:

- ❖ **Ανθεκτική κατασκευή:** Μια από τις κατασκευές που μπορεί να συμπεριλαμβάνεται στο ψηφιακό υλικό, είναι αυτή, της «ανθεκτικής». Η εξερεύνηση της προαναφερθείσας κατασκευής, δίνεται έτοιμη στους μαθητές, για την προώθηση αυτών στην ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών που περιέχει. Οι γεωμετρικές ιδιότητες που εμφανίζονται, διατηρούνται με την χρήση των λειτουργιών του συρσίματος. Κατά τον έλεγχο μιας ανθεκτικής κατασκευής, η προσοχή του μαθητή, μετακινείται από το γενικό προς το ειδικό, καθώς παράγεται μια οικογένεια σχημάτων με την ίδια γεωμετρική «αμφίεση» (Καλογερία & Κυνηγός, 2014). Επιπροσθέτως, στις ανθεκτικές κατασκευές, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να διακρίνει τις ιδιότητες που είναι συμπτωματικές (οπτικές), από εκείνες που είναι απαραίτητες, καθώς και τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς, από εκείνες που είναι πιο ειδικές (Laborde, 2005).
- ❖ **Εύπλαστη κατασκευή:** Οι λειτουργίες του συρσίματος δεν χρησιμοποιούνται ως εργαλείο ελέγχου, αλλά αποτελούν μέρος της κατασκευής. Οι μαθητές παρατηρούν πώς η διαπραγματεύσιμη ιδιότητα γίνεται εμφανής, μέσω μιας άλλης ιδιότητας η οποία ικανοποιείται χειρονακτικά ή οπτικά. Έτσι, το γενικό προκύπτει από το ειδικό, μέσα από αναζήτηση του συνόλου των σημείων που ικανοποιούν τις δοσμένες συνθήκες (Καλογερία & Κυνηγός, 2014).

Τέλος, επισημαίνεται ότι για μεγάλο χρονικό διάστημα, η προσοχή των εκπαιδευτικών ήταν στραμμένη στις «ανθεκτικές» κατασκευές, οι οποίες θεωρούνταν το βασικό πλεονέκτημα των ΛΔΓ (Laborde, 2005). Παρόλα αυτά, αναδείχθηκε η σημασία των «εύπλαστων» κατασκευών και η ανάγκη της διδακτικής τους αξιοποίησης.

2.3.6 Επίπεδα ενσωμάτωσης των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας

Ένα ακόμα θεωρητικό πλαίσιο που έχει αναπτυχθεί για την υποστήριξη των ψηφιακών υλικών, για την επέκταση της διερευνητικής μάθησης, είναι αυτό της Laborde (2002). Ειδικότερα, στην έρευνα της διέκρινε, τέσσερα επίπεδα ενσωμάτωσης ενός ΛΔΓ, στις δραστηριότητες που δημιουργούν οι εκπαιδευτικοί, για την ενασχόληση των μαθητών, με τις ίδιες.

1. Πρώτο επίπεδο ενσωμάτωσης της ΛΔΓ:
Δραστηριότητες στις οποίες το περιβάλλον διευκολύνει τις ενέργειες/δράσεις των μαθητών, αλλά δεν αλλάζει την δραστηριότητα. Για παράδειγμα, δημιουργία σχημάτων, εμφάνιση μετρήσεων κτλ.
2. Δεύτερο επίπεδο ενσωμάτωσης της ΛΔΓ:
Δραστηριότητες στις οποίες το ΛΔΓ ενισχύει την διερεύνηση των μαθητών. Για παράδειγμα, η εύρεση σχέσεων σε μια γεωμετρική κατασκευή μέσω του συρσίματος.
3. Τρίτο επίπεδο ενσωμάτωσης της ΛΔΓ:
Δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν σε X-M, αλλά μπορεί να λυθούν/διερευνηθούν με διαφορετικό τρόπο, σε ΛΔΓ. Για παράδειγμα, μια γεωμετρική κατασκευή, μπορεί να ολοκληρωθεί στο λογισμικό μέσω μετασχηματισμών.
4. Τέταρτο επίπεδο ενσωμάτωσης της ΛΔΓ:
Δραστηριότητες που μπορούν να υλοποιηθούν μόνο με την χρήση του ΛΔΓ. Για παράδειγμα, η επίτευξη του πειραματισμού με ένα δυναμικό σχήμα προκειμένου να εντοπιστούν οι ιδιότητές του γεωμετρικού αντικειμένου.

3. Μεθοδολογία

3.1 Στόχοι της έρευνας – Ερευνητικά ερωτήματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται η σύνθεση ενός πλαισίου αποτίμησης των παιδαγωγικών δυνατοτήτων των ψηφιακών υλικών, ώστε να αξιοποιηθεί για την μελέτη ενός συγκεκριμένου πλήθους ψηφιακών υλικών, τα μικροπειράματα, τα οποία αναλύθηκαν σε προηγούμενη ενότητα (2.2.2.2). Η επιλογή των μικροπειραμάτων, για την αποτίμηση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων τους, έγινε διότι παρέχονται μέσω του Πανελληνίου οργανωμένου αποθετηρίου (Φωτόδεντρο), το οποίο αποτελεί ένα όχημα για παρέμβαση στην μαθησιακή διαδικασία και έχει στόχο την ενίσχυση της μαθηματικής κατανόησης, τον εμπλουτισμό του διαθέσιμου υλικού και συνακόλουθα της διδασκαλίας αυτού. Επομένως, η μελέτη των ψηφιακών υλικών αυτών, κάνει αναπόφευκτη την ανάλυση των χαρακτηριστικών τους, για την αξιοποίηση των ίδιων, στην επέκταση των δυνατοτήτων της παιδαγωγικής αξιοποίησης τους.

Οι στόχοι της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι:

1. Να γίνει διερεύνηση των υπάρχοντων θεωρητικών πλαισίων και δομημάτων για την αξιοποίηση αυτών στην μελέτη της παιδαγωγικής αξιοποίησης ψηφιακών υλικών για την διδασκαλία των μαθηματικών.
2. Να γίνει μελέτη, με την χρήση εστιασμένου πλαισίου, των δυνατοτήτων μια κατηγορίας ψηφιακού υλικού, τα μικροπειράματα, που σχεδιάστηκαν με στόχο τον εμπλουτισμό των σχολικών βιβλίων των μαθηματικών και την ενίσχυση της κατανόησης από την πλευρά των μαθητών.
3. Να γίνει εξέταση της χρήσης της ανάλυσης αυτής, για την ενίσχυση της παιδαγωγικής αξίας ενός μικροπειράματος, μέσω των πιθανών μεταβολών στον σχεδιασμό του.

3.2 Πλαίσιο της έρευνας

Αρχικά, δημιουργήθηκε πλαίσιο, το οποίο αναδείχθηκε από την σύνθεση των υπάρχοντων θεωρητικών πλαισίων και δομημάτων, που ήταν εστιασμένα στην αποτίμηση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων των ψηφιακών υλικών (Trgalova κ.ά., 2010; Mahe & Noel, 2006; Sedig & Sumner, 2006; Holzl, 2001; Trgalova & Jahn, 2013; Healy, 2000; Laborde, 2002). Η σύνθεση αυτή, ανέδειξε έναν τρόπο για κατηγοριοποίηση και ποιοτική ανάλυση των ψηφιακών υλικών, αλλά και για την αναγνώριση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων τους.

Στην δεύτερη φάση, το προαναφερθέν πλαίσιο, εφαρμόζεται σε 187 μικροπειράματα, για την κατηγοριοποίησή τους, τα οποία συλλέχτηκαν από το διαδραστικό σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας, της τάξης Β' Λυκείου¹. Επιπλέον, έγινε ποιοτική ανάλυση σε 8 μικροπειράματα, τα οποία επιλέχθηκαν από τα 93 μικροπειράματα λογισμικού δυναμικού χειρισμού (ΛΔΧ). Η επιλογή αυτών, στηρίχτηκε στα στοιχεία που εμφάνισε η κατηγοριοποίηση του προηγούμενου βήματος.

Στην τρίτη φάση της έρευνας, παρουσιάζεται η τροποποίηση ενός μικροπειράματος. Πιο συγκεκριμένα, η τροποποίηση αυτή, βασίστηκε στην προηγούμενη ποιοτική ανάλυση των χαρακτηριστικών του, ενώ γίνεται προσπάθεια για επέκταση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων τους, αλλά και της διερευνητικής μάθησης που παρέχει.

¹ Ιστοσελίδα : <http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-B109/710/4688,21213/>

4. Πλαίσια κατηγοριοποίησης και αποτίμησης ψηφιακών υλικών

Η μελέτη του θεωρητικού πλαισίου, ανέδειξε ένα πλαίσιο αξιολόγησης, των παιδαγωγικών δυνατοτήτων ενός ψηφιακού υλικού και των λειτουργιών του λογισμικού, στο οποίο εφαρμοζόταν. Επιπλέον, αναπτύχθηκε πλαίσιο για την κατηγοριοποίηση των ψηφιακών υλικών, ώστε να είναι εφικτή η επιλογή συγκεκριμένου πλήθους ψηφιακών υλικών, για την ποιοτική ανάλυση των χαρακτηριστικών τους, η οποία διεξάγεται σε επόμενο βήμα.

Επομένως, για την κατηγοριοποίηση των ψηφιακών υλικών, αναπτύχθηκε το ακόλουθο πλαίσιο:

- 1) **Είδος λογισμικών της διδακτικής των μαθηματικών:** Το λογισμικό διδακτικής γεωμετρίας (π.χ. ΛΔΧ ή ΛΔΓ), με τα οποία διεξάγονται το πλήθος των επιλεγμένων ψηφιακών υλικών.
- 2) **Κατηγοριοποίηση με βάση την μαθηματική δραστηριότητα:** Τα ψηφιακά υλικά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν βάση των μαθηματικών δραστηριοτήτων που εμφανίζονται σε αυτά. Για παράδειγμα, οι μαθηματικές δραστηριότητες ενός ψηφιακού υλικού, μπορεί να εστιάζονται στην ανάπτυξη εικασιών με στόχο την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης. Οι κατηγορίες αυτές διευκολύνουν την ακόλουθη ποιοτική ανάλυση, ενώ παρέχει μια γενική εικόνα του πλήθους των ψηφιακών υλικών, που μελετώνται.
- 3) **Λειτουργίες συρσίματος:** Η ανάλυση αυτή βασίστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο των Trgalova και Jahn (2013), το οποίο αναλύθηκε στην ενότητα 2.3.4.
- 4) **Επίπεδα ενσωμάτωσης της τεχνολογίας:** Βάση του θεωρητικού πλαισίου της Laborde (2002), το οποίο αναλύθηκε στην ενότητα 2.3.6.

Για την ποιοτική ανάλυση, χρησιμοποιήθηκαν οι διάφορες θεωρίες για την αποτίμηση της ποιότητας και των παιδαγωγικών δυνατοτήτων, ενώ έγινε πρόσθεση σταδίων ανάλυσης, με στόχο την εξαγωγή μιας ολοκληρωμένης περιγραφής και αξιολόγησης των χαρακτηριστικών ενός ψηφιακού υλικού. Στην συνέχεια, για την διευκόλυνση του αναγνώστη, παρατίθεται το πλαίσιο ποιοτικής αποτίμησης των χαρακτηριστικών στον πίνακα 2.

Πλαίσιο ποιοτικής αποτίμησης ψηφιακών υλικών	
Στάδιο ανάλυσης	Σχόλια
<i>Περιγραφή ψηφιακών υλικών</i>	Στοιχεία για την περιγραφή των λειτουργιών και των δυνατοτήτων του ψηφιακού υλικού, όσον αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο και τις τεχνικές πτυχές αυτού.
<i>Μεταδεδομένα ψηφιακών υλικών</i>	Μεταδεδομένα του ψηφιακού υλικού που επισυνάπτονται στην ιστοσελίδα, του διαδικτυακού αποθετηρίου, από το οποίο λήφθηκε.
<i>Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου των Trgalova κ.ά. (2010).
<i>Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου των Trgalova κ.ά. (2010).
<i>Δυνατότητες λογισμικού δυναμικού χειρισμού</i>	
<i>Κατηγορίες αλληλεπιδράσεων</i>	Γίνεται αναγνώριση και σχολιασμός των κατηγοριών των δοθέντων αλληλεπιδράσεων, βάση του θεωρητικού πλαισίου των Sedig και Sumner. (2006), για το οποίο έγινε ανάλυση στο 2.3.3.
<i>Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου των Trgalova κ.ά. (2010), για το οποίο έγινε ανάλυση 2.3.2.
<i>Αναγνώριση λειτουργιών συρσίματος</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου των Trgalova κ.ά. (2010).
<i>Αναγνώριση ανθεκτικών ή εύπλαστων κατασκευών</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου της Healy (2000), το οποίο αναλύθηκε στην ενότητα 2.3.4.
<i>Λειτουργίες του συρσίματος</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου των Trgalova και Jahn (2013).
<i>Επίπεδα ενσωμάτωσης του ΛΔΓ</i>	Βάση του θεωρητικού πλαισίου της Laborde (2002).
<i>Τελική ανάλυση</i>	Σύνοψη των κύριων στοιχείων που προέκυψε από την ανάλυση των χαρακτηριστικών του εκάστοτε ψηφιακού υλικού.

Πίνακας 2: Πλαίσιο ποιοτικής αποτίμησης ψηφιακών υλικών

Τέλος, επισημαίνεται ότι, το παρόν πλαίσιο που εστίασε στην αποτίμηση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων ενός ψηφιακού υλικού, επικεντρώθηκε σε ψηφιακά υλικά που αναπτύσσονται σε ΛΔΧ. Επομένως, για την κατηγοριοποίηση των ψηφιακών υλικών, που εφαρμόζονται σε διαφορετικά λογισμικά της διδακτικής των μαθηματικών, είναι απαραίτητο να αντικατασταθούν οι δύο τελευταίες διαστάσεις (Laborde, 2002; Trgalova & Jahn, 2013), ενώ για την ποιοτική ανάλυση, πρέπει να γίνει αντικατάσταση των κριτηρίων της αποτίμησης της ποιότητας του ψηφιακού υλικού (Trgalova κ.ά., 2010), καθώς και των λειτουργιών και δυνατοτήτων του ΛΔΓ (Laborde, 2002; Healy, 2000).

5. Ανάλυση χαρακτηριστικών μικροπαραμάτων

5.1 Κατηγοριοποίηση μικροπαραμάτων

Για την κατηγοριοποίηση των 187 μικροπαραμάτων, χρησιμοποιήθηκε το αρχικό πλαίσιο αξιολόγησης, το οποίο αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα (4). Επισημαίνεται ότι η 1^η, 3^η και 4^η διάσταση της κατηγοριοποίησης, παραμένουν αμετάβλητες, ενώ η 2^η διάσταση (κατηγοριοποίηση βάση της μαθηματικής δραστηριότητας), αλλάζει, λόγω της εστίασης της παρούσας διπλωματικής,

στα μικροπειράματα. Ειδικότερα, οι κατηγορίες σύμφωνα με τις μαθηματικές δραστηριότητες των ψηφιακών υλικών είναι οι παρακάτω:

- i. Απόδειξη και εικασία: Τα μικροπειράματα σε αυτή την κατηγορία, δίνουν την δυνατότητα στον μαθητή να αναπτύξει εικασίες για την τελική παραγωγή της απόδειξης της δοθείσας γεωμετρικής έννοιας.
- ii. Έλεγχος γεωμετρικών ιδιοτήτων: Ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει τις γεωμετρικές ιδιότητες που παρουσιάζονται μέσω των αναπαραστάσεων και των λειτουργιών αυτών, που παρέχει το μικροπειράμα, ενώ παράλληλα μπορεί να παρέμβει με διαφορετικούς τρόπους στις δοθείσες κατασκευές, ώστε να ελέγξει και να επιβεβαιώσει αυτές.
- iii. Διερεύνηση μοντέλου: Τα μικροπειράματα της παρούσας κατηγορίας, δίνουν την ευκαιρία στον μαθητή, να παρατηρήσει τις διάφορες ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών, που είτε αναπτύσσονται μέσω των λειτουργιών του λογισμικού, είτε παρουσιάζονται ήδη έτοιμα στον ίδιο. Για παράδειγμα, τα μικροπειράματα του τελευταίου κεφαλαίου, που εξελίσσονται με το λογισμικό Scratch 3d, παρέχουν στον μαθητή μια τρισδιάστατη κατασκευή, την οποία μπορεί να επεξεργαστεί, να αναπτύξει εικασίες και να εξάγει πληροφορίες, οι οποίες θα τον διευκολύνουν στην κατανόηση των ιδιοτήτων του σχήματος.
- iv. Κατασκευές: Στην κατηγορία αυτή, παρέχονται εργαλεία και οδηγίες για την διεξαγωγή της δοθείσας γεωμετρικής κατασκευής.

Στον πίνακα 3, εμφανίζεται το πλήθος των διαφορετικών λογισμικών που χρησιμοποιούνται για την διεξαγωγή των μικροπειραμάτων του διαδραστικού βιβλίου της Γεωμετρίας, της τάξης Β' λυκείου. Το μεγαλύτερο πλήθος των μικροπειραμάτων διεξάγονται μέσω του ΛΔΓ, Geogebra. Βάση αυτής της παρατήρησης, η ανάλυση που εμφανίζεται παρακάτω, έγινε για τα μικροπειράματα τα οποία χρησιμοποιούν το προαναφερθέν λογισμικό, ενώ η επιλογή των μικροπειραμάτων, για την ποιοτική ανάλυση των χαρακτηριστικών τους, η οποία γίνεται σε επόμενη ενότητα, βασίζεται στο ίδιο λογισμικό. Να σημειωθεί, ότι τα μικροπειράματα που διεξήχθησαν σε λογισμικό «Scratch 3d», συμπεριλαμβάνονται μόνο στο 13^ο κεφάλαιο, του σχολικού βιβλίου.

Λογισμικό	Μικροπειράματα
Geogebra	93
Χελωνόκοσμος	23
Scratch 3d	71

Πίνακας 3: Λογισμικά που εμφανίζονται στο πλήθος των μικροπειραμάτων

Η ανάλυση των μικροπειραμάτων, αρχικά εστιάστηκε στην αναγνώριση των μαθηματικών δραστηριοτήτων, που περιείχαν. Επομένως, παρατηρήθηκε ότι τα μικροπειράματα που βασίζονται στην «απόδειξη και την εικασία», αποτελούν το μεγαλύτερο πλήθος των μικροπειραμάτων. Επιπροσθέτως, να σημειωθεί ότι στην κατηγορία «Άλλα», κατατάσσεται το πλήθος των μικροπειραμάτων που μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε περισσότερες από μια κατηγορίες.

Μαθηματική δραστηριότητα	Μικροπειράματα
Απόδειξη και εικασία	52
Έλεγχος γεωμετρικών ιδιοτήτων	14
Κατασκευές	14
Διερεύνηση μοντέλου	8
Άλλα	5

Πίνακας 4:Κατηγορίες με βάση την μαθηματική δραστηριότητα που περιέχουν τα μικροπειράματα του ΛΔΓ.

Βάση του θεωρητικού πλαισίου που προτάθηκε από τους Trgalova και Jahn (2013), αναλύθηκαν οι δυνατότητες του συρσίματος, που εμφανίζονται στα μικροπειράματα αυτά. Η κύρια χρήση των λειτουργιών του συρσίματος, ήταν για παραγωγή εικασιών, από τους μαθητές. Επιπλέον, εμφανίζονται μικροπειράματα στα οποία η χρήση των λειτουργιών του συρσίματος είναι περιορισμένη ή δεν εμφανίζεται καθόλου. Στα μικροπειράματα αυτά, υπάρχει πλήθος δρομέων και κουμπιών που δίνουν την δυνατότητα για εμφάνιση διαφορετικών αναπαραστάσεων και δραστηριοτήτων.

Λειτουργίες Συρσίματος	Μικροπειράματα
1: Επαλήθευση	11
2: Εικασία	46
3: Επιβύρωση/Απόρριψη	22
Δεν εμφανίζεται-Ελάχιστη χρήση	14

Πίνακας 5: Εμφάνιση λειτουργιών συρσίματος στα μικροπειράματα.

Τέλος, η ποσοτική ανάλυση των μικροπειραμάτων, εστιάστηκε στην αναγνώριση του επιπέδου ενσωμάτωσης της τεχνολογίας των μικροπειραμάτων. Τα μικροπειράματα κατατάχθηκαν σε όλο το εύρος των επιπέδων, ενώ είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα περισσότερα κατηγοριοποιήθηκαν στο δεύτερο επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ	Μικροπειράματα
1 ^ο Επίπεδο	20
2 ^ο Επίπεδο	30
3 ^ο Επίπεδο	25
4 ^ο Επίπεδο	18

Πίνακας 6: Επίπεδα ενσωμάτωσης τεχνολογίας μικροπειραμάτων

5.2 Ποιοτική ανάλυση χαρακτηριστικών μικροπειραμάτων

Η παρούσα ανάλυση εστιάζει στην αναγνώριση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων των επιλεγμένων μικροπειραμάτων και βασίστηκε στο πλαίσιο που αναλύθηκε στην ενότητα 4. Επιπλέον, επισημαίνεται ότι το παρόν πλαίσιο δεν περιέχει το σύνολο των στοιχείων των θεωρητικών πλαισίων. Ειδικότερα, δεν γίνεται ανάλυση μερισμάτων κριτηρίων της μαθηματικής και της εργαλειακής διάστασης του περιεχομένου, της αξιολογικής διαδικασίας των Trgalova κ.ά. (2010), διότι τα μικροπειράματα, όπως έγινε αναφορά σε προηγούμενη ενότητα, είναι μαθησιακά αντικείμενα τα οποία ελέγχονται από ειδικές ομάδες εκπαιδευτικών. Επομένως, η εγκυρότητα του μαθηματικού περιεχομένου καθώς και η επάρκεια των αναπαραστάσεων για την διεξαγωγή των μικροπειραμάτων, είναι αυτονόητη για την παρούσα ομάδα ψηφιακών υλικών. Στην συνέχεια, αναλύονται τα 8 μικροπειράματα που επιλέχθηκαν, βάση των στοιχείων της κατηγοριοποίησης των 93 μικροπειραμάτων του ΛΔΧ.

5.2.1 Μικροπείραμα: Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου

Κατηγορία : «Απόδειξη και εικασία»

Περιγραφή

Η αρχική επαφή του μαθητή με το μικροπείραμα, γίνεται με την παρουσίαση της εκφώνησης της πρώτης δραστηριότητας και την δοθείσα αναπαράσταση. Η γεωμετρική κατασκευή που παρέχετε στους μαθητές, εμφανίζει μια διάμετρο του κύκλου (AB) και δύο χορδές (ΑΓ και ΑΔ). Επιπλέον, πάνω στην διάμετρο παρουσιάζονται τα ίχνη των χορδών (ΑΕ και ΑΖ), καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΒΔ, τα οποία οριοθετούν τα τρίγωνα. Τα προαναφερθέντα στοιχεία, εκτός από τα σημεία Ε και Ζ, δέχονται τις λειτουργίες του συρσίματος.

Αρχικά, ο μαθητής καλείται να μεταβάλλει τις θέσεις των σημείων Γ και Δ, για την παρατήρηση των εξαρτήσεων ανάμεσα στα δοθέντα στοιχεία. Η διερεύνηση των μετρικών σχέσεων των δυο ορθογώνιων τριγώνων, τα οποία είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο, διευκολύνει τον μαθητή για την ανάπτυξη των εικασιών του. Επιπροσθέτως, δίνεται στον μαθητή βοηθητικό κείμενο, για την επίλυση της δραστηριότητας, μέσω της ενεργοποίησης του κουμπιού «Βοήθεια». Το κείμενο αυτό ωθεί τον μαθητή να χρησιμοποιήσει εργαλεία του ΛΔΓ, για την διεξαγωγή των ζητούμενων μετρήσεων, με τα οποία ο ίδιος μπορεί να αναπτύξει και να επιβεβαιώσει τη εικασία του. Η παρακάτω εικόνα, παρουσιάζει την αρχική δραστηριότητα (Α.) του παρόντος μικροπειράματος, καθώς και το βοηθητικό κείμενο, το οποίο εμφανίζεται με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Βοήθεια» (γκρι πλαίσιο).

Προβολές χορδών στη διάμετρο του κύκλου
 Στην οθόνη δεξιά βλέπετε έναν κύκλο, μια διάμετρό του AB, E, Z δύο σημεία στην διάμετρό του και Γ, Δ δύο σημεία στην περιφέρεια του κύκλου. Να συγκρίνετε τα γινόμενα $AZ \cdot A\Gamma^2$ και $AE \cdot A\Delta^2$.

Α. Επίπεδα Διαπραγμάτευσης

Να μετακινήσετε τα σημεία Γ και Δ στην περιφέρεια του κύκλου και να διερευνήσετε τι διατηρείται σταθερό και τι αλλάζει στα τρίγωνα ΑΓΒ και ΑΔΒ. Ειδικότερα:

α) Ποιά η σχέση των τμημάτων ΑΕ και ΑΖ με τις χορδές ΑΓ και ΑΔ καθώς τα σημεία Γ, Δ κινούνται στην περιφέρεια του κύκλου;

β) Πώς μεταβάλλονται τα γινόμενα $AZ \cdot A\Gamma^2$ και $AE \cdot A\Delta^2$ καθώς τα σημεία Γ και Δ κινούνται στην περιφέρεια του κύκλου; Να παρατηρήσετε:

α) Με τη βοήθεια του εργαλείου 'Γωνία' στην εργαλειοθήκη να μετρήσετε τις γωνίες $\widehat{A\Gamma B}$, $\widehat{A\Delta B}$, $\widehat{A\Gamma E}$ και $\widehat{A\Delta Z}$ και να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλονται καθώς τα σημεία Γ, Δ κινούνται στην περιφέρεια του κύκλου.

β) Με τη βοήθεια του εργαλείου 'Απόσταση ή Μήκος', να μετρήσετε τα μήκη των ΑΖ, ΑΓ, ΑΕ, και ΑΔ και να υπολογίσετε τα γινόμενα: $AZ \cdot A\Gamma^2$ και $AE \cdot A\Delta^2$ καθώς τα σημεία Γ, Δ αλλάζουν θέση. Τι παρατηρείτε;

Εικόνα 4: Αρχική δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου "

Με την απενεργοποίηση του κουμπιού Α, εμφανίζεται κουμπί με την ετικέτα «Β», με το οποίο ο μαθητής μεταβαίνει στην δεύτερη δραστηριότητα. Στην δραστηριότητα αυτή, ζητείται από τον μαθητή, να αποδείξει την ζητούμενη μετρική σχέση, την οποία σε προηγούμενη δραστηριότητα έχει αναπτύξει. Επιπροσθέτως, στην δεύτερη δραστηριότητα η δοθείσα αναπαράσταση παρέχει ανατροφοδοτήσεις στον μαθητή. Πιο συγκεκριμένα, άνωθεν της γεωμετρικής κατασκευής, εμφανίζονται οι μετρήσεις των ευθύγραμμων τμημάτων, καθώς και των τετραγώνων αυτών, για την διευκόλυνση του μαθητή στην απόδειξη της ζητούμενης σχέσης. Επίσης, στις γωνίες των κορυφών Γ, Δ, Ε και Ζ, σημειώνεται η ορθή γωνία. Τέλος, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να ενεργοποιήσει το κουμπί «Βοήθεια» (γκρι πλαίσιο), με το οποίο παροτρύνεται να παρατηρήσει συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες, έτσι ώστε να ολοκληρώσει την δραστηριότητα.

Προβολές χορδών στη διάμετρο του κύκλου

Στην οθόνη δεξιά βλέπετε έναν κύκλο, μια διάμετρό του AB· E, Z δύο σημεία στην διάμετρό του και Γ, Δ δύο σημεία στην περιφέρεια του κύκλου. Να συγκρίνετε τα γινόμενα: $AZ \cdot AΓ^2$ και $AE \cdot AΔ^2$

Επίπεδα Διαπραγμάτευσης

A B

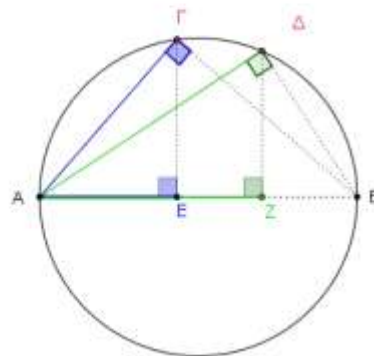
Να αποδείξετε ότι τα γινόμενα $AZ \cdot AΓ^2$ και $AE \cdot AΔ^2$ είναι ίσα.

Βοήθεια

Στα ορθογώνια τρίγωνα AΓE και AΔZ να εκφράσετε το λόγο $\frac{AΓ^2}{AΔ^2}$ συναρτήσει των προβολών των χορδών AΓ και AΔ στη διάμετρο του κύκλου.

$$AZ = 3.51 \quad AΓ^2 = 3.3^2$$

$$AE = 2.18 \quad AΔ^2 = 4.19^2$$



Εικόνα 5: Δεύτερη δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου "

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ : Μικροπείραμα για τη διερεύνηση της σχέσης που έχουν τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζουν οι προβολές δύο χορδών ενός κύκλου σε μια διάμετρό του.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ : <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5858>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ : <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5858>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ
Πυθαγόρειο θεώρημα
Κύκλος
Χορδές
Προβολή

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Οι δραστηριότητες του μικροπειράματος βασίζονται στην μέθοδο της καθοδηγούμενης μάθησης με στοιχεία ανακάλυψης. Οι εκπαιδευτικοί στόχοι εκπληρώνονται με την εφαρμογή του παρόντος μικροπειράματος, έτσι παρέχονται δυνατότητες για εμβάθυνση στις γεωμετρικές ιδιότητες, ώστε να προάγεται η διερευνητική μάθηση. Τέλος, να σημειωθεί ότι ο διδακτικός στόχος που αναφέρετε στο βιβλίο του καθηγητή, είναι οι μαθητές να έχουν την ικανότητα να αποδεικνύουν τις μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Η οριακή περίπτωση της συγκεκριμένης αναπαράστασης είναι η παραμονή των κορυφών των εγγεγραμμένων τριγώνων στα όρια του δοθέν κύκλου. Συγκεκριμένα, οι κορυφές των τριγώνων παραμένουν στα πλαίσια του κύκλου, και δεν ξεφεύγουν από τα όρια αυτού. Όπως προκύπτει, ο χειρισμός των οριακών περιπτώσεων που εμφανίζει η αναπαράσταση, είναι ο κατάλληλος. Επιπλέον, οι αριθμητικές τιμές που εμφανίζονται στην δεύτερη δραστηριότητα δεν εμποδίζουν την ολοκλήρωση των μαθηματικών στόχων, αντιθέτως διευκολύνουν την κατανόηση και την ανάπτυξη της απόδειξης, που ζητείται στην δραστηριότητα αυτή.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
Φιλτράρισμα	Εμφάνιση και απόκρυψη δραστηριοτήτων.	Κουμπιά
Διερεύνηση	Μετρήσεις πλευρών εγγεγραμμένων ορθογώνιων τριγώνων.	Εργαλεία μέτρησης
Αναδιοργάνωση	Αναδιοργάνωση κορυφών τριγώνων.	Σύρσιμο
Αναζήτηση	Αναζήτηση της ισχύς της δοθείσας σχέσης.	Σύρσιμο, Εργαλεία μέτρησης

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Οι εκφωνήσεις των δραστηριοτήτων, παραινούν τον μαθητή να χρησιμοποιήσει τις λειτουργίες του συρσίματος καθώς και να εμβαθύνει σε συγκεκριμένες πτυχές της αναπαράστασης. Επομένως, η διερεύνηση του γεωμετρικού αντικειμένου, προάγεται από τις δυνατότητες του ΛΔΧ.
- Οι διάφορες περιπτώσεις, τις οποίες ο μαθητής έχει την δυνατότητα να εμφανίσει με το σύρσιμο των σημείων της αναπαράστασης, παρουσιάζονται στο παρόν μικροπείραμα. Οι περιπτώσεις αυτές, βελτιώνουν την ακρίβεια της αναπαράστασης, ώστε ο μαθητής να έχει δυνατότητα για διερεύνηση.
- Εμφανίζεται περιορισμένης έκτασης πειραματισμός, γιατί όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, τα σημεία που δέχονται σύρσιμο περιορίζονται στα πλαίσια του κύκλου.
- Η ανατροφοδότηση που δίνεται στους μαθητές, είναι τα βοηθητικά κείμενα άνωθεν της αναπαράστασης. Με την ανατροφοδότηση αυτή, ο μαθητής γνωστοποιείται για τις μετρήσεις των πλευρών των δυο εγγεγραμμένων ορθογώνιων τριγώνων. Η εμφάνιση των τιμών αυτών, δίνουν την ευκαιρία στον μαθητή να εξετάσει τις δοθείσες σχέσεις.
- Στο παρόν μικροπείραμα οι δυνατότητες για εμφάνιση πολλαπλών αναπαραστάσεων του ίδιου γεωμετρικού προβλήματος δεν είναι εφικτή.
- Τα χωρικά και γραφικά χαρακτηριστικά της γεωμετρικής αναπαράστασης του μικροπειράματος, δεν προσπελάνονται με ευκολία, καθώς ο πειραματισμός είναι περιορισμένης έκτασης, και οι ζητούμενες σχέσεις επιβεβαιώνονται μόνο στην παρούσα γεωμετρική κατασκευή.
- Οι δραστηριότητες του μικροπειράματος μπορούν να διεξαχθούν και σε περιβάλλον X-M. Πιο συγκεκριμένα, ο μαθητής, στην δεύτερη δραστηριότητα, καλείται να αποδείξει την ζητούμενη μετρική σχέση. Για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας αυτής, ο μαθητής θα στραφεί σε περιβάλλον X-M, ενώ θα χρησιμοποιήσει τα απαραίτητα δεδομένα από το δυναμικό περιβάλλον. Επομένως, δεν απαιτείται, σε όλο το εύρος του μικροπειράματος, η εφαρμογή αυτού σε ΛΔΧ.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

- Οι δραστηριότητες του μικροπειράματος, ενθαρρύνουν τους μαθητές για την παρατήρηση των αμετάβλητων και μεταβλητών στοιχείων που περιέχονται στην γεωμετρική κατασκευή. Πιο συγκεκριμένα, στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τις αλλαγές στις μετρήσεις των δοθέντων στοιχείων. Με αυτό τον τρόπο, δίνεται βοήθεια για

την ανάπτυξη της απόδειξης της σχέσης που εμφανίζεται στην εκφώνηση της προαναφερθείσας δραστηριότητας.

- Οι μετρήσεις της αναπαράστασης, οι οποίες εμφανίζονται στην δεύτερη δραστηριότητα, δίνουν δυνατότητες για παραγωγή εικασιών, με το σύρσιμο των στοιχείων αυτής.
- Στο παρόν μικροπείραμα οι δυνατότητες για διερεύνηση διαφορετικών αναπαράστασεων, μέσω των λειτουργιών του συρσίματος, είναι περιορισμένες.
- Με το σύρσιμο και την παρατήρηση των διαφορετικών τιμών που εμφανίζονται μέσω της δεύτερης δραστηριότητας, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να επικυρώσει τις συνθήκες, με τις οποίες έχει δημιουργηθεί η αρχική γεωμετρική κατασκευή.
- Με την βοήθεια του συρσίματος, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις εξαρτήσεις μεταξύ των στοιχείων της αναπαράστασης, καθώς η παρέμβαση του, σε οποιοδήποτε στοιχείο αυτής, μεταβάλλει το σύνολο των γεωμετρικών αντικειμένων.
- Οι υποθέσεις, που δημιουργούνται στην εργασία του μαθητή με την πρώτη δραστηριότητα, συνδέονται με τα συμπεράσματα που πιθανόν αναπτύσσονται κατά την διεξαγωγή της δεύτερης δραστηριότητας. Αυτή η σύνδεση βασίζεται στην λειτουργία του συρσίματος των σημείων της αναπαράστασης (κορυφές τριγώνων). Κατά συνέπεια, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις αλλαγές, στις μετρήσεις των επιλεγμένων ευθυγράμμων τμημάτων.
- Το σύρσιμο δεν χρησιμοποιείται για την διερεύνηση των τροχιών των γεωμετρικών αντικειμένων.
- Η δυνατότητα του συρσίματος εμφανίζεται σε συγκεκριμένα σημεία της αναπαράστασης. Για παράδειγμα, η εκφώνηση της πρώτης δραστηριότητας υποκινεί τον μαθητή για χρήση και μετακίνηση των σημείων της αναπαράστασης.

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Η κατασκευή που παρουσιάζεται στο μικροπείραμα είναι «ανθεκτική». Στο συμπέρασμα αυτό καταλήγουμε, καθώς τα στοιχεία της αναπαράστασης (κορυφές τριγώνων) παραμένουν στα πλαίσια του δοθέντος κύκλου.

Λειτουργίες του συρσίματος

Η λειτουργία του συρσίματος των στοιχείων της αναπαράστασης, διευκολύνει τους μαθητές για την ανάπτυξη εικασιών, καθώς έχουν την δυνατότητα να παρατηρήσουν τις μετρήσεις για τις γεωμετρικές κατασκευές.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Η ενσωμάτωση του ΛΔΓ του παρόντος μικροπείραματος, αναγνωρίζεται ως δεύτερο επίπεδο (Laborde, 2002), καθώς παρέχονται δυνατότητες αξιοποίησης των λειτουργιών του ΛΔΓ, αλλά δεν απαιτείται η χρήση του για την διεξαγωγή του συνόλου των δραστηριοτήτων σε δυναμικό περιβάλλον.

Τελική ανάλυση

Το παρόν μικροπείραμα παρέχει ανατροφοδοτήσεις, για την ενίσχυση του πειραματισμού, ώστε ο μαθητής να μπορεί να αναπτύξει εικασίες για τις ζητούμενες μετρικές σχέσεις. Η εμφάνιση βοηθητικών κειμένων με την επιλογή των διαθέσιμων κουμπιών, καθώς και η εφαρμογή των λειτουργιών του συρσίματος, εστιάζουν την προσοχή του μαθητή στην εμφάνιση αριθμητικών τιμών, στην δεύτερη

δραστηριότητα. Ως συνέπεια των ανωτέρω, ο μαθητής έχει την ευκαιρία να επαληθεύσει τις εικασίες του, ώστε να αναπτύξει την ζητούμενη γεωμετρική απόδειξη.

Τέλος, επισημαίνεται ότι, η λειτουργία του συρσίματος των στοιχείων της αναπαράστασης και η αξιοποίηση των εργαλείων του ΛΔΧ, διευκολύνει τους μαθητές για την διεξαγωγή των μαθηματικών δραστηριοτήτων. Εντούτοις, με κατάλληλο μετασχηματισμό, οι δραστηριότητες του μικροπειράματος μπορούν να διεξαχθούν σε περιβάλλον Χ-Μ. Επομένως, το μικροπείραμα δεν απαιτεί την χρήση ενός ΛΔΓ, στο μεγαλύτερο εύρος αυτού.

5.2.2 Μικροπείραμα: Πολυγωνική σπείρα

Κατηγορία : «Απόδειξη και εικασία»

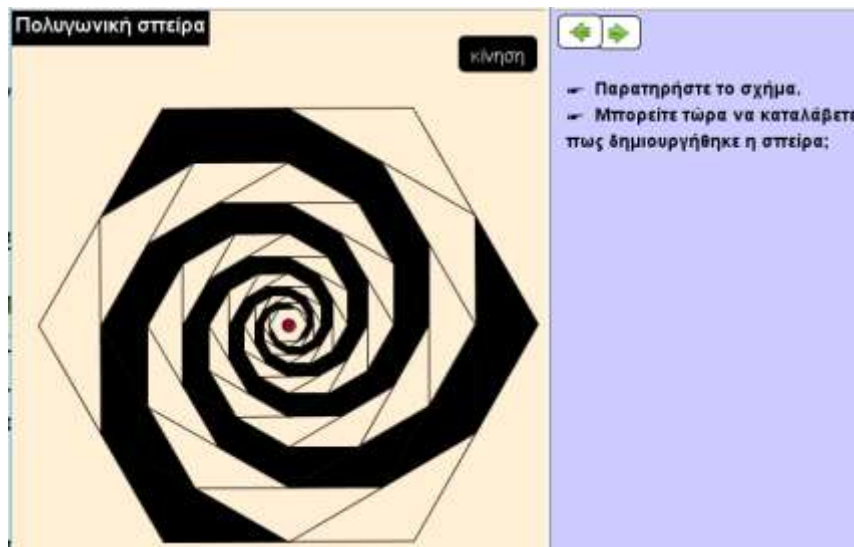
Περιγραφή

Η παρουσίαση του μικροπειράματος γίνεται με την χρήση δυο παραθύρων («Γραφικά», «Γραφικά 2»). Ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει την υπάρχουσα πολυγωνική σπείρα, καθώς και την εκφώνηση της αρχικής δραστηριότητας, η οποία καθοδηγεί τον ίδιο για την αρχική εξερεύνηση του γεωμετρικού αυτού αντικειμένου. Επιπλέον, ο μαθητής παροτρύνεται να ενεργοποιήσει το κουμπί «βελάκι», για την συνέχεια της εξέλιξης του μικροπειράματος. Στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζεται η αρχική εμφάνιση του παρόντος μικροπειράματος. Να σημειωθεί, ότι σε όλο το πλήθος των δραστηριοτήτων του μικροπειράματος (οι οποίες εναλλάσσονται με την ενεργοποίηση του κουμπιού «βελάκι»), εμφανίζονται ορισμένα κουμπιά στο παράθυρο «Γραφικά». Το κουμπί «κίνηση» περιστρέφει αριστερόστροφα το γεωμετρικό σχήμα που παρουσιάζεται, ενώ το κουμπί «ασπρόμαυρο φόντο», μεταβάλλει τον χρωματισμό του φόντου. Επίσης, το κουμπί «ΑΡΧΗ» μεταφέρει τον μαθητή στην αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος (εικόνα 6).



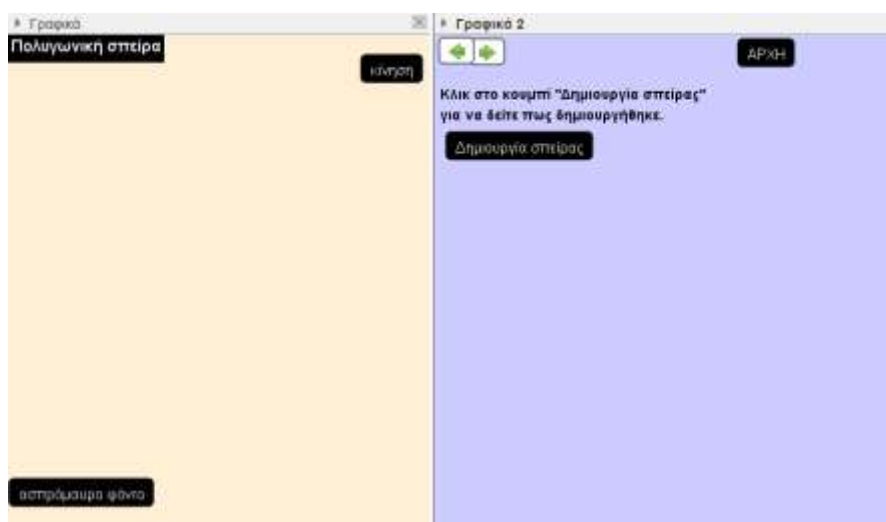
Εικόνα 6: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος «Πολυγωνική σπείρα»

Με την ενεργοποίηση του κουμπιού «βελάκι», ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με τις μεταβολές στα δυο παράθυρα. Στο παράθυρο με την αναπαράσταση του αρχικού γεωμετρικού αντικειμένου της πολυγωνικής σπείρας, εμφανίζεται μια αλληλουχία από πολύγωνα, τα οποία δημιουργούν τις πλευρές της σπείρας. Με την εκφώνηση της δραστηριότητας, ο μαθητής παροτρύνεται για την διερεύνηση του σχήματος και την ανάπτυξη εικασιών, ώστε να αναδείξει τον τρόπο, με τον οποίο δημιουργήθηκε η πολυγωνική σπείρα.

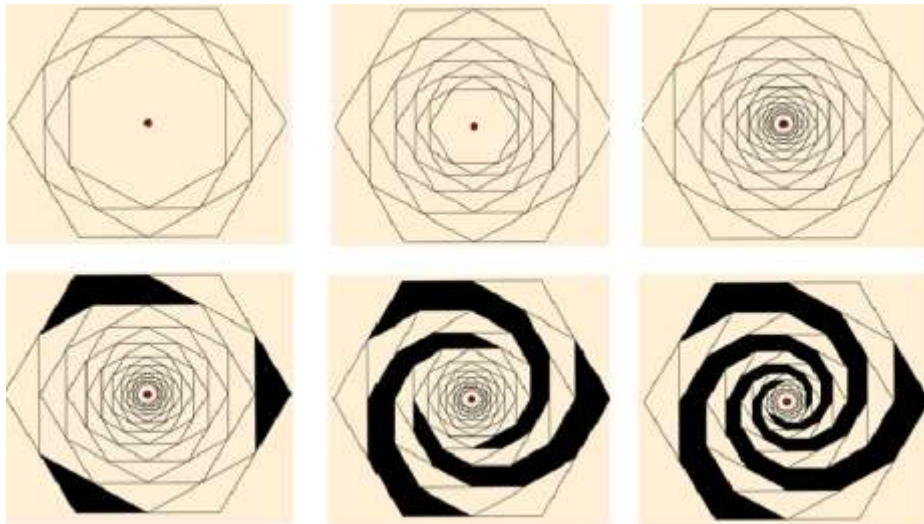


Εικόνα 7: Βήμα 2 του ψηφιακού υλικού «Πολυγωνική σπείρα»

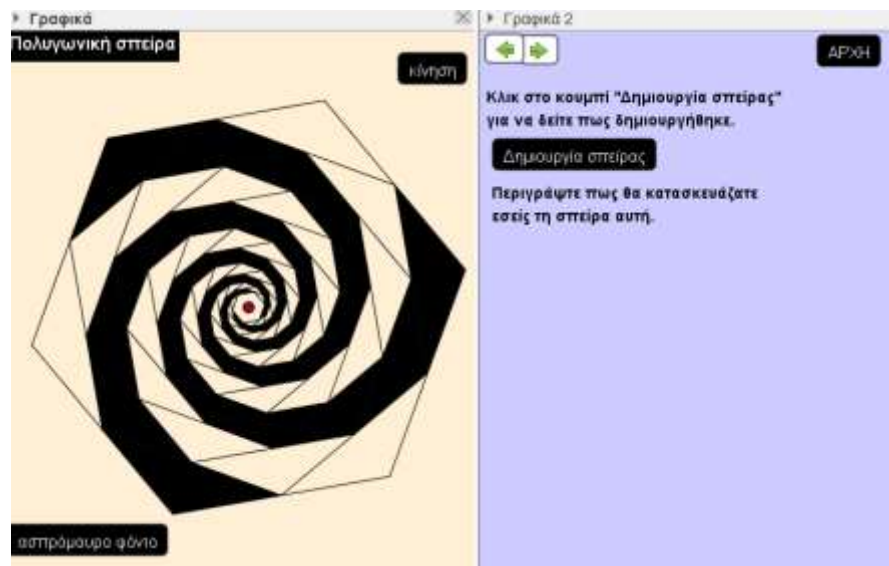
Στο επόμενο περιβάλλον, η πολυγωνική σπείρα των δυο προηγούμενων δραστηριοτήτων του μικροπειράματος εξαφανίζεται (εικόνα 8), ενώ στην εκφώνηση εμφανίζεται κείμενο το οποίο ωθεί τον μαθητή να ενεργοποιήσει το κουμπί «Δημιουργία σπείρας». Με το προαναφερθέν εργαλείο, ο μαθητής θέτει σε κίνηση την δημιουργία του γεωμετρικού αντικειμένου, η οποία εμφανίζεται στα αριστερά της οθόνης (εικόνα 10). Παρακάτω, επισυνάπτεται η εικόνα 9, στην οποία παρουσιάζεται, με στατικές εικόνες, το κινούμενο σχέδιο δημιουργίας της πολυγωνικής σπείρας. Επιπλέον με το κουμπί «Δημιουργία σπείρας», ο μαθητής έχει την δυνατότητα να σταματήσει την κίνηση, ώστε να εστιάσει στα βήματα δημιουργίας του παρόντος γεωμετρικού αντικειμένου. Τέλος, με την ολοκλήρωση της δημιουργίας του γεωμετρικού αντικειμένου, εμφανίζεται ένα νέο κείμενο στο παράθυρο «Γράφημα 2», το οποίο ζητάει από τον μαθητή να αναλύσει τον τρόπο δημιουργίας της πολυγωνικής σπείρας. Ο στόχος του σχεδιαστή, στο σημείο αυτό, είναι να δώσει ακόμα μια ευκαιρία στον μαθητή να παρατηρήσει τα γεωμετρικά σχήματα, έτσι ώστε να στραφεί η προσοχή του στην σχέση που εμφανίζεται μεταξύ αυτών. Για την επιβεβαίωση της εικασίας αυτής, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να προχωρήσει στο μικροπείραμα, με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Βελάνι».



Εικόνα 8: Βήμα 3 του ψηφιακού υλικού «Πολυγωνική σπείρα»



Εικόνα 9: Στατική απεικόνιση των βημάτων δημιουργίας της πολυγωνικής σπείρας στο μικροπείραμα "Πολυγωνική σπείρα".



Εικόνα 10: Τελική εμφάνιση του βήματος 3 στο μικροπείραμα "Πολυγωνική σπείρα".

Στην τέταρτη δραστηριότητα, παρουσιάζεται μια νέα απεικόνιση της αλληλουχίας των πολυγώνων που δημιουργούν την πολυγωνική σπείρα, ενώ παράλληλα στο παράθυρο «Γράφημα 2», εμφανίζεται νέα εκφώνηση. Ειδικότερα, εμφανίζεται δρομέας (R), που μεταβάλλει την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, ο οποίος περιβάλλει το πρώτο πολύγωνο (εικόνα 11). Η λειτουργία του συρσίματος στο παρόν βήμα του μικροπειράματος, έχει στόχο την διευκόλυνση του μαθητή για την ανάπτυξη της εικασίας καθώς και της επιβεβαίωσης αυτής. Επιπλέον, εμφανίζεται κουμπί «Λίγη βοήθεια;» κάτωθεν της εκφώνησης, το οποίο διευκολύνει τον μαθητή να συσχετίσει τις εικασίες του με αλγεβρικές και γεωμετρικές έννοιες, με αυτό τον τρόπο ο μαθητής μπορεί να μεταβεί στην επιβεβαίωση της αρχικής εικασίας (εικόνα 12).

Πολυγωνική σπείρα
R = 3.9

κίνηση

ασπράγματρο φάσμα

ΑΡΧΗ

- Να εκφράσετε την πλευρά του 2ου και 3ου (από έξω προς τα μέσα) κανονικού εξαγώνου ως συνάρτηση της ακτίνας R.
- Ποια είναι η πλευρά του 19ου κανονικού εξαγώνου;
- Αν στο σχήμα υπήρχαν 50 κανονικά εξάγωνα, ποια η πλευρά του 50-οστού κανονικού εξαγώνου;
- Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικό συμπέρασμα;

Λίγη βοήθεια:

Εικόνα 11: Βήμα 4 από το μικροπείραμα "Πολυγωνική Σπείρα"

Πολυγωνική σπείρα
R = 3.9

κίνηση

ασπράγματρο φάσμα

ΑΡΧΗ

- Να εκφράσετε την πλευρά του 2ου και 3ου (από έξω προς τα μέσα) κανονικού εξαγώνου ως συνάρτηση της ακτίνας R.
- Ποια είναι η πλευρά του 19ου κανονικού εξαγώνου;
- Αν στο σχήμα υπήρχαν 50 κανονικά εξάγωνα, ποια η πλευρά του 50-οστού κανονικού εξαγώνου;
- Μπορείτε να διατυπώσετε ένα γενικό συμπέρασμα;

Λίγη βοήθεια:

Έστω $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ οι πλευρές των εξαγώνων που δημιουργούνται από έξω προς τα μέσα.

- Η πλευρά του 2ου κανονικού εξαγώνου είναι το τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο διαδοχικών πλευρών του κανονικού εξαγώνου και επομένως ίση με το μισό της τρίτης πλευράς του τριγώνου που δημιουργούν αυτές οι δύο πλευρές που είναι πλευρά ισοπλευρού τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R.

Άρα: $\beta_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

- Εκφράξτε ότι η πλευρά κανονικού εξαγώνου ισούται με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Είναι: $\beta_3 = R \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
- Εκφράξτε παρόμοια για να απαντήσετε στα υπόλοιπα ερωτήματα.


Εικόνα 12: Εκφώνηση και βοήθεια βήματος 4 του μικροπείραματος «Πολυγωνική Σπείρα»

Στο τελικό βήμα ο μαθητής καλείται να παρατηρήσει το γεωμετρικό σχήμα, για το οποίο αρχικά γνωστοποιείται ότι εμφανίζονται σε αυτό, 19 κανονικά εξάγωνα (εικόνα 13). Στην συνέχεια, ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδόν της σπείρας σε σχέση με την ακτίνα. Να σημειωθεί ότι ο μαθητής έχει την δυνατότητα να μεταβάλλει την ακτίνα, μέσω των λειτουργιών του δρομέα «R», ο οποίος εμφανίζεται στα αριστερά της οθόνης. Η εμφάνιση του κουμπιού «Λίγη βοήθεια;» παρουσιάζει διαφορετική αναπαράσταση, στην οποία συμπεριλαμβάνονται τα δυο αρχικά εξάγωνα καθώς και τα τρία τρίγωνα, με τα οποία δημιουργείται το πρώτο βήμα της πολυγωνικής σπείρας (εικόνα 14). Επομένως, ο μαθητής εστιάζει στο εμβαδόν των προαναφερθέντων τριγώνων, με στόχο την διευκόλυνση του υπολογισμού του εμβαδόν της πολυγωνικής σπείρας, μέσω της μέτρησης των εμβαδών των επιμέρους τριγώνων. Τέλος, με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Απάντηση», όπως φαίνεται και στην εικόνα 15, επιβεβαιώνεται η εικασία του μαθητή, καθώς παρέχεται στον ίδιο, μια πλήρης απόδειξη του αρχικού γεωμετρικού προβλήματος.

Πολυγωνική σπείρα

R = 3.9

είληψη



ΑΡΧΗ

- Την σπείρα τη δημιουργούν 19 κανονικά εξάγωνα.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σπείρας ως συνάρτηση της ακτίνας R.

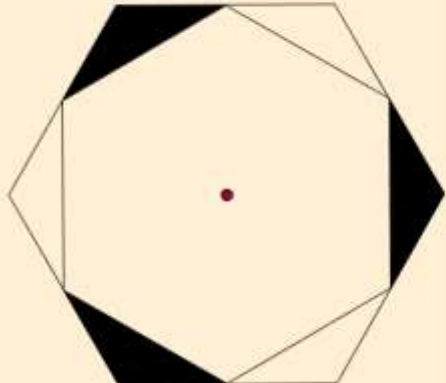
Λίγη βοήθεια

Εικόνα 13: Τελικό βήμα του ψηφιακού υλικού "Πολυγωνική Σπείρα"

Πολυγωνική σπείρα

R = 3.9

είληψη



ΑΡΧΗ

- Την σπείρα τη δημιουργούν 19 κανονικά εξάγωνα.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σπείρας ως συνάρτηση της ακτίνας R.

Λίγη βοήθεια

- Το εμβαδόν των τριών "μαύρων" τριγώνων ισούται με: $\frac{E_1 - E_2}{2}$, όπου E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των δύο κανονικών εξάγωνων.
- Σκεφτείτε παρόμοια για να υπολογίσετε το εμβαδόν των άλλων κομματιών της σπείρας.
- Αποδείξτε ότι η ακολουθία των εμβαδών των κανονικών εξάγωνων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.


Απάντηση

Εικόνα 14: Εκφώνηση και βοήθεια βήματος 5 του μικροπειράματος «Πολυγωνική Σπείρα»

Πολυγωνική σπείρα

R = 3.9

είληψη



ασπρόμοιρο φάσμα

ΑΡΧΗ

- Την σπείρα τη δημιουργούν 19 κανονικά εξάγωνα.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σπείρας ως συνάρτηση της ακτίνας R.

Λίγη βοήθεια

- Το εμβαδόν των τριών "μαύρων" τριγώνων ισούται με: $\frac{E_1 - E_2}{2}$, όπου E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των δύο κανονικών εξάγωνων.
- Σκεφτείτε παρόμοια για να υπολογίσετε το εμβαδόν των άλλων κομματιών της σπείρας.
- Αποδείξτε ότι η ακολουθία των εμβαδών των κανονικών εξάγωνων αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

Απάντηση

$$E_{\text{σπείρας}} = \frac{E_1 - E_2}{2} + \frac{E_2 - E_3}{2} + \dots + \frac{E_{18} - E_{19}}{2} =$$

$$= \frac{E_1 - E_{19}}{2} = \dots = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{18} \right]$$

Εικόνα 15: Απάντηση βήματος 5 του μικροπειράματος «Πολυγωνική Σπείρα»

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την εμπλοκή των μαθητών με τη διερεύνηση του σχήματος της πολυγωνικής σπείρας. Το μικροπείραμα προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να ανακαλύψουν σταδιακά, με κατάλληλη βοήθεια που τους δίνεται, το είδος του κανονικού πολυγώνου που δημιούργησε τη σπείρα και να ανακαλέσουν αλγεβρικές γνώσεις για να υπολογίσουν το εμβαδόν της, αλληλοσυνδέοντας τη Γεωμετρία με την Άλγεβρα.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5792>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5792>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Σπείρα

Εμβαδόν

Κανονικό εξάγωνο

Γεωμετρική πρόοδος

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Οι διδακτικοί στόχοι που αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή, εστιάζουν στην αναγνώριση του πολυγώνου ως κανονικό, μέσω των κατάλληλων στοιχείων αλλά και ιδιοτήτων του. Επίσης, ζητείται η ικανότητα του μαθητή να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου ή των κανονικών πολυγώνων που εγγράφονται σε κύκλο από την ακτίνα του κύκλου. Στο παρόν μικροπείραμα εμφανίζονται οι προαναφερθέντες διδακτικοί στόχοι, ενώ γίνεται διερεύνηση αυτών με τις παρούσες δραστηριότητες του μικροπειράματος.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων του παρόντος μικροπειράματος συμβαίνει με την εμφάνιση των βημάτων κατασκευής της πολυγωνικής σπείρας, στη τρίτη δραστηριότητα. Στη δραστηριότητα αυτή, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει την κατασκευή της πολυγωνικής σπείρας, στο εσωτερικό του κύκλου. Με την προαναφερθείσα αλληλουχία, γίνεται αντιληπτός ο τρόπος δημιουργίας του μαθηματικού αντικειμένου. Ωστόσο, το τελικό πολύγωνο της πολυγωνικής σπείρας είναι το 19° πολύγωνο, ενώ σε επόμενη δραστηριότητα ζητείται από τον μαθητή να διατυπώσει γενικό συμπέρασμα για το 50° πολύγωνο, το οποίο δεν εμφανίζεται στην αναπαράσταση, ούτε μπορεί με ευκολία να κατασκευαστεί.

Επιπλέον, ο έλεγχος των αριθμητικών τιμών, συμβαίνει με τις τιμές που εμφανίζονται από την εφαρμογή του δρομέα «R», ο οποίος μεταβάλλει την ακτίνα του κύκλου και λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,10]$. Να σημειωθεί, ότι ο δρομέας παρουσιάζεται στην τέταρτη και πέμπτη δραστηριότητα (εικόνες 11 και 13). Παρόλα αυτά, οι ερωτήσεις που τίθενται στον μαθητή δεν απαιτούν την χρήση του δρομέα, και ως συνέπεια τον χειρισμό των δοθέντων αριθμητικών τιμών, για την ανάπτυξη εικασιών και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η ειδική λειτουργία, που εμφανίζεται στο παρόν μικροπείραμα, είναι αυτή της τρίτης δραστηριότητας, που παρουσιάζει μια αλληλουχία από επιμέρους κατασκευές της αναπαράστασης, οι οποίες δημιουργούν την τελική πολυγωνική σπείρα. Η σειρά αυτή από γεωμετρικές κατασκευές εμφανίζεται με το πάτημα του κουμπιού «Δημιουργία σπείρας» (εικόνα 9). Στην συνέχεια, ο μαθητής

παρακινείται να εκφράσει την εικασία του για τον τρόπο κατασκευής της σπείρας (εικόνα 10). Να σημειωθεί, ότι η αναπαραγωγή των κινήσεων εμποδίζεται με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Δημιουργία σπείρας», ενώ ο μαθητής μπορεί να συνεχίσει την συγκεκριμένη αναπαραγωγή με την επανάληψη της προαναφερθείσας κίνησης.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
<i>Παραγωγή κίνησης</i>	Δημιουργία πολυγωνικής σπείρας (εικόνα 9)	Κουμπιά
<i>Σχολιασμός</i>	Εμφάνιση αναπαραστάσεων και βοηθητικών κειμένων, έτσι ώστε να διευκολυνθεί η διαδικασία της διερεύνησης του μαθηματικού αντικειμένου.	Κουμπιά
<i>Φιλτράρισμα</i>	Εμφάνιση και απόκρυψη αναπαραστάσεων καθώς και βοηθητικών κειμένων.	Κουμπιά
<i>Διερεύνηση</i>	Ζητείται από τον μαθητή η εμβάθυνση σε σχήματα και ιδιότητες των αντίστοιχων αναπαραστάσεων.	Κουμπιά
<i>Αναζήτηση</i>	Η αναζήτηση γίνεται σε μέρη των αναπαραστάσεων στα οποία ο μαθητής καλείται να παρατηρήσει ιδιότητες και στοιχεία αυτών, για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.	Κουμπιά

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Οι δοθείσες αναπαραστάσεις, σε όλο το εύρος του μικροπειράματος, καθώς και οι ανατροφοδοτήσεις του, παρέχουν δυνατότητες για ενίσχυση της διερεύνησης του μαθητή.
- Η εφαρμογή του δρομέα «R», μεταβάλλει την ακτίνα του δοθέντος κύκλου, με τέτοιο τρόπο, ώστε να εμφανίζεται η εξάρτηση της ακτίνας, με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες της αναπαράστασης.
- Εμφανίζεται μικρή δυνατότητα για πειραματισμό, διότι οι δραστηριότητες καθοδηγούν, σε μεγάλο βαθμό τον μαθητή για την ολοκλήρωση αυτών. Επομένως, η διερευνητική μάθηση μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω, στο παρόν μικροπείραμα.
- Οι ανατροφοδοτήσεις του μικροπειράματος εμφανίζονται σε όλο το εύρος αυτού και διευκολύνουν τον μαθητή για την εστίαση των γεωμετρικών ιδιοτήτων της αναπαράστασης, καθώς και στην αναγνώριση της ορθότητας της κατασκευής. Πιο συγκεκριμένα, οι ανατροφοδοτήσεις της τέταρτης και πέμπτης δραστηριότητας, παρουσιάζει βοηθητικά κείμενα και αναπαραστάσεις, μέσω της εφαρμογής των ειδικών εργαλείων του λογισμικού. Επιπλέον, η ειδική λειτουργία, που αναφέρεται σε προηγούμενη παράγραφο, αποτελεί μια ανατροφοδότηση, η οποία παρακινεί τον μαθητή να αναπτύξει εικασίες για τον τρόπο δημιουργίας της πολυγωνικής σπείρας.
- Στο παρόν μικροπείραμα, εμφανίζονται πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας γεωμετρικής κατασκευής. Ειδικότερα, η πολυγωνική σπείρα παρουσιάζεται από διαφορετικές οπτικές, σε όλο το εύρος του μικροπειράματος.
- Γίνεται η προσπέλαση των χωρικών και γραφικών χαρακτηριστικών της αναπαράστασης. Πιο συγκεκριμένα, οι ανατροφοδοτήσεις του μικροπειράματος, παρέχουν βοήθεια για την εστίαση του μαθητή, στα επιμέρους γεωμετρικά σχήματα που συνθέτουν την πολυγωνική

σπείρα, καθώς και στις γεωμετρικές ιδιότητες αυτής. Η προαναφερθείσα διαδικασία, διευκολύνει τον μαθητή να εστιάσει σε ορισμένες πτυχές της αναπαράστασης, με τις οποίες αναδεικνύονται οι ζητούμενες γεωμετρικές ιδιότητες, για την επίλυση του δοθέντος μαθηματικού προβλήματος.

- Η χρήση του ΛΔΓ σε αυτές τις δραστηριότητες, διευκολύνει τον μαθητή στην οπτικοποίηση των γεωμετρικών κατασκευών. Επιπροσθέτως, η παρουσίαση των βημάτων κατασκευής της πολυγωνικής σπείρας στην τρίτη δραστηριότητα (εικόνα 9), καθιστά απαραίτητη την χρήση του ΛΔΓ.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

Στο παρόν μικροπείραμα δεν θα γίνει ανάλυση των στοιχείων του ρόλου και της χρήσης του συρσίματος. Η λειτουργία του συρσίματος εμφανίζεται μόνο με την αξιοποίηση του δρομέα «R», με τον οποίο ο μαθητής έχει την δυνατότητα να μεταβάλλει την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Επομένως οι λειτουργίες του συρσίματος είναι περιορισμένες και δεν απαιτείται η εκτενής ανάλυση αυτών.

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Οι γεωμετρικές κατασκευές που παρουσιάζονται στο μικροπείραμα είναι «ανθεκτικές». Ο μαθητής δεν έχει την δυνατότητα, να μεταβάλλει τις λειτουργίες των διαφορετικών αναπαράστασεων της πολυγωνικής σπείρας. Συγχρόνως, δεν ζητάτε από τον μαθητή η χρήση εργαλείων του λογισμικού, ώστε να επέμβει στην δομή της αναπαράστασης ή στην μέτρηση στοιχείων αυτής.

Λειτουργίες του συρσίματος

Σύμφωνα με στοιχεία της ανάλυσης, οι δυνατότητες για χρήση συρσίματος στα στοιχεία της αναπαράστασης, είναι περιορισμένες. Κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατόν να γίνει σαφής αναγνώριση των λειτουργιών του συρσίματος.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Η ειδική λειτουργία της τρίτης δραστηριότητας, καθιστά απαραίτητη την διεξαγωγή του σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, καθώς παρουσιάζει ένα κινούμενο σχέδιο της κατασκευής της πολυγωνικής σπείρας, για την οποία έχει γίνει περιγραφή σε προηγούμενη παράγραφο. Παρόλα αυτά, το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ, κατατάσσεται στο τρίτο επίπεδο, διότι δεν απαιτείται η χρήση του δυνατοτήτων του λογισμικού για την διεξαγωγή του συνόλου των δραστηριοτήτων του.

Τελική ανάλυση

Αναγνωρίζεται ότι οι εκπαιδευτικοί στόχοι που εμφανίζονται στο παρόν μικροπείραμα, είναι οι απαιτούμενοι για την εξέλιξη της γεωμετρικής γνώσης των μαθητών, ενώ με την εφαρμογή του, γίνεται επέκταση αυτών. Επιπλέον, με την συμπερίληψη της ειδικής λειτουργίας, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές, να αντιμετωπίσουν, με διαφορετικό τρόπο, την επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος, που μελετάται.

Επιπροσθέτως, οι λειτουργίες του συρσίματος είναι περιορισμένες στο παρόν μικροπείραμα. Συγκεκριμένα η λειτουργία του συρσίματος, όπως αναφέρεται και στην ομώνυμη παράγραφο, περιορίζονται στις δυνατότητες που προσφέρει ο δρομέας «R», ο οποίος μεταβάλλει την τιμή της ακτίνας.

Η ειδική λειτουργία του παρόντος μικροπειράματος, αναλύεται στην εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου. Η λειτουργία αυτή, συμπεριλαμβάνεται στη τρίτη δραστηριότητα (εικόνα 9), του μικροπειράματος και μέσω αυτής γίνεται η αναγνώριση του τρίτου επιπέδου ενσωμάτωσης της ΛΔΓ (Laborde, 2002). Επιπλέον, λειτουργεί και ως ανατροφοδότηση, με την οποία ο μαθητής διευκολύνεται για την εύρεση και εμβάθυνση σε συγκεκριμένες πτυχές του γεωμετρικού αντικειμένου. Παράλληλα, η ειδική αυτή λειτουργία, κατηγοριοποιείται στην αλληλεπίδραση «Παραγωγή κίνησης», από το θεωρητικό πλαίσιο (Sedig & Sumner,2006). Τέλος, αξίζει να τονιστεί η σημασία της αλληλεπίδρασης αυτής, καθώς οι λειτουργίες που παρέχει, παρουσιάζουν τα βήματα δημιουργίας της πολυγωνικής σπείρας, έτσι ώστε ο μαθητής, να αντιμετωπίσει την κατασκευή ενός πολύπλοκου γεωμετρικού σχήματος.

5.2.3 Μικροπείραμα: Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη

Κατηγορία : «Απόδειξη και εικασία»

Περιγραφή

Η αρχική επαφή του μαθητή με το μικροπείραμα, γίνεται με την εκφώνηση της αρχικής δραστηριότητας, καθώς και με την δοθείσα αναπαράσταση, οι οποίες εμφανίζονται στην εικόνα 16. Ο μαθητής εισάγεται στα δεδομένα του γεωμετρικού προβλήματος και εφόσον έχει κατανοήσει τις βασικές λειτουργίες της αναπαράστασης, ενεργοποιεί το κουμπί με ετικέτα «Δραστηριότητα 1».



Εικόνα 16: Αρχική παρουσίαση του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"

Στην συνέχεια ο μαθητής μπορεί να αντιμετωπίσει την ίδια αναπαράσταση, καθώς και την εκφώνηση της δραστηριότητας 1. Η χρήση του συρσίματος στα σημεία Α και Γ του τριγώνου, μεταβάλλει την αναπαράσταση, καθώς και τα βοηθητικά κείμενα, τα οποία γνωστοποιούν στον μαθητή τους υπολογισμούς των εμβαδών, που απαιτούνται για την επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος. Εν τέλει, η εκφώνηση της δραστηριότητας ζητάει από τον μαθητή να αναπτύξει την απόδειξη της γεωμετρικής σχέσης, σε περιβάλλον Χ-Μ. Για την διευκόλυνση του μαθητή στην επαλήθευση της απόδειξής του, παρέχεται βοηθητικό κείμενο το οποίο εμφανίζεται με το σύρσιμο του πλαισίου κειμένου με τίτλο «ΣΥΡΕ ΜΕ» (εικόνα 18).

Μηγίσκοι του Ιπποκράτη **ΑΡΧΗ**

Απόκρυφη εκφώνησης:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$). Με διαμέτρους $BΓ$, AB και $AΓ$ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο $(BΓ, A)$. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$. (Μηνίσκος είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της).

Δραστηριότητα 1

Έστω μ_1, μ_2 τα εμβαδά των σχηματιζόμενων μηνίσκων και τ_1, τ_2 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές AB και $AΓ$. Σύρετε τα σημεία A ή Γ και παρατηρήστε σε κάθε θέση τους τις τιμές των εμβαδών των δύο μπλε μηνίσκων μ_1 και μ_2 καθώς και του τριγώνου $ABΓ$ που δίνει το λογισμικό.

- Ποια η σχέση τους;
- Να αποδείξετε στο τετράδιό σας τη σχέση αυτή.

Βοήθεια

Εικόνα 17: Βοήθεια στην δραστηριότητα 1 του μικροπειράματος «Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη»

ΣΥΡΕ ΜΕ

$$\mu_1 = (\mu_1 + \tau_1) - \tau_1 = E_{\eta\mu. AB} - \tau_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 - \tau_1 = \frac{1}{8} \pi \cdot AB^2 - \tau_1$$

$$\mu_2 = (\mu_2 + \tau_2) - \tau_2 = E_{\eta\mu. A\Gamma} - \tau_2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{A\Gamma}{2} \right)^2 - \tau_2 = \frac{1}{8} \pi \cdot A\Gamma^2 - \tau_2$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{8} \pi (AB^2 + A\Gamma^2) - (\tau_1 + \tau_2) \dots$$

Χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και αποδείξτε ότι $\mu_1 + \mu_2 = E_{AB\Gamma}$

Εικόνα 18: Βοηθητικό κείμενο δραστηριότητας 1 του μικροπειράματος «Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη»

Ακολούθως, με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Δραστηριότητα 2» εμφανίζεται νέα αναπαράσταση της αρχικής. Η μοναδική λειτουργία του συρσίματος, εφαρμόζεται στο σημείο Γ , το οποίο μεταβάλλει τις ίσες πλευρές για την επιβέβαιωση της ζητούμενης σχέσης. Στην συνέχεια, ζητείται από τον μαθητή η κατασκευή του τετραγωνισμού των μηνίσκων, για την οποία ενδέχεται να χρησιμοποιήσει τα εργαλεία του $\Delta\Delta\Gamma$. Επιπρόσθετα, με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Βοήθεια», εμφανίζεται τετράγωνο με πλευρά μισή της υποτεινούςας, καθώς και βοηθητικό κείμενο, το οποίο πληροφορεί τον μαθητή για τον τρόπο κατασκευής του ζητούμενου τετραγώνου.

Μηγίσκοι του Ιπποκράτη **ΑΡΧΗ**

Απόκρυφη εκφώνησης:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$). Με διαμέτρους $BΓ$, AB και $AΓ$ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο $(BΓ, A)$. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$. (Μηνίσκος είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της).

Δραστηριότητα 2

- Πότε οι δύο μηνίσκοι μ_1 και μ_2 έχουν ίσα εμβαδά;
- Μπορείτε να τετραγωνίσετε το άθροισμα $\mu_1 + \mu_2$ στην περίπτωση αυτή; (Δηλαδή να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο που να έχει ίσο εμβαδό με το άθροισμα των δύο μηνίσκων)

Βοήθεια

- Παρατηρήστε ότι το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές.
- $(B\Delta Z E) = B\Delta^2 = B\Delta \cdot A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \cdot A\Delta = \dots$

Εικόνα 19: Δραστηριότητα 2 του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"

Στην τελευταία δραστηριότητα, ο μαθητής μπορεί να ενεργοποιήσει το κουμπί «Τετραγωνισμός», με το οποίο εμφανίζεται η αρχική αναπαράσταση, στην οποία έχει προστεθεί το τετράγωνο της προηγούμενης δραστηριότητας. Στην συνέχεια ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με την κατασκευή του τετραγωνισμού των μηνίσκων. Για την κατασκευή αυτή, η εκφώνηση προωθεί τον μαθητή να χρησιμοποιήσει τις λειτουργίες του συρσίματος και να εστιάσει σε ορισμένα στοιχεία της αναπαράστασης. Τέλος, παρέχεται στον μαθητή η ευκαιρία να παρατηρήσει, την ζητούμενη κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, η οποία εμφανίζεται με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Βοήθεια». Επιπλέον, μέσω του προαναφερθέντος κουμπιού, παρέχεται και βοηθητικό κείμενο το οποίο πληροφορεί τον μαθητή τις ιδιότητες της αναπαράστασης.

Μηνίσκοι του Ιπποκράτη ΑΡΧΗ

Απόκρυψη εκφώνησης

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$). Με διαμέτρους $BΓ$, AB και $AΓ$ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο $(BΓ, A)$.
 Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$.
 (Μηνίσκος είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της).

Τετραγωνισμός

→ Επειδή $\mu_1 + \mu_2 = (ABΓ)$ και κάθε τρίγωνο τετραγωνίζεται, προκύπτει ότι το άθροισμα $\mu_1 + \mu_2$ τετραγωνίζεται. Οι μηνίσκοι αυτοί αποτελούν το πρώτο μη ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο τετραγωνίσθηκε από τον Ιπποκράτη τον Χίο (γεννήθηκε περί το 470 π.Χ.).

→ Σύρτε τα σημεία A ή $Γ$ και παρατηρήστε ότι το τετράγωνο $BEZH$ είναι ο τετραγωνισμός των δύο μηνίσκων.

Πως θα το κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη;

Βοήθεια

$H BE$ είναι η πλευρά του τετραγώνου και είναι το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου $\theta EΓ$, όπου $B\theta = AK/2$.

$\mu_1 = 3.42$
 $\mu_2 = 5.07$
 $\mu_1 + \mu_2 = 3.42 + 5.07 = 8.49$ $E_{ABΓ} = 8.49$

Εικόνα 20: Τετραγωνισμός των μηνίσκων του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την εμπλοκή των μαθητών με τον υπολογισμό των εμβαδών των μηνίσκων με χορδές τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και τη σύγκριση του αθροίσματος των εμβαδών τους με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου. Το μικροπείραμα προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να μεταβάλλουν δυναμικά το ορθογώνιο τρίγωνο, να παρατηρήσουν τις μετρήσεις των εμβαδών των μηνίσκων καθώς και του ορθογωνίου τριγώνου που δίνει το λογισμικό και να διατυπώσουν εικασίες για την σχέση τους. Επίσης, μπορούν να διερευνήσουν ειδικές περιπτώσεις του σχήματος και πως αυτό τετραγωνίζεται.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5692>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5692>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Ορθογώνιο τρίγωνο	Χορδή κύκλου
Εμβαδόν	Κυκλικό τμήμα
Μηνίσκος	Κοινή χορδή
Τόξο κύκλου	Τετραγωνισμός σχήματος

Πίνακας 7: Λέξεις κλειδιά του "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Αξίζει να τονιστεί, ότι ο διδακτικός στόχος που αναφέρετε στο βιβλίο του καθηγητή, είναι οι μαθητές να μπορούν, από την ακτίνα του κύκλου να υπολογίζουν το εμβαδόν του, το μήκος του, το εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος, καθώς και να έχουν την ικανότητα να υπολογίζουν το εμβαδόν καμπυλόγραμμων σχημάτων που προκύπτουν από κυκλικές επιφάνειες. Επομένως, ο εκπαιδευτικός στόχος του παρόντος μικροπειράματος, εκπληρώνει τον αρχικό. Επιπροσθέτως, γίνεται ενίσχυση του αρχικού διδακτικού στόχου, καθώς ο μαθητής έχει την δυνατότητα να διερευνήσει εις βάθος, ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο απαιτεί τις προαναφερθείσες γνώσεις για την διεξαγωγή και ολοκλήρωση του.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων που εμφανίζεται στην αναπαράσταση του τριγώνου με τους μηνίσκους, ελέγχεται από το σύρσιμο των κορυφών Α και Γ, του αρχικού τριγώνου. Πιο συγκεκριμένα, το σημείο Α μεταβάλλει τις δυο κάθετες πλευρές του τριγώνου και η κίνηση του οριοθετείται από το ημικύκλιο, με διάμετρο ΒΓ. Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων γίνεται με την προαναφερθείσα κίνηση, ενώ όταν το σημείο Α συμπέσει στα σημεία Β ή Γ, το τρίγωνο μετατρέπεται σε ευθεία. Επιπροσθέτως, ο έλεγχος των αριθμητικών τιμών διευκολύνουν τον μαθητή για την ανάπτυξη εικασιών και την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
Σχολιασμός	Εμφάνιση σχήματος στην βοήθεια της δεύτερης δραστηριότητας και στον τετραγωνισμό.	Σύρσιμο
Σύνθεση	Κατασκευή τετραγωνισμού των μηνίσκων.	Εργαλεία κατασκευής
Φιλτράρισμα	Εμφάνιση και απόκρυψη αναπαραστάσεων και βοηθητικών αντικειμένων.	Κουμπιά
Διερεύνηση	Εστίαση στις τιμές των εμβαδών των μηνίσκων μέσω της λειτουργίας του συρσίματος των στοιχείων των αναπαραστάσεων.	Σύρσιμο
Αναδιοργάνωση	Αναδιοργάνωση των σημείων Α και Γ, για την παρατήρηση των αλλαγών των σχημάτων, που συμβαίνουν με την λειτουργία του συρσίματος.	Σύρσιμο
Αναζήτηση	Αναζήτηση γεωμετρικών σχέσεων.	Σύρσιμο, Κουμπιά

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Οι αναπαραστάσεις, που περιέχονται στις τρεις δραστηριότητες, καθώς και η επιβολή του συρσίματος σε συγκεκριμένα σημεία, διευκολύνει τον μαθητή για την διερεύνηση του γεωμετρικού προβλήματος. Επιπλέον, ο μαθητής μπορεί να εξερευνήσει το περιβάλλον των αναπαραστάσεων, μέσω των διαθέσιμων ανατροφοδοτήσεων, οι οποίες παρέχονται στον ίδιο, με την χρήση εργαλείων του ΛΔΓ.
- Η εμφάνιση των διαφορετικών περιπτώσεων της ίδιας αναπαράστασης, συντελείται από τις λειτουργίες του συρσίματος των δυο κορυφών του τριγώνου. Ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις αλλαγές στις δεδομένες τιμές, οι οποίες εμφανίζονται άνωθεν του σχήματος, αλλά και τις μεταβολές των σχετικών γεωμετρικών αναπαραστάσεων.

Οι ανωτέρω δυνατότητες βελτιώνουν την ποιότητα των αναπαραστάσεων του μικροπειράματος.

- Οι ανατροφοδοτήσεις του μικροπειράματος, παρέχονται στον μαθητή, μέσω της χρήσης ειδικών εργαλείων του ΛΔΓ. Ειδικότερα, μέσω της εφαρμογής του συρσίματος, σε ορισμένα σημεία, ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει τις μεταβολές στα βοηθητικά κείμενα καθώς και στα γεωμετρικά σχήματα. Κατά συνέπεια, ο μαθητής διευκολύνεται για την συνέχιση των δραστηριοτήτων, για την ενίσχυση της ισχύς των εικασιών του, αλλά και την ανάπτυξη της τελικής απόδειξης.
- Το παρόν μικροπείραμα δεν παρέχει πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου γεωμετρικού προβλήματος, παρά μόνο τρεις αναπαραστάσεις, οι οποίες συσχετίζονται με τις τρεις δοθείσες δραστηριότητες.
- Οι δοθείσες ανατροφοδοτήσεις, καθώς και οι λειτουργίες του, δίνουν ευκαιρίες για προσπέλαση χωρικών και γραφικών χαρακτηριστικών της αναπαράστασης. Επομένως, η προσοχή του μαθητή στρέφεται στις γεωμετρικές ιδιότητες των γεωμετρικών κατασκευών του μικροπειράματος.
- Οι δραστηριότητες του μικροπειράματος μπορούν να διεξαχθούν και σε περιβάλλον X-M, διότι δεν απαιτείται η εφαρμογή του ΛΔΓ για την διεξαγωγή των επιμέρους δραστηριοτήτων. Σε αντίθεση με αυτό, η χρήση του ΛΔΓ διευκολύνει τον μαθητή στην ανάπτυξη εικασιών και την επαλήθευση αυτών, καθώς και την ενίσχυση της οπτικοποίησης των γεωμετρικών κατασκευών.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

- Οι εκφωνήσεις των δραστηριοτήτων, ενθαρρύνουν τους μαθητές, για την αξιοποίηση των λειτουργιών του συρσίματος. Ειδικότερα, στην πρώτη και στην τρίτη δραστηριότητα, ο μαθητής καλείται να εφαρμόσει τις λειτουργίες του συρσίματος στα διαθέσιμα στοιχεία της αναπαράστασης.
- Το σύρσιμο των στοιχείων της αναπαράστασης, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να παρατηρήσουν τις αλλαγές των στοιχείων της, ώστε να αναπτύξουν εικασίες για τα ερωτήματα των δραστηριοτήτων.
- Μέσω της λειτουργίας του συρσίματος, ο μαθητής δεν έχει την δυνατότητα να ερευνήσει διαφορετικές περιπτώσεις του ίδιου γεωμετρικού αντικειμένου. Το παρόν κριτήριο, αναλύεται σε επόμενη ενότητα, στην οποία γίνεται προσπάθεια για την τροποποίηση του παρόντος μικροπειράματος.
- Τα δεδομένα που αναδεικνύονται από το σύρσιμο των δοθέντων στοιχείων της αναπαράστασης, καθιστούν εμφανής τις αλλαγές των τιμών των εμβαδών, που εμπλέκονται στο γεωμετρικό πρόβλημα, ενώ τα νέα γεωμετρικά σχήματα, διευκολύνουν τον μαθητή στην επαλήθευση των ισχυρισμών του.
- Τα εξαρτώμενα στοιχεία των επιμέρους γεωμετρικών σχημάτων, γίνονται αντιληπτά με την εφαρμογή του συρσίματος των διαθέσιμων στοιχείων. Όπως προκύπτει, το σύρσιμο των κορυφών Α και Γ, προκαλεί την αλληλεπίδραση της «Αναδιοργάνωσης» της γεωμετρικής αναπαράστασης, καθώς και την μεταβολή των δοθέντων βοηθητικών κειμένων, που εμφανίζονται στις δυο δραστηριότητες, οι οποίες πληροφορούν τον μαθητή για τις αριθμητικές τιμές, που απαιτούνται για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας.
- Οι λειτουργίες του συρσίματος χρησιμοποιούνται για την σύνδεση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων. Η αξιοποίηση της λειτουργίας του συρσίματος, γίνεται για την ανάπτυξη

εικασίων, στην πρώτη δραστηριότητα, ώστε ο μαθητής να αναπτύξει την τελική απόδειξη, η οποία συμπεριλαμβάνεται στην τελική δραστηριότητα του τετραγωνισμού των μηνίσκων.

- Η διερεύνηση των τροχιών των γεωμετρικών αντικειμένων, δεν είναι εφικτή, στο παρόν μικροπείραμα.
- Εικτενής περιγραφή των δυνατοτήτων του συρσίματος, εμφανίζεται στις εκφωνήσεις των δραστηριοτήτων. Για παράδειγμα, στην τρίτη δραστηριότητα ζητείται από τον μαθητή να αξιοποιήσει τις λειτουργίες του συρσίματος, ώστε να παρατηρήσει τις αλλαγές στην γεωμετρική αναπαράσταση (εικόνα 20).

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Το παρόν μικροπείραμα εμφανίζει, ανθεκτικές αναπαραστάσεις, διότι τα σημεία που δεχόταν τις λειτουργίες του συρσίματος, είναι περιορισμένα, ενώ οριοθετούνται στα πλαίσια του ημικυκλίου, με διάμετρο ΒΓ. Επιπλέον, οι συνθήκες που δημιουργούν την γεωμετρική αναπαράσταση, παρέχονται εξολοκλήρου στον μαθητή. Επομένως, δεν απαιτείται η παρέμβαση του μαθητή, στην δομή των δοθέντων κατασκευών, με την χρήση των λειτουργιών του μικροπείραματος.

Λειτουργίες του συρσίματος

Η λειτουργία του συρσίματος των στοιχείων της αναπαράστασης, δίνει δυνατότητες για την αναζήτηση νέων ιδιοτήτων (τετραγωνισμός των μηνίσκων). Επιπλέον, ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει τις συνθήκες με τις οποίες το κατασκευάσιμο γεωμετρικό αντικείμενο διατηρεί τις γεωμετρικές του ιδιότητες, σέρνοντας τα διαθέσιμα σημεία της αναπαράστασης.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Το μικροπείραμα έχει δυνατότητες για ενίσχυση της μαθηματικής δραστηριότητας, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Εντούτοις, στην πρώτη δραστηριότητα ζητείται από τον μαθητή, η χρήση περιβάλλοντος X-M, για την ολοκλήρωση της απόδειξης. Κατά συνέπεια, το ΛΔΓ δεν απαιτείται για την ολοκλήρωση αυτής. Επομένως κατατάσσεται στο δεύτερο επίπεδο, βάση των επιπέδων ενσωμάτωσης της ΛΔΓ (Laborde, 2002).

Τελική ανάλυση

Το παρόν μικροπείραμα παρέχει αναπαραστάσεις οι οποίες ενισχύουν την διερεύνηση των μαθητών, με την χρήση των δυνατοτήτων του ΛΔΧ. Για παράδειγμα, στην κατασκευή του τετραγωνισμού των μηνίσκων, ζητείται από τον μαθητή η επιβολή του συρσίματος του σημείου Α και η παρατήρηση των άμεσων αλλαγών της αναπαράστασης, η οποία εμφανίζεται στα δεξιά της οθόνης. Επιπλέον, παρέχονται ανατροφοδοτήσεις, με την ενεργοποίηση κουμπιών, καθώς με την χρήση του συρσίματος σε συγκεκριμένα σημεία, έτσι ώστε ο μαθητής, να αντιμετωπίσει με ευκολία τις δοθείσες δραστηριότητες. Κατά συνέπεια, υπάρχει δυνατότητα προσπέλασης των χωρικών και γραφικών χαρακτηριστικών των αναπαραστάσεων, με τέτοιο τρόπο ώστε ο μαθητής να εστιάσει στις γεωμετρικές ιδιότητες που εμφανίζονται στο μικροπείραμα.

Όσον αφορά τις λειτουργίες του συρσίματος, δίνεται η ευκαιρία, μέσω αυτών, για εστίαση σε συγκεκριμένες πτυχές του μαθηματικού προβλήματος. Επίσης, οι λειτουργίες αυτές, χρησιμοποιούνται για την σύνδεση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων των δοθέντων

δραστηριοτήτων. Παρόλα αυτά, παρατηρήθηκε ότι, λόγω αυτού, η διερεύνηση του προβλήματος γίνεται σε στενά πλαίσια, διότι ο πειραματισμός του μαθητή περιορίζεται στις δοθείσες ανατροφοδοτήσεις για την ανάπτυξη της τελικής απόδειξης.

Τέλος, οι δραστηριότητες του μικροπειράματος, με κατάλληλη μετατροπή των εκφωνήσεων και των δοθέντων σχημάτων, μπορεί να διεξαχθούν, σε περιβάλλον X-M. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι, μέσω δοθέντων εκφωνήσεων των δραστηριοτήτων, έγινε προώθηση των μαθητών για την ανάπτυξη των εικασιών τους, με την παραπομπή τους για εργασία σε περιβάλλον X-M (εικόνα 17). Εντούτοις, η χρήση του ΛΔΧ στις δραστηριότητες αυτές, ενισχύουν την οπτικοποίηση των γεωμετρικών κατασκευών καθώς και των ιδιοτήτων τους. Επιπλέον, η εφαρμογή των δραστηριοτήτων σε ΛΔΧ, διευκολύνει τον μαθητή, για την ανάπτυξη εικασιών και την επαλήθευση αυτών.

5.2.4 Μικροπείραμα: Μία ιδιότητα της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων

Κατηγορία : «Απόδειξη και εικασία»

Περιγραφή

Το μικροπείραμα εξελίσσεται σε τρεις δραστηριότητες, οι οποίες εμφανίζονται από την πρώτη επαφή του μαθητή με αυτό. Επιπλέον παρέχεται αναπαράσταση, με την οποία ο μαθητής καλείται να αλληλεπιδράσει, για να αναπτύξει τις εικασίες του. Στα αριστερά της οθόνης παρουσιάζεται κείμενο, το οποίο επεξηγεί τις λειτουργίες της δοθείσας αναπαράστασης (εικόνα 21).

Επιπροσθέτως, η προαναφερθείσα αναπαράσταση εξετάζει τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων, της κοινής τους εξωτερικής εφαπτομένης, καθώς και της τέμνουσας ευθείας. Η λειτουργία του συρσίματος εφαρμόζεται άμεσα σε τέσσερα σημεία της αναπαράστασης, τα οποία εμφανίζονται με κόκκινο χρώμα. Τα κέντρα των κύκλων, καθώς και τα σημεία στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι με την κοινή εξωτερική εφαπτομένη, δηλαδή τα προαναφερθέντα «κόκκινα σημεία», δέχονται την λειτουργία του συρσίματος. Μέσω του συρσίματος, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τα στοιχεία που μεταβάλλονται, καθώς και τα σημεία που διατηρούν αμετάβλητη την θέση τους στο χώρο. Επιπλέον, με την διαθεσιμότητα των στοιχείων στην λειτουργία του συρσίματος, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να αναπτύξει εικασίες για τα γεωμετρικά σχήματα που εμφανίζονται, σε σχέση με τις δοθείσες δραστηριότητες του μικροπειράματος. Πιο συγκεκριμένα, ο μαθητής μπορεί να μεταβάλει την θέση του εκάστοτε κύκλου στο επίπεδο, με την επέμβαση του στο σημείο που αναπαριστά το κέντρο του κύκλου, καθώς και στα σημεία της τομής των κύκλων με την κοινή τους εξωτερική εφαπτομένη.

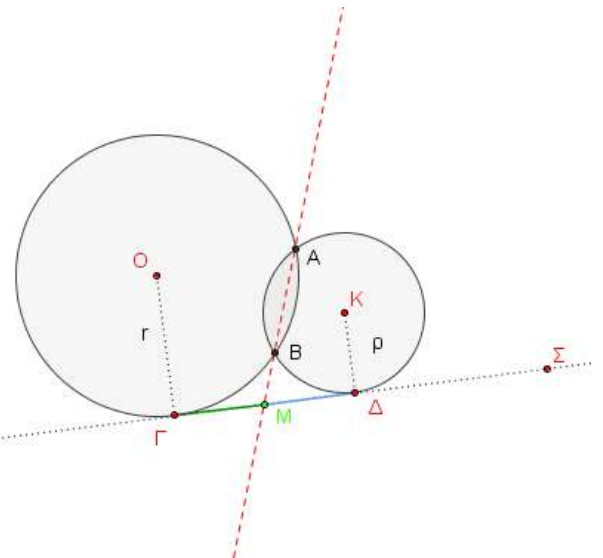
Επιπλέον, οι δραστηριότητες του παρόντος μικροπειράματος, ωθούν τον μαθητή στην χρήση των κατασκευαστικών και υπολογιστικών εργαλείων του ΛΔΓ. Πιο συγκεκριμένα, στην δεύτερη δραστηριότητα, ο μαθητής παρακινείται να υποστηρίξει την εικασία που έχει ήδη αναπτύξει, μέσω των υπολογιστικών εργαλείων του ΛΔΓ. Παράλληλα το σύριμο των διαθέσιμων στοιχείων, απαιτείται για την ανάπτυξη των εικασιών του καθώς και την υποστήριξη της απόδειξης που ο ίδιος προτείνει.

- Οι δύο κύκλοι (O, r) και (K, ρ) του διπλανού σχήματος τέμνονται στα σημεία A, B και $\Gamma\Delta$ είναι μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους.
- Μπορούμε να μεταβάλλουμε το σχήμα αν μετακινήσουμε τα κόκκινα σημεία.

A. Τι παραμένει αναλλοίωτο και τι μεταβάλλεται καθώς μετακινείτε το σημείο O ή το σημείο K ;

B. i) Ποια ιδιότητα έχει το σημείο M ; Να κάνετε μετρήσεις για να ενισχύσετε την εικασία σας
ii) Ποια ιδιότητα έχει η ευθεία της κοινής χορδής AB ; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

Γ. Ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα όταν μετακινείτε το σημείο Γ ή το σημείο Δ ;



Εικόνα 21: Μικροπείραμα " Μία ιδιότητα της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων "

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την διερεύνηση ιδιοτήτων της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5811>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5811>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Κοινή χορδή

Τεμνόμενοι κύκλοι

Μέσο εφαπτόμενου τμήματος δύο κύκλων

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι, οι εκπαιδευτικοί στόχοι προάγονται από τις δραστηριότητες του παρόντος μικροπείραματος. Ειδικότερα ο διδακτικός στόχος που αναφέρετε στο βιβλίο του καθηγητή, εστιάζεται στην αναγνώριση των μετρικών σχέσεων στον κύκλο όταν εμφανίζονται τέμνουσες ή εφαπτόμενες ευθείες, από τους μαθητές. Επιπροσθέτως, οι εκπαιδευτικοί στόχοι, επεκτείνονται καθώς παρέχεται στον μαθητή η δυνατότητα για δυναμικό χειρισμό της δοθείσας αναπαράστασης και εμπάθυνση σε συγκεκριμένες πτυχές αυτής.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων, εμφανίζεται με την μεταβολή του σημείου που αναπαριστά το κέντρο του κύκλου (O, r) , το οποίο κινείται σε ευθεία κάθετη στην κοινή εξωτερική εφαπτομένη, η οποία δεν είναι προγραμματισμένο να εμφανίζεται στην αναπαράσταση του μικροπείραματος. Κατά συνέπεια, ο μαθητής μπορεί να σύρει το σημείο αυτό, σε ολόκληρο το εύρος της προαναφερθείσας

ευθείας. Επομένως, η κίνηση που παρουσιάζει ο κύκλος (K, ρ), ο οποίος εξαρτάται από την κίνηση του κύκλου (O, r), ελέγχει τις οριακές περιπτώσεις της αναπαράστασης.

Επιπροσθέτως, παρατηρείται ότι οι αριθμητικές τιμές δεν εμφανίζονται στην αρχική αναπαράσταση. Πιο συγκεκριμένα, στην δεύτερη δραστηριότητα, ο μαθητής καλείται να χρησιμοποιήσει τα εργαλεία του λογισμικού, για την μέτρηση των αριθμητικών αυτών τιμών, ώστε να ενισχύσει την εικασία, που έχει αναπτύξει σε προηγούμενη δραστηριότητα, αλλά και για να κατασκευάσει την ζητούμενη απόδειξη.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
<i>Διερεύνηση</i>	Μετρήσεις για την ενίσχυση της εικασίας.	Εργαλεία μέτρησης
<i>Αναδιοργάνωση</i>	Αναδιοργάνωση αναπαραστάσεων για την ανάπτυξη εικασιών	Σύρσιμο
<i>Αναζήτηση</i>	Αναζήτηση γεωμετρικών ιδιοτήτων.	Σύρσιμο, Κουμπιά

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Η εξερεύνηση της αναπαράστασης, με στόχο την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων, παρέχονται για ενίσχυση της διερεύνησης του μαθηματικού προβλήματος. Επιπλέον, η αναζήτηση συγκεκριμένων γεωμετρικών ιδιοτήτων, με την χρήση των εργαλείων του ΛΔΓ, παρέχει δυνατότητες στον μαθητή για περαιτέρω πειραματισμό και ως συνέπεια ενισχύεται για μια ακόμη φορά, η διερεύνηση της γεωμετρικής κατασκευής.
- Οι διαφορετικές περιπτώσεις του ίδιου γεωμετρικού σχήματος, που εμφανίζονται με την εφαρμογή των λειτουργιών του συρσίματος στα στοιχεία της αναπαράστασης, βελτιώνουν την ποιότητα και την ακρίβεια των αναπαραστάσεων του μικροπειράματος.
- Οι διαθέσιμες λειτουργίες του συρσίματος, καθώς και οι δοθείσες δραστηριότητες του μικροπειράματος, προωθούν τον πειραματισμό. Πιο συγκεκριμένα, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να εφαρμόσει τις λειτουργίες του συρσίματος, καθώς και να αναπτύξει τις εικασίες του για την δοθείσα αναπαράσταση.
- Οι ανατροφοδοτήσεις που παρέχονται στον μαθητή, κυρίως μέσω του συρσίματος ορισμένων στοιχείων της αναπαράστασης, διευκολύνουν τον ίδιο, για την εξέταση της ορθότητας των υποθέσεων καθώς και των συμπερασμάτων του. Επιπλέον, η χρήση των κατασκευαστικών και υπολογιστικών εργαλείων του ΛΔΓ, προωθεί την εξέταση της ορθότητας της γεωμετρικής κατασκευής, από τον μαθητή.
- Εντούτοις, δεν εμφανίζονται δυνατότητες πολλαπλής αναπαράστασης του γεωμετρικού προβλήματος, που εξετάζεται, από το παρόν μικροπείραμα.
- Επιπλέον, δεν είναι εύκολο να προσπελαστούν τα χωρικά και τα γραφικά χαρακτηριστικά της αναπαράστασης, έτσι ώστε οι μαθητές να εστιάσουν στις γεωμετρικές ιδιότητες αυτών. Η παρατήρηση αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι, το μικροπείραμα παρουσιάζει μοναδική αναπαράσταση για την διεξαγωγή των δραστηριοτήτων αυτού, η οποία στην συνέχεια χαρακτηρίζεται ως μια «ανθεκτική» κατασκευή. Κατά συνέπεια, οι μαθητές περιορίζονται στην παρούσα γεωμετρική κατασκευή, η οποία παρέχει την εξέταση περιορισμένων γεωμετρικών ιδιοτήτων.
- Οι δραστηριότητες του μικροπειράματος μπορούν να διεξαχθούν και σε περιβάλλον X-M. Παρόλα αυτά, η χρήση του λογισμικού σε αυτές τις δραστηριότητες, διευκολύνει τον

μαθητή στην οπτικοποίηση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων, αλλά και στην αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων και συνθηκών αυτών.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

- Οι μαθητές ενθαρρύνονται, κυρίως από τις εκφωνήσεις τις πρώτης και της τρίτης δραστηριότητας, να εφαρμόσουν τις λειτουργίες του συρσίματος στα διαθέσιμα σημεία. Κατά συνέπεια, το γεωμετρικό αντικείμενο δέχεται αλλαγές, οι οποίες διευκολύνουν τους μαθητές για την επίλυση των προαναφερθέντων δραστηριοτήτων.
- Το σύρσιμο των στοιχείων της αναπαράστασης, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αναπτύξουν εικασίες για τα στοιχεία και τις ιδιότητες της αναπαράστασης. Είναι σημαντικό να τονιστεί, ότι εμφανίζεται πλήθος από σημεία που δέχονται τις λειτουργίες του συρσίματος, στην παρούσα κατασκευή.
- Η λειτουργία του συρσίματος, δίνει την δυνατότητα στον μαθητή, να αντιμετωπίσει διαφορετικές περιπτώσεις του γεωμετρικού αντικειμένου. Η μεταβολή των στοιχείων της αναπαράστασης, παρέχει μια δυναμική γεωμετρική κατασκευή, την οποία ο μαθητής μπορεί να διερευνήσει και να εμβαθύνει σε ορισμένες περιπτώσεις, οι οποίες εμφανίζονται με την χρήση του συρσίματος.
- Η λειτουργία του συρσίματος, που επιβάλλεται σε ορισμένα στοιχεία της αναπαράστασης, επιδεικνύει τις συνθήκες κατασκευής του γεωμετρικού αντικειμένου.
- Το σύρσιμο των διαθέσιμων στοιχείων της αναπαράστασης, διακρίνει τις διαφοροποιήσεις και τις εξαρτήσεις των στοιχείων της αναπαράστασης, οι οποίες ωθούν τον μαθητή για ανάπτυξη εικασιών, με εστίαση σε ορισμένες πτυχές αυτής, ώστε να επιτευχθεί η επίλυση των δοθέντων δραστηριοτήτων.
- Η τελική δραστηριότητα λειτουργεί ως σύνδεσμος των υποθέσεων και των συμπερασμάτων, μέσω των εργαλείων του ΛΔΓ. Ειδικότερα, ο μαθητής καλείται να αποδείξει την εικασία που έχει αναπτύξει σε προηγούμενη δραστηριότητα, με την βοήθεια των λειτουργιών του συρσίματος. Κατά συνέπεια, η επίλυση της τελικής δραστηριότητας, ολοκληρώνει το μικροπείραμα, με την σύνθεση των στοιχείων που έχει ανακαλύψει ο μαθητής.
- Οι λειτουργίες του συρσίματος δεν χρησιμοποιούνται για την διερεύνηση των τροχιών.
- Η περιγραφή των δυνατοτήτων της λειτουργίας του συρσίματος επεξηγείται στην αρχική εκφώνηση του μικροπείραματος.

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Η κατασκευή που παρουσιάζεται στο μικροπείραμα είναι ανθεκτική, καθώς δεν είναι δυνατόν για τον μαθητή, να επέμβει στα στοιχεία της αναπαράστασης, περαιτέρω από τις διαθέσιμες ενέργειες στις οποίες μπορεί να προβεί. Πιο συγκεκριμένα, η αναπαράσταση αποτελείται από δυο κύκλους και δύο ευθείες, των οποίων οι θέσεις στον χώρο μεταβάλλονται από την παρέμβαση του μαθητή, μέσω της χρήσης των λειτουργιών του συρσίματος σε ορισμένα σημεία. Εντούτοις, τα στοιχεία που δέχονται τις λειτουργίες του συρσίματος, οριοθετούνται σε συγκεκριμένα πλαίσια, ώστε δεν είναι δυνατόν για τον μαθητή, να αμφισβητήσει τις επιμέρους γεωμετρικές ιδιότητες της κατασκευής.

Λειτουργίες του συρσίματος

Η λειτουργία του συρσίματος των στοιχείων της αναπαράστασης, διευκολύνει τους μαθητές για την ανάπτυξη εικασιών, καθώς έχουν την δυνατότητα να παρατηρήσουν τις αλλαγές των στοιχείων της αναπαράστασης και των ιδιοτήτες της.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Η εύρεση γεωμετρικών σχέσεων στην παρούσα κατασκευή, μέσω των λειτουργιών του συρσίματος των διαθέσιμων στοιχείων, ωθεί τον μαθητή να αναπτύξει τις εικασίες του, βάση των δοθέντων στοιχείων από το ΛΔΓ, καθώς και να υλοποιήσει τις εικασίες με στόχο την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων. Το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ στο παρόν μικροπείραμα αναγνωρίζεται ως το τρίτο επίπεδο (Laborde, 2002), καθώς το λογισμικό απαιτείται για την διεκπεραίωση των δραστηριοτήτων, όμως η μετατροπή του σε περιβάλλον X-M, είναι δυνατή.

Τελική ανάλυση

Το παρόν μικροπείραμα παρουσιάζεται στο μαθητή, με την εμφάνιση δύο δραστηριοτήτων και μιας αναπαράστασης. Στην αναπαράσταση αυτή, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να σύρει το μεγαλύτερο πλήθος των στοιχείων που εμφανίζονται. Η διαθεσιμότητα των στοιχείων που δέχονται τις λειτουργίες του συρσίματος, ωθεί τον μαθητή στην εφαρμογή των εργαλείων του ΛΔΧ. Κατά συνέπεια, οι εικασίες που αναπτύσσουν οι μαθητές, στηρίζονται στις δυνατότητες του ΛΔΧ και στην χρήση των εργαλείων αυτού, τα οποία καθιστούν απαραίτητη την διεξαγωγή των δραστηριοτήτων του μικροπείραματος, σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας. Ειδικότερα, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις διαφορετικές περιπτώσεις της αναπαράστασης, οι οποίες εμφανίζονται μέσω των λειτουργιών του συρσίματος, στα στοιχεία αυτής. Έτσι, ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με την διαδικασία επαλήθευσης της εικασίας του, η οποία, σε προηγούμενο βήμα έχει αναπτυχθεί από τον ίδιο.

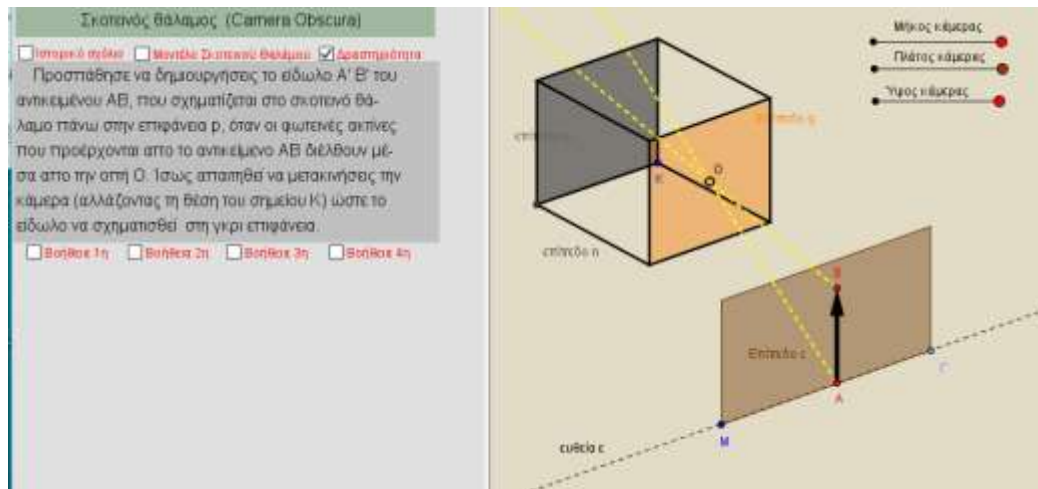
Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι αναπαραστάσεις καθώς και τα βοηθητικά κείμενα, δεν παρέχουν δυνατότητες για εμφάνιση αριθμητικών τιμών, που συσχετίζονται με τις ζητούμενες ιδιότητες. Επομένως, απαιτείται από τον μαθητή η εφαρμογή των δυνατοτήτων του ΛΔΓ. Επιπλέον, ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων αποσκοπεί στην σύνδεση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων του πλήθους των δραστηριοτήτων, καθώς στην τελική δραστηριότητα ο μαθητής αντιμετωπίζει την ίδια δραστηριότητα με μια διαφορετική προσέγγιση.

5.2.5 Μικροπείραμα: Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου

Κατηγορία «Διερεύνηση μοντέλου»

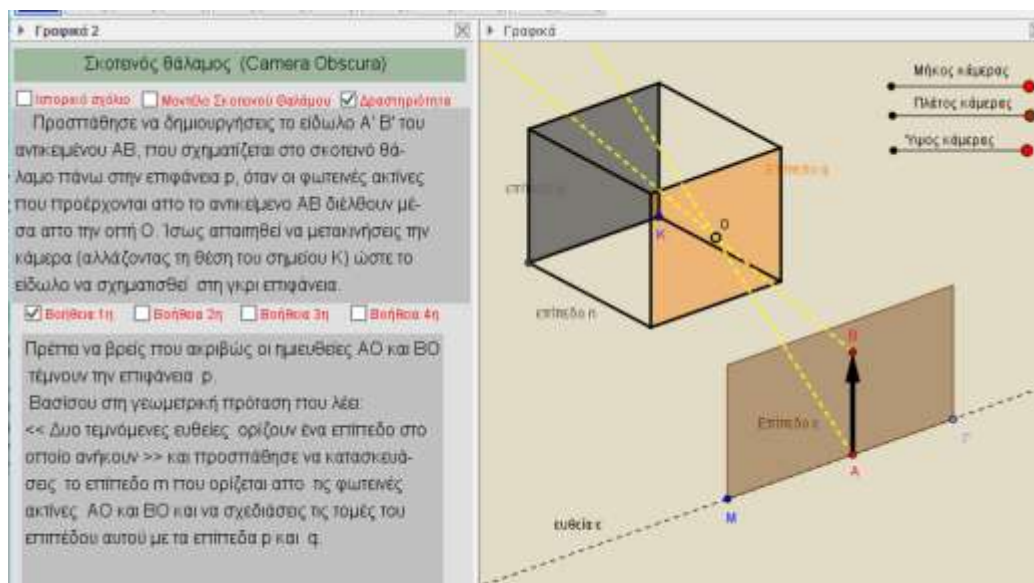
Περιγραφή

Η πρώτη επαφή του μαθητή, με το παρόν μικροπείραμα, είναι ένα κείμενο στο οποίο αναλύονται ιστορικά στοιχεία που αφορούν τον σκοτεινό θάλαμο. Όπως φαίνεται και από την εικόνα 22, ο μαθητής μπορεί να εισέλθει στον κόσμο της ιστορίας του πραγματικού αντικειμένου, που μελετάται, μέσα από το κείμενο αλλά και από τις εικόνες που το συνοδεύουν.

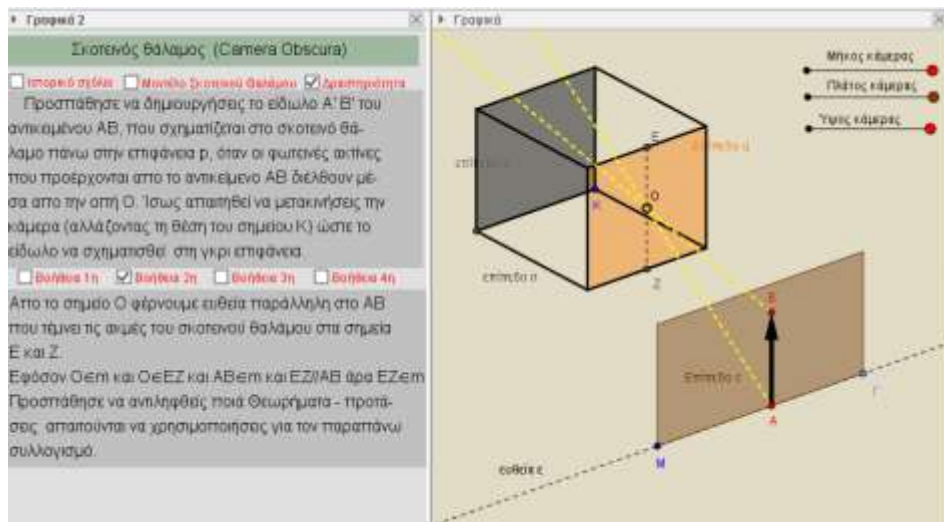


Εικόνα 24: Δραστηριότητα του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"

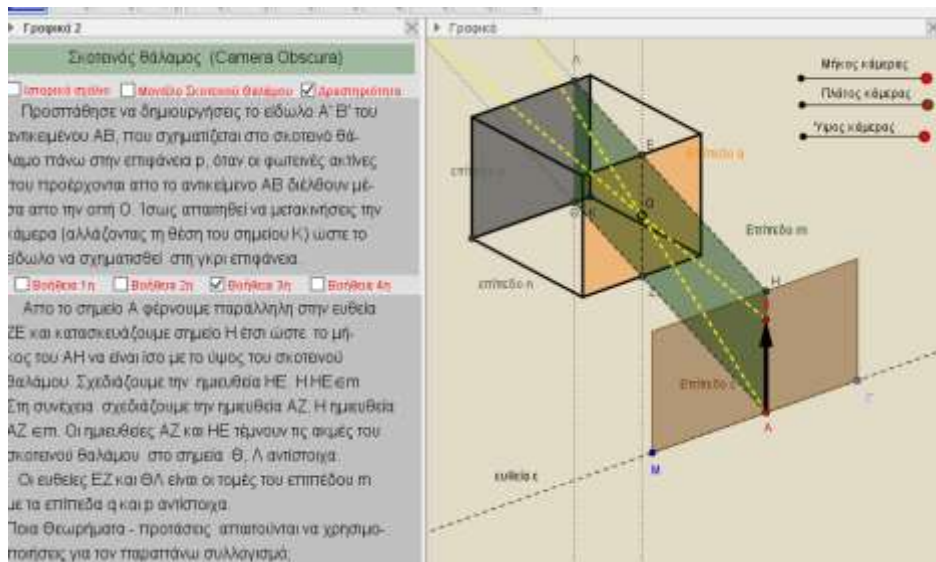
Στην περίπτωση που δεν είναι δυνατόν από τον μαθητή να επιβεβαιώσει ή ακόμα και να αναπτύξει τις εικασίες του, μέσω των εργαλείων του λογισμικού, παρέχεται σε εκείνον περαιτέρω βοήθεια. Οι βοηθητικές δραστηριότητες καθώς και οι αλλαγές που εμφανίζονται στην αναπαράσταση, διευκολύνουν τον μαθητή για την ολοκλήρωση του γεωμετρικού προβλήματος (εικόνες 25-28)



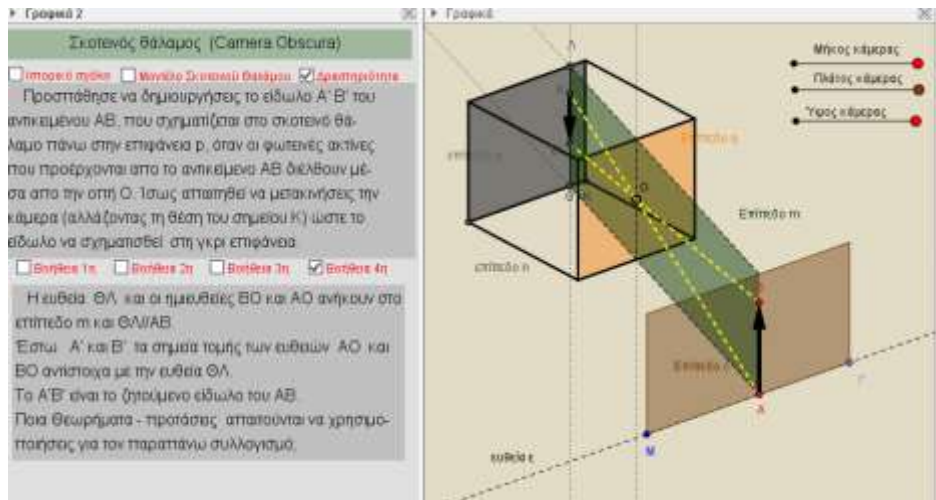
Εικόνα 25: Βοήθεια 1^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"



Εικόνα 26: Βοήθεια 2^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"



Εικόνα 27: Βοήθεια 3^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"



Εικόνα 28: Βοήθεια 4^η του μικροπειράματος "Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου"

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την κατανόηση της έννοιας του επιπέδου και πως αυτό ορίζεται στο χώρο. Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές μεταβάλλουν δυναμικά τις διαστάσεις ενός σκοτεινού θαλάμου και κατασκευάζουν στο χώρο το αντεστραμμένο είδωλο ενός αντικειμένου χρησιμοποιώντας την δυνατότητα του λογισμικού να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5819>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5819>

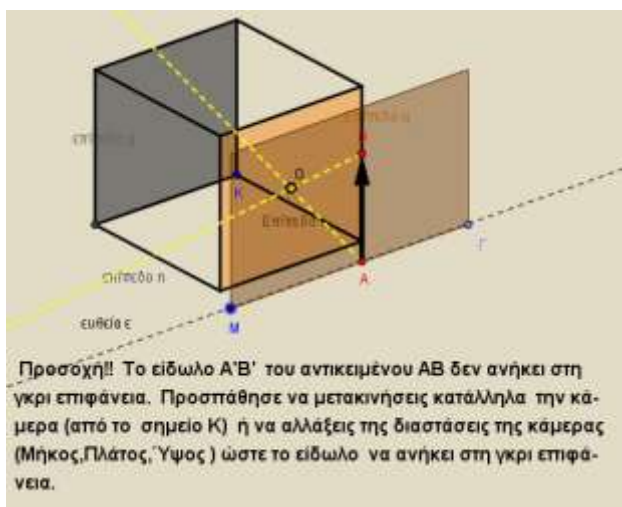
ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ
Παράλληλες ευθείες
Τεμνόμενες ευθείες
Σκοτεινός θάλαμος
Επίπεδο

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Το παρόν μικροπείραμα, εκπληρώνει με επιτυχία τους ζητούμενους εκπαιδευτικούς στόχους, ενώ επεκτείνει αυτούς, μέσω της εξερεύνησης του δοθέντος μοντέλου. Ειδικότερα, οι διδακτικοί στόχοι που αναφέρονται στο βιβλίο καθηγητή για το κεφάλαιο 12, της Γεωμετρίας της Β' Λυκείου, εστιάζονται στην κατανόηση θέσεων και σχέσεων των βασικών στοιχείων του χώρου, που είναι τα σημεία, οι ευθείες και το επίπεδο. Επιπροσθέτως, επισημαίνεται η γνώση των μαθητών για τον τρόπο που ορίζεται ένα επίπεδο στο χώρο, η αναγνώριση σχετικών θέσεων ευθείας και επιπέδου καθώς και των σχετικών θέσεων δύο επιπέδων.

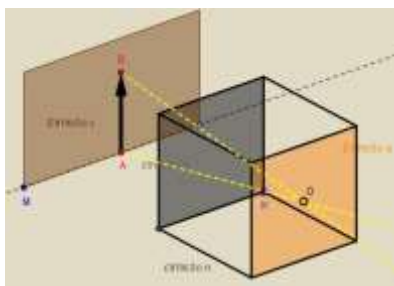
Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Κατά την ανάλυση της εργαλειακής διάστασης του περιεχομένου, παρατηρήθηκε παράλειψη όσον αφορά τον σχεδιασμό του μοντέλου. Ειδικότερα, όπως φαίνεται και από την εικόνα 4, κατά την επιβολή της λειτουργίας του συρσίματος στο σημείο Κ, με το οποίο μετακινείται η «ιάμερα» στο χώρο, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις αλλαγές των ευθειών ΒΟ και ΑΟ. Στην συνέχεια, αν οι ευθείες αυτές, απομακρυνθούν μεταξύ τους και ως συνέπεια δεν διέρχεται κάποια ή και οι δυο από το επίπεδο p , στην οθόνη εμφανίζεται μήνυμα (εικόνα 29), το οποίο λειτουργεί ως ανατροφοδότηση και διευκολύνει τον μαθητή να αντιμετωπίσει πιο γρήγορα, την δοθείσα δραστηριότητα, καθώς έχει την δυνατότητα να κατανοήσει τους περιορισμούς του μοντέλου. Στην συνέχεια, ο μαθητής μπορεί να μετακινήσει και πάλι την «ιάμερα». Αν η μετακίνηση γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ευθείες να διέρχονται από το επίπεδο p , το προαναφερθέν μήνυμα αποκρύπτεται. Η ειδική αυτή λειτουργία, διευκολύνει τον μαθητή, για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας του.



Εικόνα 29: Ανατροφοδότηση σε μορφή κειμένου της δραστηριότητας του μικροπειράματος " Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου "

Εντούτοις, παρατηρήθηκε κίνηση των αντικειμένων και εμφάνιση περιπτώσεων, στις οποίες η προαναφερθείσα λειτουργία αποκρύπτεται, ενώ η εμφάνιση της είναι απαραίτητη. Με το σύρσιμο της «κάμερας», ο μαθητής έχει την δυνατότητα να την τοποθετήσει πολύ κοντά στο «αντικείμενο» ή να ξεπεράσει την ευθεία ϵ , ώστε οι σχετικές θέσεις των επιπέδων να είναι διαφορετικές από την αναμενόμενη (χρειάζεται η οπή, το σημείο O της αναπαράστασης, να είναι «μπροστά» από το επίπεδο ρ). Οι σχετικές θέσεις αυτές, δεν δίνουν στοιχεία για την επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος, καθώς είναι αδύνατον, για τον μαθητή να εξάγει ορθά συμπεράσματα, καθώς η διάταξη των γεωμετρικών αντικειμένων δεν είναι η αναμενόμενη. Στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με την ειδική λειτουργία που παρουσιάζει το παρόν μικροπείραμα, εμφανίζεται ανατροφοδότηση η οποία καθοδηγεί τον μαθητή για την αναγνώριση των σφαλμάτων του. Παρόλα αυτά, το προαναφερθέν μήνυμα δεν εμφανίζεται, και έτσι δεν εκπληρώνεται, πλήρως, ο στόχος της ειδικής αυτής λειτουργίας (εικόνα 30).



Εικόνα 30: Σφάλμα ανατροφοδότησης του μικροπειράματος" Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου "

Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων της αναπαράστασης γίνεται από την ειδική λειτουργία, η οποία αναλύθηκε παραπάνω (εικόνα 29). Κατά συνέπεια, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τα δεδομένα που απαιτούνται για την διεξαγωγή της δραστηριότητας. Επιπλέον, αναφέρετε ότι στο παρόν μικροπείραμα δεν εμφανίζονται αριθμητικές τιμές, με τις οποίες ο μαθητής μπορεί να αναπτύξει εικασίες και να επιβεβαιώσει αυτές. Τέλος, οι ειδικές λειτουργίες που παρέχει το μικροπείραμα, είναι το μοντέλο του σκοτεινού θαλάμου, καθώς και η δοθείσα ανατροφοδότηση, η οποία αναλύθηκε σε προηγούμενη παράγραφο.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
Σχολιασμός	Απόκρυψη και εμφάνιση στοιχείων της αναπαράστασης, για την διευκόλυνση της διεξαγωγής της δραστηριότητας.	Σύρσιμο, Δρομείς
Σύνθεση	Ζητείται η κατασκευή του «ειδώλου» Α'Β'.	Εργαλεία κατασκευής
Φιλτράρισμα	Εμφάνιση και απόκρυψη βημάτων της δραστηριότητας καθώς και βοηθητικών δραστηριοτήτων.	Κουμπιά
Διερεύνηση	Ζητείται η εφαρμογή πλήθους γεωμετρικών γνώσεων, για την συνέχιση της δραστηριότητας αλλά και την ολοκλήρωση αυτής.	Σύρσιμο
Αναδιοργάνωση	Αναδιοργάνωση της «κάμερας» ή του «αντικειμένου».	Σύρσιμο, Δρομείς
Αναζήτηση	Αναζήτηση ενός επιπέδου, μέσω της τελικής κατασκευής του γεωμετρικού αντικειμένου.	Σύρσιμο, Κουμπιά, Εργαλεία κατασκευής

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Το μοντέλο του σκοτεινού θαλάμου, καθώς και οι λειτουργίες αυτής της αναπαράστασης, ενισχύουν την διερεύνηση του μαθητή, για το δοθέν γεωμετρικό πρόβλημα. Η σύνδεση του γεωμετρικού προβλήματος, με ένα πραγματικό μοντέλο, αυτό του σκοτεινού θαλάμου, επεκτείνει την διερευνητική μάθηση.
- Η μετακίνηση των αντικειμένων στον χώρο, διευκολύνει την αναπαραγωγή διαφορετικών περιπτώσεων της ίδιας αναπαράστασης, ενώ παράλληλα βελτιώνεται η ακρίβεια αυτής.
- Το παρόν μικροπείραμα επιτρέπει στον μαθητή να διερευνήσει τις θέσεις και τα σχήματα των αντικειμένων. Με αυτή την διερεύνηση, δίνεται η ευκαιρία στον ίδιο να πειραματιστεί, με τις διαφορετικές περιπτώσεις της ίδιας αναπαράστασης, που εμφανίζεται στην οθόνη του. Εντούτοις, η εμφάνιση των βοηθητικών δραστηριοτήτων περιορίζει και καθοδηγεί την διερεύνηση, με στόχο την ολοκλήρωση της αρχικής δραστηριότητας.
- Οι ανατροφοδοτήσεις που παρέχονται στον μαθητή, είτε με την ειδική λειτουργία, που αναλύθηκε παραπάνω, είτε με τις βοηθητικές δραστηριότητες, δίνουν στον μαθητή την δυνατότητα για εξέταση της ορθότητας των υποθέσεων, που έχει αρχικά αναπτύξει, αλλά και για επαλήθευση των συμπερασμάτων του.
- Η χρήση των δρομέων, για την μεταβολή των θέσεων των αντικειμένων, καθώς και για την αλληλεπίδραση της αναδιοργάνωση αυτών, επιφέρει δυνατότητες για πολλαπλή αναπαράσταση του ίδιου γεωμετρικού αντικειμένου.
- Σύμφωνα με την ανάλυση της εργαλειακής διάστασης του περιεχομένου, η ανατροφοδότηση που εμφανίζεται με την μετακίνηση των αντικειμένων της αναπαράστασης, προωθεί τον μαθητή για την κατανόηση των περιορισμών των λειτουργιών του παρόντος μοντέλου. Συνεπώς, ο μαθητής πληροφορείται για τυχόν σφάλματα, τα οποία μπορούν να τον αποπροσανατολίσουν από την διερεύνηση του μαθηματικού προβλήματος.
- Το παρόν μικροπείραμα, αρχικά εισάγει τον μαθητή στην εξερεύνηση της ιστορίας του σκοτεινού θαλάμου (εικόνα 22), ενώ στην συνέχεια παρέχεται στον ίδιο γεωμετρικό μοντέλο που αναπαριστά το αντικείμενο αυτό (εικόνα 23). Κατά συνέπεια, ο μαθητής έχει την ευκαιρία να διερευνήσει τα στοιχεία ενός πραγματικού μοντέλου, το οποίο χειρίζεται μέσω

των λειτουργιών του συρσίματος, ενώ με την διεξαγωγή της δραστηριότητας, ο μαθητής καλείται να εφαρμόσει τις γεωμετρικές του γνώσεις, για τα δοθέντα αντικείμενα, ώστε να εξάγει συμπεράσματα για αυτά. Επομένως, η αλληλουχία των δραστηριοτήτων, αλλά και η σύνδεση του γεωμετρικού προβλήματος με ένα πραγματικό μοντέλο, δίνουν την ευκαιρία στον μαθητή, να προσπεράσει τα χωρικά και γραφικά χαρακτηριστικά της αναπαράστασης, ώστε να εστιάσει στις ιδιότητες αυτής.

- Για την επίτευξη του παρόντος μικροπειράματος είναι απαραίτητη η χρήση ΛΔΓ. Συγκεκριμένα, η δραστηριότητα θα μπορούσε να διεξαχθεί σε περιβάλλον X-M, αλλά η στατικότητα που παρέχει ένα τέτοιο περιβάλλον, θα δυσκόλευε τον πειραματισμό και την διερεύνηση, καθώς θα εμφανιζόταν μια μοναδική αναπαράσταση, χωρίς την δυνατότητα δυναμικού χειρισμού του μοντέλου.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

- Οι δυνατότητες για χρήση του συρσίματος των στοιχείων της αναπαράστασης, είναι αρκετές για την ενθάρρυνση των μαθητών, στην εφαρμογή αυτών. Πιο συγκεκριμένα, η εκφώνηση της αρχικής δραστηριότητας, καθώς και των βοηθητικών δραστηριοτήτων, περιγράφουν λεπτομερώς τις προαναφερθείσες λειτουργίες.
- Το σύριμο των γεωμετρικών αντικειμένων της αναπαράστασης, παρέχει δυνατότητα για ανάπτυξη εικασιών από τους μαθητές. Επιπλέον, ο μαθητής μπορεί να αξιοποιήσει τις λειτουργίες του συρσίματος, για την επαλήθευση των εικασιών που παράγει.
- Με το σύριμο του σημείου B, καθώς και των δοθέντων δρομέων της αναπαράστασης, δίνεται η δυνατότητα για αλλαγή του μήκους του AB αντικειμένου, και του σχήματος της «άμερας». Κατά συνέπεια, εμφανίζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις του μοντέλου του σκοτεινού θαλάμου.
- Με το σύριμο ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει τις διαφορετικές περιπτώσεις της αναπαράστασης και τελικά να επικυρώσει τις υποθέσεις που έχει αναπτύξει κατά την εργασία του στην δραστηριότητα.
- Οι λειτουργίες του συρσίματος αξιοποιούνται, για την αναγνώριση των εξαρτήσεων μεταξύ των δοθέντων αντικειμένων. Για παράδειγμα, κατά την μετακίνηση της «άμερας» ή του «αντικειμένου» στον χώρο, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τι παραμένει αμετάβλητο στα γεωμετρικά αντικείμενα ώστε να δραστηριοποιηθεί με το γεωμετρικό πρόβλημα του μικροπειράματος.
- Το παρόν μικροπείραμα, αξιοποιεί τις λειτουργίες του συρσίματος και για την σύνδεση υποθέσεων και συμπερασμάτων, που εξάγει ο μαθητής, κατά την δραστηριοποίηση του με αυτό. Πιο συγκεκριμένα, για την ανάπτυξη των υποθέσεων, παρέχεται το μοντέλο του σκοτεινού θαλάμου, καθώς και η δυνατότητα συρσίματος σημείων και δρομέων, για τον πειραματισμό των μαθητών στις αναπαραστάσεις, στο δεύτερο βήμα του μικροπειράματος. Τα συμπεράσματα, που μπορούν να εξάγουν οι μαθητές, προέρχονται από ήδη γνωστές γεωμετρικές προτάσεις και θεωρήματα. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση που ο μαθητής δυσκολευτεί με την εξαγωγή ορθού αποτελέσματος, υπάρχουν διαθέσιμες βοηθητικές δραστηριότητες, που εμφανίζονται και αποικρύπτονται, μέσω των εργαλείων του ΛΔΓ, οι οποίες διευκολύνουν την δημιουργία της προαναφερθείσας σύνδεσης, με εμφάνιση κειμένων και αλλαγές στα δοθέντα γεωμετρικά αντικείμενα.
- Το σύριμο δεν αξιοποιείται για την διερεύνηση των τροχιών που διαγράφουν τα γεωμετρικά σχήματα.

- Υπάρχει αποτελεσματική περιγραφή των στοιχείων που δέχονται την λειτουργία του συρσίματος. Για παράδειγμα, οι τρεις δρομείς που μεταβάλλουν το σχήμα της «ιάμερας», φέρουν ετικέτα με την ιδιότητα που κατέχουν.

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Η κατασκευή που παρουσιάζεται στο μικροπείραμα είναι ανθεκτική. Η αναπαράσταση του μοντέλου του σκοτεινού θαλάμου, δίνεται έτοιμη στον μαθητή για χρήση, με στόχο την εστίαση του στην κατασκευή του ειδώλου ΑΒ. Επομένως, ο μαθητής δεν έρχεται αντιμέτωπος με την κατασκευή του μοντέλου, αλλά εργάζεται σε αυτό για την ανάπτυξη και επαλήθευση των εικασιών του.

Λειτουργίες του συρσίματος

Σύμφωνα με την σχολική ύλη, και την τοποθέτηση του παρόντος μικροπειράματος στο διαδραστικό σχολικό βιβλίο, οι μαθητές γνωρίζουν ήδη, τα γεωμετρικά θεωρήματα και τις προτάσεις, με τα οποία ασχολείται το παρόν μικροπείραμα. Εξ' αυτού συμπεραίνεται ότι, το σύρσιμο των δρομέων και των διαθέσιμων στοιχείων του μικροπειράματος, λειτουργεί για την αναγνώριση και την επιβεβαίωση των ιδιοτήτων του σχήματος.

Επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ

Η διερεύνηση του παρόντος γεωμετρικού προβλήματος και οι δυνατότητες για πειραματισμό στις αναπαραστάσεις που δίνονται, απαιτούν την χρήση ΛΔΓ. Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή στην εφαρμογή της δραστηριότητας σε περιβάλλον Χ-Μ, ο μαθητής θα ερχόταν αντιμέτωπος με στατικές αναπαραστάσεις, οι οποίες δεν θα ενίσχυαν την οπτικοποίηση του σχήματος και των ιδιοτήτων του. Κατά συνέπεια, οι δραστηριότητες του μικροπειράματος, μπορούν να υλοποιηθούν μόνο με την χρήση ΛΔΓ. Επομένως, το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ, αναγνωρίζεται ως το τέταρτο επίπεδο (Laborde, 2002).

Τελική ανάλυση

Η αναπαράσταση του μικροπειράματος ενισχύει την διερεύνηση των μαθητών, διότι τους εμπλέκει σε ένα πραγματικό πρόβλημα, ενώ προάγεται ένα είδος μοντελοποίησης, το οποίο έχει στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Ο δυναμικός τρόπος, με τον οποίο ο μαθητής χειρίζεται τα γεωμετρικά αντικείμενα, επιτρέπει στον ίδιο την άμεση παρατήρηση των αλλαγών και των στοιχείων που εμφανίζονται σε αυτά. Επιπλέον, οι ανατροφοδοτήσεις του μικροπειράματος, διευκολύνουν την διερεύνηση των δραστηριοτήτων. Τα βοηθητικά κείμενα και οι επιμέρους βοηθητικές δραστηριότητες, καθοδηγούν τον μαθητή στην εξερεύνηση του μαθηματικού προβλήματος, στην ανάλυση της αρχικής δραστηριότητας και τέλος στην ολοκλήρωση αυτής.

Επιπροσθέτως, η χρήση ΛΔΓ διευκολύνει τον μαθητή να διερευνήσει την μαθηματική δραστηριότητα που εμφανίζεται στο παρόν μικροπείραμα, για την εστίαση στις ζητούμενες γεωμετρικές ιδιότητες της αναπαράστασης. Ειδικότερα, στα πρώτα δύο μέρη του μικροπειράματος, ο μαθητής παρατηρεί και επηρεάζεται από τα χωρικά χαρακτηριστικά της αναπαράστασης (εικόνες 22 και 23), εφόσον εξερευνά το μοντέλο αλλά και εξετάζει τα στοιχεία που το συνθέτουν, ενώ στην τελική δραστηριότητα, επιτρέπεται στον ίδιο, η εφαρμογή των γεωμετρικών του γνώσεων. Ως συνέπεια των ανωτέρω, ο μαθητής έχει την ευκαιρία, μέσω του μικροπειράματος, να προσπελάσει τα χωρικά και γραφικά χαρακτηριστικά της αναπαράστασης, ώστε να εστιάσει στα στοιχεία και τις ιδιότητες που την συντρέχουν.

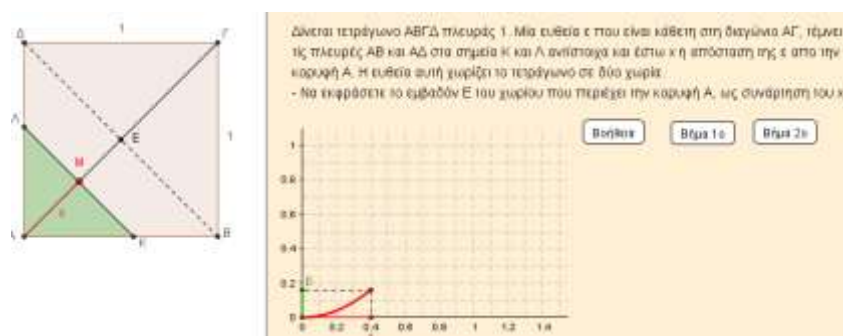
Τέλος επισημαίνεται ότι η δραστηριότητα απαιτεί την χρήση ΛΔΧ, ενώ το επίπεδο ενσωμάτωσης του, αναγνωρίζεται ως τέταρτο, καθώς η εφαρμογή μιας τέτοιας δραστηριότητας σε περιβάλλον X-M, θα εμφάνιζε λιγότερες δυνατότητες για πειραματισμό, ενώ η διερευνητική μάθηση θα περιοριζόταν.

5.2.6 Μικροπείραμα: Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν

Κατηγορία : «Έλεγχος γεωμετρικών ιδιοτήτων»

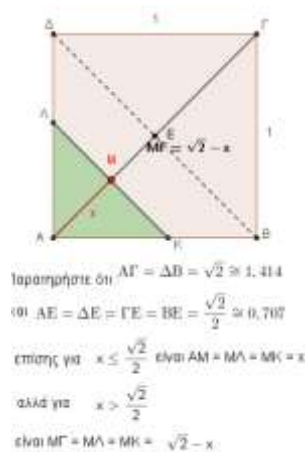
Περιγραφή

Η πρώτη επαφή με το παρόν μικροπείραμα, γίνεται μέσω δύο αναπαραστάσεων και της εκφώνησης της δοθείσας δραστηριότητας, ενώ παρουσιάζονται και τα τρία κουμπιά, τα οποία επεκτείνουν το ψηφιακό υλικό αυτό. Ειδικότερα, όπως φαίνεται και από την εικόνα 31, αριστερά της οθόνης εμφανίζεται ένα τετράγωνο, όπου διαγράφεται η διαγώνιος ΑΓ και πάνω στην οποία έχει σημειωθεί το σημείο Μ, το οποίο μετακινείται στην ΑΓ, μέσω του δρομέα ΑΜ. Επιπλέον, στα δεξιά της οθόνης εμφανίζεται το καρτεσιανό επίπεδο στο οποίο το εύρος τιμών της μεταβλητής x είναι το διάστημα $[0, 1.4]$, ενώ της μεταβλητής y είναι το διάστημα $[0, 1)$. Στο καρτεσιανό επίπεδο αρχικά παρουσιάζεται μια καμπύλη η οποία εμφανίζεται για $x \in [0, 0.4]$ και $y \in [0, 0.2]$, την οποία ο μαθητής καλείται να αναζητήσει και να διατυπώσει με τον αντίστοιχο μαθηματικό τύπο.



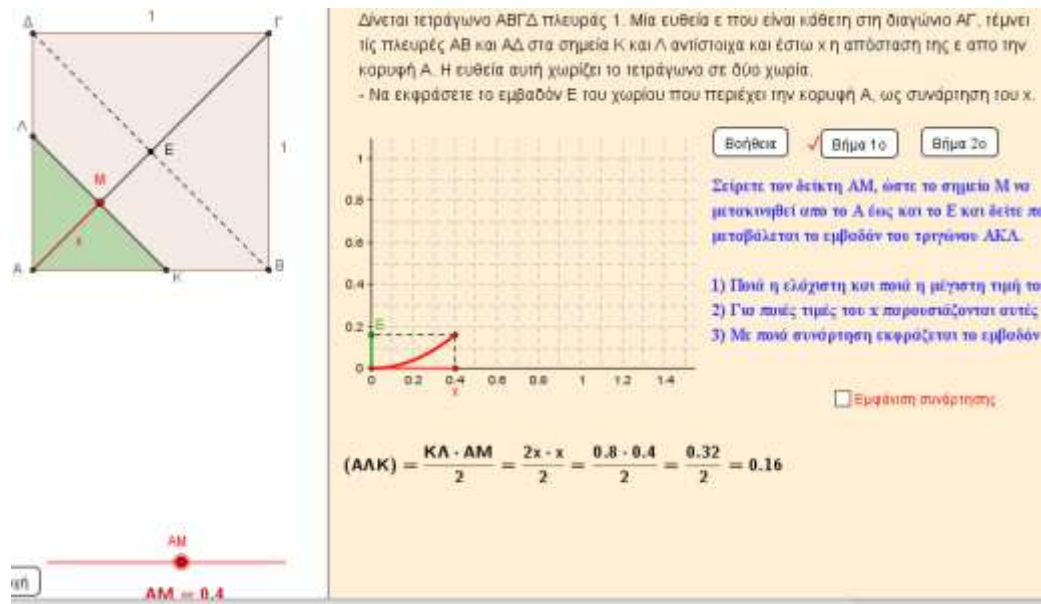
Εικόνα 31: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "

Τα κουμπιά του λογισμικού, εξυπηρετούν την εμφάνιση διαφόρων λειτουργιών που έχει εισάγει ο σχεδιαστής του παρόντος ψηφιακού υλικού. Με το κουμπί «Βοήθεια», εμφανίζεται ένα κείμενο κάτωθεν της αναπαραστάσεως του τετραγώνου, με την οποία επεξηγείτε ο τρόπος εύρεσης της τιμής του μήκους του ΑΜ.



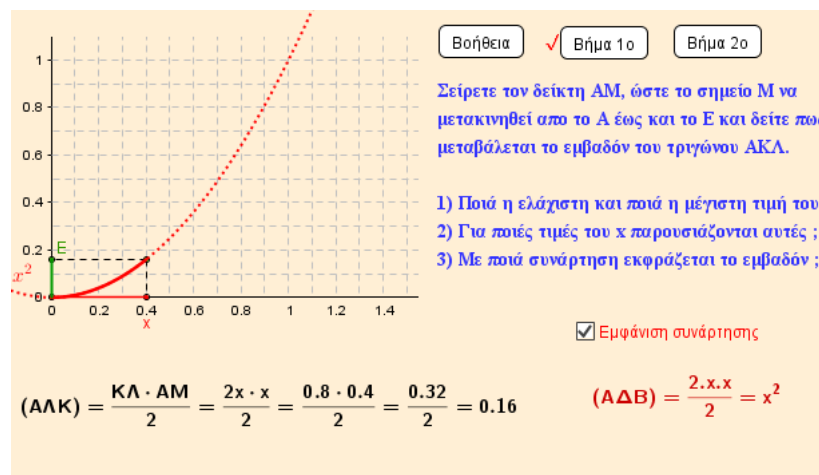
Εικόνα 32: Αρχική βοήθεια μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "

Στην συνέχεια, ο μαθητής μπορεί να ενεργοποιήσει το κουμπί βήμα 1, το οποίο εμφανίζει την εκφώνηση του πρώτου μέρους της δραστηριότητας, το κουμπί με την ετικέτα «Εμφάνιση συνάρτησης», καθώς και βοηθητικό κείμενο το οποίο περιλαμβάνει τον τύπο και την τιμή του εμβαδόν του τριγώνου (ΑΛΚ), όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



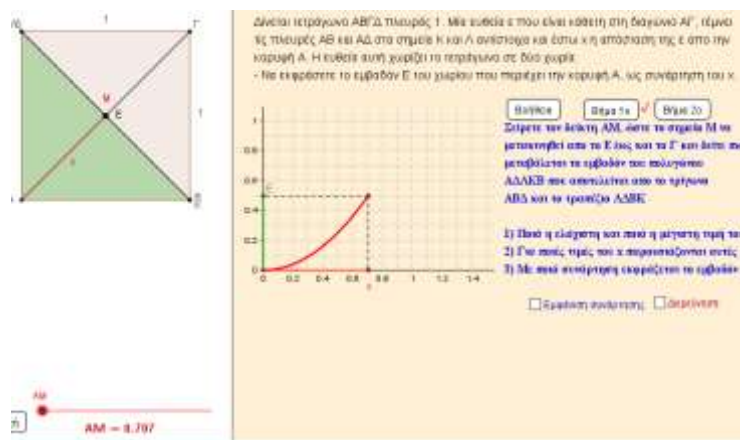
Εικόνα 33: Αρχική παρουσίαση του βήματος 1 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "

Επιπροσθέτως, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να ενεργοποιήσει το κουμπί «Εμφάνιση της συνάρτησης», με το οποίο παρουσιάζεται η συνάρτηση, με τύπο x^2 , όπως φαίνεται και στην εικόνα 34. Έτσι, ο μαθητής μπορεί να επιβεβαιώσει οπτικά, ότι η καμπύλη, η οποία έχει διαγραφεί από τις διάφορες τιμές του εμβαδόν (ΑΛΚ) (το οποίο μεταβάλλεται με την χρήση του δρομέα AM), ανήκει στην προαναφερθείσα συνάρτηση. Επιπλέον, το βοηθητικό κείμενο, το οποίο παρουσιάζει το εμβαδόν (ΑΛΚ), με συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο καθώς και με πραγματική τιμή, διευκολύνει τον μαθητή για την παραγωγή και την επικύρωση των εικασιών που πιθανόν θα αναπτύξει κατά την αναζήτηση της τιμής.

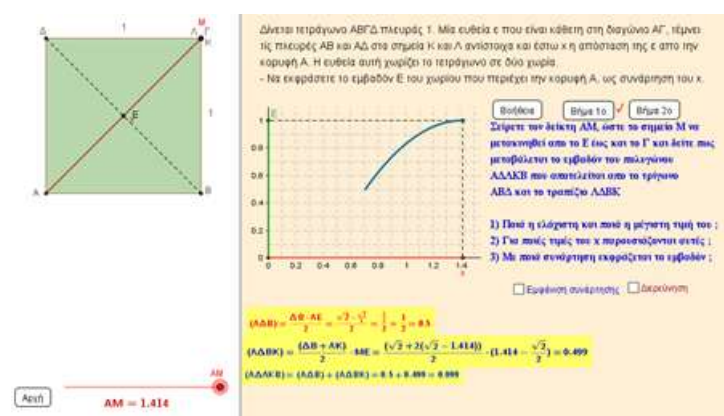


Εικόνα 34: Εμφάνιση συνάρτησης του βήματος 1 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "

Στην συνέχεια, ο μαθητής μπορεί να ενεργοποιήσει το κουμπί με ετικέτα «Βήμα 2ο». Η ενέργεια αυτή εμφανίζει μια καμπύλη στο δοθέν καρτεσιανό σύστημα, όπου η μεταβλητή x δέχεται τιμές στο εύρος $[0, 0.7]$ και η μεταβλητή y δέχεται τιμές στο εύρος $[0, 0.5]$. Επιπλέον, όπως φαίνεται και από την εικόνα 35, εμφανίζεται η εκφώνηση του δεύτερου μέρους της δραστηριότητας, καθώς και δυο ακόμα κουμπιά τα οποία λειτουργούν για την διευκόλυνση του μαθητή στην αντιμετώπιση των διαφόρων προβληματικών καταστάσεων που τίθενται από την εκφώνηση του βήματος 2. Τέλος, η αρχική παρουσίαση του δεύτερου μέρους της δραστηριότητας, εμφανίζει βοηθητικό κείμενο, με την βοήθεια της λειτουργίας του συρσίματος του δοθέν δρομέα και απεικονίζει με μαθηματικό τρόπο, τις διάφορες τιμές των μεταβλητών που ενδιαφέρουν τον μαθητή για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας. Η παραπάνω λειτουργία εμφανίζεται στην εικόνα 35. Να σημειωθεί ότι ακόμα και αν ο μαθητής δεν έχει αφήσει τον δρομέα στην τιμή 0.707 (τότε το σημείο M είναι τομή των δύο διαγωνίων του τετραγώνου), στο πρώτο βήμα, το ψηφιακό υλικό εμφανίζει διαφορετικό δρομέα που μεταβάλλει τις τιμές του μήκους AM , με αρχική τιμή την 0.707, ενώ η καμπύλη, που παρουσιάζεται, έχει σχηματιστεί για όλες τις τιμές του AM που δέχεται από το βήμα 1.



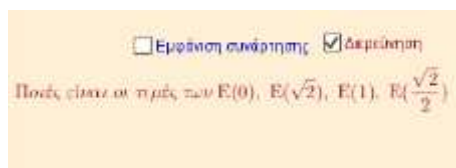
Εικόνα 35: Αρχική παρουσίαση του βήματος 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "



Εικόνα 36: Κίνηση του δρομέα και εμφάνιση της δραστηριότητα στο βήμα 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "

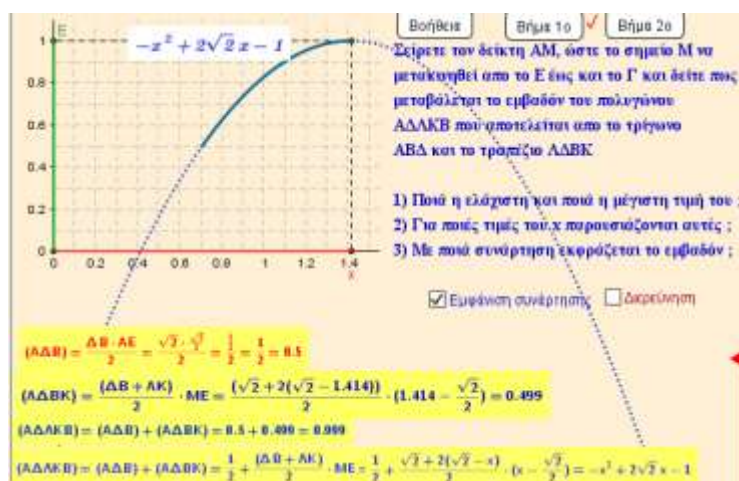
Στο βήμα 2 του παρόντος μικροπειράματος, υπάρχει κουμπί με τον τίτλο «Διερεύνηση» το οποίο λειτουργεί ως βοηθός του μαθητή για την εστίαση του ίδιου, σε συγκεκριμένες ιδιότητες της αναπαράστασης. Ο μαθητής καλείται να παρατηρήσει την τιμή της συνάρτησης για συγκεκριμένες τιμές x . Η διαδικασία αυτή, επεκτείνει την δραστηριότητα, και δίνει την ευκαιρία στον μαθητή να

παρατηρήσει τις διαφορετικές ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων που μελετάει στο παρόν ψηφιακό υλικό.



Εικόνα 37: Κείμενο διερεύνησης στο βήμα 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβασδόν "

Επιπλέον, στο βήμα 2 παρέχεται κουμπί με τον τίτλο «Εμφάνιση συνάρτησης», το οποίο λειτουργεί ως ανατροφοδότηση για τον μαθητή. Ειδικότερα, με την λειτουργία αυτή του λογισμικού, παρέχετε ο τύπος της συνάρτησης $-x^2 + 2\sqrt{2}x - 1$, καθώς και η γραφική παράσταση αυτής, όπως φαίνεται και στην εικόνα 38. Παρόμοια με την λειτουργία του κουμπιού «Εμφάνιση συνάρτησης» στο βήμα 1, το προαναφερθέν κουμπί δίνει δυνατότητες στον μαθητή για επικύρωση του τύπου της συνάρτησης.



Εικόνα 38: Εκφώνηση και βοήθεια για το βήμα 2 του μικροπειράματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβασδόν "

Τέλος στο βήμα 2, δίνεται επιπλέον βοήθεια για την ολοκλήρωση της αρχικής δοθείσας δραστηριότητας. Όπως φαίνεται από την εικόνα 38, ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει ένα κόκκινο βελάκι κάτω δεξιά στην οθόνη, και συγκεκριμένα στο τμήμα «Γραφικά 2», του ψηφιακού υλικού. Το βελάκι αυτό, εφόσον δεχθεί την λειτουργία του συρσίματος, από τον μαθητή, αναδύει βοηθητικό κείμενο (Εικόνα 39), το οποίο παρουσιάζει την σωστή απάντηση για το ερώτημα που έχει δοθεί αρχικά. Το κείμενο αυτό είναι εκείνο που μπορεί να βοηθήσει τον μαθητή για την επικύρωση των εικασιών, που έχει πιθανόν αναπτύξει, κατά την εργασία του πάνω σε προηγούμενες ερωτήσεις. Επιπλέον, η δυνατότητα αυτή δεν επεξηγείται από την εκφώνηση του ψηφιακού υλικού, ή από κάποιο ειδικό κείμενο το οποίο γνωστοποιεί τον μαθητή για την ύπαρξη αυτού, αλλά δίνεται η ευκαιρία στον μαθητή να το ανακαλύψει μόνος τους. Το κείμενο αυτό, έχει τοποθετηθεί έτσι ώστε ο μαθητής να το χρησιμοποιήσει όταν ο ίδιος δεν μπορεί να συνεχίσει με την ολοκλήρωση της αρχικής δραστηριότητας.

Απάντηση

$$E(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -x^2 + 2\sqrt{2}x - 1, & x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Εικόνα 39: Βοηθητικό κείμενο του βήματος 2 του μικροπείραματος "Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβαδόν "

Συμπερασματικά, το παρόν μικροπείραμα εμφανίζει πρωτοτυπία. Η εμφάνιση δυο παραθύρων, στο ψηφιακό περιβάλλον, δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να παρατηρήσει τις αλλαγές και στις δυο δοθείσες αναπαραστάσεις, με την χρήση των λειτουργιών του συρσίματος (χρήση δρομέα AM). Η περιγραφή της ειδικής αυτής λειτουργίας, εμφανίζεται με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Βοήθεια», το οποίο διευκολύνει τον μαθητή για την κατανόηση της λειτουργίας του δρομέα και του γραφήματος που εμφανίζεται στο «Γράφημα 2». Το βοηθητικό αυτό κείμενο, παρουσιάζεται στην εικόνα 32.

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την διερεύνηση της συνάρτησης του εμβαδού που ορίζεται σε τετράγωνο από την κάθετη σε τυχαίο σημείο της διαγωνίου του.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5866>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5866>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ
Γεωμετρία
Εμβαδόν
Συνάρτηση

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Το παρόν μικροπείραμα αφορά την διερεύνηση της συνάρτησης του εμβαδού που ορίζεται σε τετράγωνο, από την κάθετη σε τυχαίο σημείο της διαγωνίου του. Ως συνέπεια των ανωτέρω, οι εκπαιδευτικοί στόχοι αυτού του ψηφιακού υλικού, εκπληρώνονται με την ολοκλήρωση της δοθείσας δραστηριότητας. Είναι σημαντικό να γίνει αναφορά στους υπάρχοντες εκπαιδευτικούς στόχους, του σχολικού βιβλίου, οι οποίοι αναφέρονται παρακάτω. Ειδικότερα, οι διδακτικοί στόχοι που περιέχονται στο 10^ο κεφάλαιο της Γεωμετρίας είναι οι μαθητές:

- Να γνωρίζουν την έννοια του εμβαδού.
- Να μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν των βασικών σχημάτων.
- Να διακρίνουν τα διαφορετικά και ισοδύναμα ως προς το εμβαδόν σχήματα.
- Να μπορούν να μετασχηματίζουν ένα σχήμα σε άλλο ισοδύναμο και να τετραγωνίζουν ένα πολύγωνο.
- Να γνωρίζουν τη σχέση των εμβαδών όμοιων σχημάτων με το λόγο ομοιότητας.

Επομένως, οι διδακτικοί στόχοι του σχολικού βιβλίου, επεκτείνονται με το συγκεκριμένο μικροπείραμα, καθώς γίνεται διερεύνηση της προαναφερθείσας μαθηματικής έννοιας, ενώ παράλληλα προωθείται η σύνδεση της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Σύμφωνα με τους Laborde κ.ά.

(2006), με τον προαναφερθέν τρόπο γίνεται συνεισφορά στην προσέγγιση του μαθηματικού περιεχομένου ως ολότητα, εφόσον δίνεται η δυνατότητα αναπαράστασης αφηρημένων αλγεβρικών εννοιών, μέσω του χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων καθώς και της εύρεσης συναρτησιακών σχέσεων μεταξύ των στοιχείων μιας γεωμετρικής κατασκευής. Η δραστηριότητα προσδιορισμού των σχέσεων αυτών απαιτεί μια διαδικασία μπρος – πίσω, με εικασίες που βασίζονται στην οπτικοποίηση και τους ελέγχους στο διάγραμμα, η παρατήρηση των οποίων οδηγεί σε πιθανές αφαιρέσεις.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων της αναπαράστασης γίνεται με την λειτουργία συρσίματος. Ειδικότερα, με την χρήση του δρομέα AM, ο μαθητής έχει την ευκαιρία να διερευνήσει τις τιμές του μήκους AM και να παρατηρήσει τις συναρτήσεις που διαγράφονται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της οθόνης, και συγκεκριμένα στο παράθυρο «Γραφικά 2». Οι παραπάνω διαδικασίες εμφανίζονται στις εικόνες 35 και 36, στην παράγραφο της περιγραφής του μικροπειράματος. Ως συνέπεια των ανωτέρω, ο χειρισμός των οριακών περιπτώσεων διευκολύνει τον μαθητή για την εύρεση των μέγιστων και των ελαχίστων τιμών της εκάστοτε συνάρτησης, καθώς και την αναγνώριση του τύπου αυτής.

Ο έλεγχος των αριθμητικών τιμών που εμφανίζονται στο ψηφιακό υλικό, διευκολύνουν τους μαθητές για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων. Σύμφωνα με την περιγραφή του μικροπειράματος, στα βήματα 1 και 2 εμφανίζονται οι αντίστοιχες καμπύλες στο δοθέν καρτεσιανό σύστημα, με συγκριμένο εύρος τιμών των μεταβλητών x και y (Εικόνες 35 και 36).

Το μικροπείραμα συμπεριλαμβάνει δραστηριότητες, οι οποίες ενισχύουν την διερευνητική μάθηση. Ειδικότερα, τα στοιχεία με τα οποία μπορεί ο μαθητής να αλληλεπιδράσει καθώς και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται οι ψηφιακές αναπαραστάσεις του μικροπειράματος, αυξάνουν τις δυνατότητες για διερεύνηση αυτών. Παράλληλα, η επισύναψη των γεωμετρικών αντικειμένων, στα αριστερά του ψηφιακού περιβάλλοντος και των αλγεβρικών αντικειμένων, στα δεξιά του περιβάλλοντος, προωθεί την συσχέτιση των διαφορετικών μαθηματικών εννοιών.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
<i>Σχολιασμός</i>	Διαγραφή συναρτήσεων στο καρτεσιανό επίπεδο. Εμφάνιση βοηθητικών κειμένων που μεταβάλλονται από τις τιμές του δρομέα AM.	Δρομέας
<i>Φιλτράρισμα</i>	Εμφάνιση και απόκρυψη δραστηριοτήτων και ειδικών λειτουργιών.	Κουμπιά
<i>Διερεύνηση</i>	Εμφάνιση και απόκρυψη συναρτήσεων.	Κουμπιά
<i>Αναδιοργάνωση</i>	Εμφάνιση σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο και διαγραφή των δοθέντων συναρτήσεων, με την επίδραση του δρομέα AM.	Δρομέας
<i>Αναζήτηση</i>	Εύρεση της αρχικής συνάρτησης του εμβαδόν δοθέντος τετραγώνου.	Δρομέας, Κουμπιά

- Η χρήση του δρομέα AM και η επίδραση αυτού σε αναπαραστάσεις του λογισμικού, δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να διερευνήσει με ευκολία, τις μαθηματικές έννοιες και τις δραστηριότητες που παρέχει το παρόν ψηφιακό υλικό.
- Με το σύρσιμο του δρομέα, ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει τις διάφορες τιμές που δέχεται το μήκος AM και παράλληλα τις αλλαγές στο καρτεσιανό επίπεδο. Οι τιμές αυτές και οι αλλαγές στα μαθηματικά αντικείμενα, εμφανίζονται με μεγάλη ευκολία, εφόσον σε αυτές επιδρά μόνο το εργαλείο του δρομέα. Επομένως είναι αριβής η εμφάνιση των αναπαραστάσεων.
- Η δυνατότητα για επέκταση της μαθηματικής δραστηριότητας μέσω εργαλείων του λογισμικού και ως συνέπεια η παροχή ενός πειραματικού πεδίου στον μαθητή είναι εφικτή. Σύμφωνα με την παράγραφο «Περιγραφή», ο μαθητής μπορεί να ενεργοποιήσει το κουμπί «Επέκταση» και να προβεί στις ενέργειες που του ζητούνται. Η αλληλεπίδραση αυτή, δίνει δυνατότητες για εμπλουτισμό της διερευνητικής μάθησης.
- Σύμφωνα με την παράγραφο «Περιγραφή», το ψηφιακό υλικό παρέχει εργαλεία (κουμπιά και δρομέα) ανατροφοδότησης, για την εμφάνιση βοηθητικών κειμένων καθώς και μαθηματικών αντικειμένων, για την διευκόλυνση του μαθητή στην επαλήθευση των αποτελεσμάτων του.
- Υπάρχει ελλιπής εμφάνιση πολλαπλών αναπαραστάσεων της ίδιας αναπαράστασης, καθώς η χρήση των λειτουργιών του συρσίματος στο γεωμετρικό αντικείμενο, είναι περιορισμένες, καθώς και οι συναρτήσεις που συσχετίζονται με αυτό. Κατά συνέπεια, το μικροπείραμα, επιδέχεται πρόσθεση δραστηριοτήτων και παρέμβαση στις αναπαραστάσεις του ΛΔΓ, ώστε ο διαθέσιμος πειραματισμός να μπορεί να αυξηθεί περαιτέρω.
- Η εστίαση στις γεωμετρικές ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο μικροπείραμα, γίνεται με πλέον πρωτότυπο τρόπο. Η παρούσα προσέγγιση του εμβαδόν τετραγώνου, συνδέει γεωμετρικές με αλγεβρικές έννοιες. Κατά συνέπεια των ανωτέρω, δίνεται η δυνατότητα στον μαθητή να προσεγγίσει το εμβαδόν του τετραγώνου διαφορετικά από την εφαρμογή του κλασσικού γεωμετρικού τύπου, έτσι ώστε να εστιαστεί στις γεωμετρικές ιδιότητες του μαθηματικού αντικειμένου και συνεπώς να προσπεράσει τα γραφικά και χωρικά χαρακτηριστικά της γεωμετρικής αναπαράστασης του τετραγώνου.
- Οι μαθηματικές δραστηριότητες διεξάγονται με ευκολία σε ΛΔΓ, καθώς παρέχεται η δυνατότητα χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων που εμφανίζονται στο μικροπείραμα. Επιπλέον, η διεξαγωγή του ψηφιακού υλικού, καθιστά απαραίτητη την χρήση ΛΔΓ, καθώς οι ανατροφοδοτήσεις που παρέχει το ψηφιακό υλικό, δίνουν την δυνατότητα στον μαθητή να αντιμετωπίσει με ευκολία την δοθείσα δραστηριότητα.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

Η χρήση του συρσίματος, περιορίζεται στην εφαρμογή του δρομέα AM, στα βήματα 1 και 2. Παρόλο που η χρήση αυτού, διευκολύνει τους μαθητές, για την ανάπτυξη εικασιών, με στόχο την παρατήρηση και τον έλεγχο των γεωμετρικών ιδιοτήτων που εμφανίζονται στο μικροπείραμα, δεν εμφανίζονται άλλες δυνατότητες για εφαρμογή των λειτουργιών του συρσίματος. Όπως προκύπτει, δεν παρουσιάζεται η λεπτομερής ανάλυση του ρόλου και της χρήσης του συρσίματος, για το παρόν μικροπείραμα.

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Οι κατασκευές που παρουσιάζονται στο μικροπείραμα είναι ανθεκτικές. Η χρήση λειτουργιών του συρσίματος είναι περιορισμένη στα πλαίσια της διαγωνίου του τετραγώνου. Συγχρόνως, δεν εμφανίζονται δυνατότητες για ανακάλυψη των ιδιοτήτων του γεωμετρικού αντικειμένου.

Λειτουργίες του συρσίματος

Οι λειτουργίες του συρσίματος, όπως αναφέρεται και παραπάνω, περιορίζονται στην χρήση του δρομέα ΑΜ. Επομένως, δεν αναλύεται η λειτουργία του συρσίματος βάση του υπάρχοντος θεωρητικού πλαισίου.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Το ψηφιακό υλικό έχει δυνατότητες για ενίσχυση της μαθηματικής δραστηριότητας, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Επιπλέον, η δραστηριότητα που διαθέτει το μικροπείραμα, δεν διεξάγεται με ευκολία σε στατικό περιβάλλον. Η εφαρμογή περιβάλλοντος X-M, για την ολοκλήρωση της παρούσας δραστηριότητας απαιτεί χρόνο, καθώς είναι απαραίτητη η παρουσίαση πολλαπλών δοκιμών. Πιο συγκεκριμένα, η εμφάνιση των καμπυλών και η συσχέτιση αυτών με τις δοθείσες συναρτήσεις, σε στατικό περιβάλλον, μπορεί να καθυστερήσουν τον μαθητή ή να προκαλέσουν σύγχυση στον μαθητή και ως συνέπεια να εξαχθεί με δυσκολία το σωστό αποτέλεσμα. Από την άλλη μεριά, το δυναμικό περιβάλλον που παρέχει το λογισμικό, διευκολύνει την ανάπτυξη εικασιών, ενώ ταυτόχρονα βασίζεται στην ύπαρξη των ειδικών ανατροφοδοτήσεων που παρέχει το ψηφιακό υλικό. Συμπερασματικά, το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ, βάση του θεωρητικού πλαισίου της Laborde (2002), αναγνωρίζεται ως το τέταρτο επίπεδο.

Τελική ανάλυση

Στο παρόν μικροπείραμα γίνεται επέκταση των εκπαιδευτικών στόχων. Η επέκταση αυτή βασίζεται εκτός από τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων, αλλά και στην ειδική λειτουργία που παρουσιάζεται στο μικροπείραμα. Από την ανάλυση της μαθηματικής διάστασης του περιεχομένου, προέκυψε ότι η επέκταση αυτή, προωθεί την διερεύνηση της γεωμετρικής ιδιότητας, και ως συνέπεια της διερευνητικής μάθησης.

Ένα σημαντικό στοιχείο που προσφέρει το παρόν μικροπείραμα, είναι η σύνδεση γεωμετρικών και αλγεβρικών μαθηματικών στοιχείων. Επιπλέον, το ψηφιακό αυτό υλικό, παρέχει διαφορετική προσέγγιση για την εύρεση του εμβαδόν του τετραγώνου, και ως συνέπεια ο μαθητής έχει την δυνατότητα να προσπεράσει τα χωρικά και γραφικά χαρακτηριστικά του γεωμετρικού αντικειμένου του τετραγώνου, καθώς και των αλγεβρικών συναρτήσεων που περιέχονται στο παρόν μικροπείραμα.

Στην συνέχεια, η ανάλυση της εργαλειωκής διάστασης του περιεχομένου του ψηφιακού υλικού, ανέδειξε στοιχεία τα οποία προωθούν την διερευνητική μάθηση. Ειδικότερα, ο χειρισμός των αριθμητικών τιμών, βοηθούν τον μαθητή για την ανάπτυξη και την επικύρωση των εικασιών. Όμοια, ο χειρισμός των οριακών περιπτώσεων προωθεί κυρίως την επικύρωση των εικασιών ή την απόρριψή αυτών. Επιπλέον, ο πειραματισμός στο παρόν ψηφιακό υλικό, εμφανίζεται με το ειδικό εργαλείο του λογισμικού, τα κουμπιά. Η ενεργοποίηση του κουμπιού «Επέκταση», δίνει την ευκαιρία στον μαθητή να εργαστεί σε συγκεκριμένη δραστηριότητα (Εικόνα 37).

Επιπροσθέτως, δεν εμφανίζονται πολλαπλές αναπαραστάσεις. Ειδικότερα, εμφανίζεται μοναδική περίπτωση, για το γεωμετρικό αντικείμενο του τετραγώνου, ενώ άμεσα περιορίζονται οι περιπτώσεις

της δεύτερης αναπαράστασης, που εμφανίζονται στο «Γράφημα 2», καθώς βασίζονται στις τιμές αυτού. Η χρήση του λογισμικού, μπορεί να είναι απαραίτητη για την διεξαγωγή των δραστηριοτήτων, αλλά μπορεί να προσφέρει ακόμα περισσότερες δυνατότητες, όπως την εμφάνιση πολλαπλών διαφορετικών περιπτώσεων της ίδιας γεωμετρικής καθώς και της αλγεβρικής αναπαράστασης.

Τέλος, το μικροπείραμα παρέχει αναπαραστάσεις, καθώς και αλληλεπιδράσεις, για τον μαθητή, με τις οποίες ο ίδιος μπορεί να προσεγγίσει με διαφορετικό τρόπο το εμβαδόν του τετραγώνου. Έτσι, η σύνδεση μαθηματικών εννοιών της Γεωμετρίας με μαθηματικές έννοιες της Άλγεβρας, γίνεται με ευκολία, ώστε να επιλυθεί η προβληματική κατάσταση που εμφανίζεται. Η δραστηριότητα αυτή επιτυγχάνεται με την ταυτόχρονη παρουσίαση και μεταβολή των δοθέντων αναπαραστάσεων. Συμπερασματικά, το παρόν μικροπείραμα, αξιοποιεί τις δυνατότητες του ΛΔΓ και εμπλουτίζει την διερευνητική μάθηση για τον μαθητή, καθώς και τους εκπαιδευτικούς στόχους του σχολικού βιβλίου.

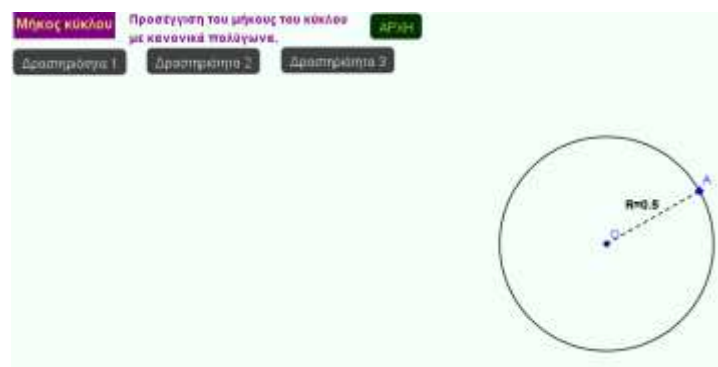
5.2.7 Μικροπείραμα: Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου

Κατηγορία : «Έλεγχος γεωμετρικών ιδιοτήτων»

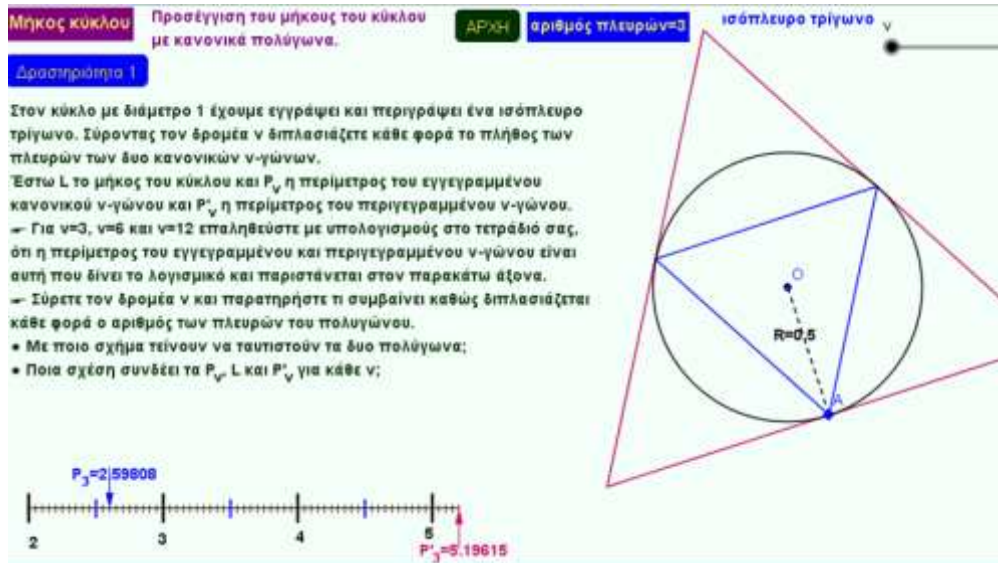
Περιγραφή

Η αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος παρακινεί τον μαθητή να ενεργοποιήσει τα δοθέντα κουμπιά, που εμφανίζονται στην οθόνη. Η αναπαράσταση που παρουσιάζεται, συντελείται από ένα κύκλο, ακτίνας «R» ίσο με την τιμή 0.5 και ένα ειδικό κουμπί με την ετικέτα «ΑΡΧΗ». Η ενεργοποίηση του συγκεκριμένου κουμπιού, επαναφέρει την αναπαράσταση, στην αρχική της μορφή. Στην συνέχεια, η ενεργοποίηση του κουμπιού «Δραστηριότητα 1», εμφανίζει την εκφώνηση με την οποία ο μαθητής εισέρχεται στο μαθηματικό πρόβλημα, ενώ στα δεξιά παρουσιάζεται η αναπαράσταση του κύκλου ακτίνας R, καθώς και τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα ισόπλευρα, σε αυτόν, τρίγωνα.

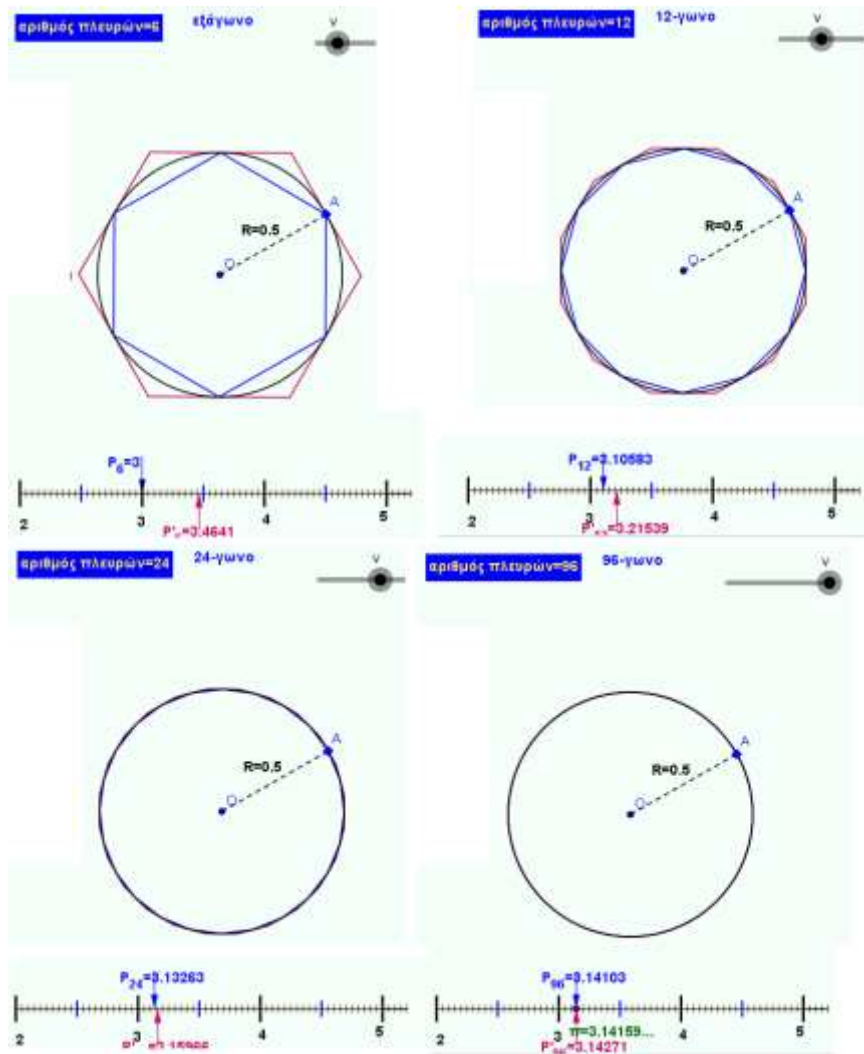
Επιπροσθέτως, παρατηρείται ότι κάτωθεν της εκφώνησης εμφανίζεται άξονας τιμών ο οποίος απεικονίζει τις περιμέτρους των δυο πολυγώνων. Ο δρομέας «n», ο οποίος εμφανίζεται στα δεξιά της οθόνης, μεταβάλλει αναλόγως την αναπαράσταση. Ειδικότερα, γίνεται αλλαγή στα δοθέντα πολύγωνα, καθώς και στις τιμές του άξονα τιμών (εικόνα 41). Επομένως, ο μαθητής έχει την δυνατότητα, να αντιμετωπίσει τις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται σε αυτόν, μέσω της εκφώνησης. Επιπλέον, στην εικόνα 42, εμφανίζεται το πλήθος των αλλαγών που συμβαίνουν στην αρχική αναπαράσταση καθώς μεταβάλλεται η τιμή του δρομέα. Να σημειωθεί, ότι οι τιμές που δέχεται ο δρομέας «n», είναι οι αριθμοί : 3, 6, 12, 24, 48 και 96.



Εικόνα 40:Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος «Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου»



Εικόνα 41: Πρώτη δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"



Εικόνα 42: Εμφάνιση αλλαγών με την μεταβολή του δρομέα v , του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"

Στην δεύτερη δραστηριότητα του μικροπειράματος, στην οποία ο μαθητής μπορεί να εισαχθεί με την ενεργοποίηση του κουμπιού, που φέρει την ετικέτα «Δραστηριότητα 2», παρουσιάζετε η εκφώνηση του μαθηματικού προβλήματος καθώς και παρόμοια αναπαράσταση, της πρώτης δραστηριότητας (εικόνα 43). Στην δεύτερη δραστηριότητα, εμφανίζεται ειδική λειτουργία, που επισυνάπτεται κάτωθεν την εκφώνησης και με την οποία παρουσιάζονται οι τιμές των περιμέτρων των ζητούμενων πολυγώνων. Η ειδική αυτή λειτουργία, διευκολύνει τον μαθητή για την ανάπτυξη των εικασιών του. Στην εικόνα 44, παρουσιάζεται το πλήθος των πινάκων, που εμφανίζονται με την μεταβολή του δρομέα «n», με τον οποίο τροποποιείται και η γεωμετρική αναπαράσταση του κύκλου με τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα (εικόνα 42).

Μήκος κύκλου

Προσέγγιση του μήκους του κύκλου
με κανονικά πολύγωνα.

Δραστηριότητα 2

ΑΡΧΗ

αριθμός πλευρών=3

ισόπλευρο τρίγωνο

Σύρετε τον δρομέα n και παρατηρήστε στον παρακάτω πίνακα τις τιμές των όρων της ακολουθίας P_n των περιμέτρων των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων καθώς και τις αντίστοιχες τιμές της ακολουθίας P'_n των περιγεγραμμένων πολυγώνων.

- Ποιον αριθμό προσεγγίζουν οι όροι των ακολουθιών αυτών καθώς ο αριθμός των πλευρών των δυο πολυγώνων διπλασιάζεται συνεχώς;
- Ποιο είναι το μήκος του κύκλου με διάμετρο 1;

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615

$2.59808 < L < 5.19615$

Εικόνα 43: Δεύτερη δραστηριότητα του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615

$2.59808 < L < 5.19615$

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615
6	3	3.4641

$3 < L < 3.4641$

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615
6	3	3.4641
12	3.10583	3.21539

$3.10583 < L < 3.21539$

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615
6	3	3.4641
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609

$3.13935 < L < 3.14609$

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615
6	3	3.4641
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271

$3.14103 < L < 3.14271$

n	P_n	P'_n
3	2.59808	5.19615
6	3	3.4641
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187

$3.14145 < L < 3.14187$

Εικόνα 44: Σύνολο πινάκων για τις τιμές των περιμέτρων στη δραστηριότητα 2 του μικροπειράματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"

Στην δραστηριότητα 3, εμφανίζεται η ίδια αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων, με την διαφορά ότι είναι ενεργοποιημένη η αλλαγή της τιμής της ακτίνας του κύκλου. Η λειτουργία του συρσίματος δίνει την δυνατότητα στον μαθητή, να αντιμετωπίσει εις βάθος το μαθηματικό πρόβλημα. Η αλλαγή της τιμής της ακτίνας του κύκλου, με το σύρσιμο του δρομέα «R», καθώς και

της τιμής του πλήθους των πλευρών των πολύγωνων, με το σύρσιμο του δρομέα «v», δίνει την δυνατότητα στον μαθητή, να παρατηρήσει τις αλλαγές στις ζητούμενες αριθμητικές τιμές. Επομένως, ο μαθητής μπορεί να καταλήξει και πάλι στο συμπέρασμα, ότι το μήκος του κύκλου προσεγγίζει την τιμή του π , ενώ στην συγκεκριμένη δραστηριότητα μπορεί να επιβεβαιώσει αυτή του την εικασία και για διαφορετικούς από τον μοναδιαίο κύκλο.

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί, ότι το παρόν μικροπείραμα προσεγγίζει την έννοια του ορίου. Ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις τιμές των περιμέτρων των δοθέντων πολυγώνων, και να τις συγκρίνει με το γνωστό μήκος κύκλου. Με αυτό τον τρόπο προσεγγίζεται το μήκος του κύκλου μέσω των κανονικών πολυγώνων που παρέχει η αναπαράσταση. Επομένως, ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει την ταύτιση αυτών των μαθηματικών εννοιών και να διερευνήσει την έννοια του ορίου.

Μήκος κύκλου Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα. **ΔΡΥΗ** αριθμός πλευρών=3 **ισόπλευρο τρίγωνο** v

Δραστηριότητα 3

— Αν μεταβάλλουμε την ακτίνα του κύκλου και επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία ποιο θα είναι το μήκος του;

Π.χ. για $R=1$, πόσο γίνεται το μήκος του κύκλου; Σύρτε τον δρομέα v και παρατηρήστε τον πίνακα με τις τιμές των P_v και P'_v καθώς και τον λόγο $L/2R$.

— Ποιον αριθμό προσεγγίζει ο λόγος $L/2R$; Με τι ισούται το μήκος L του κύκλου;

v	P_v	P'_v
3	5.19615	10.3923

$$\frac{P_v}{2R} < \frac{L}{2R} < \frac{P'_v}{2R}$$

$$2.59808 < \frac{L}{2R} < 5.19615$$

Εικόνα 45: Αρχική παρουσίαση της δραστηριότητας 3 του μικροπείραματος " Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου"

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου μέσω της προσέγγισής του με κανονικά πολύγωνα. Το μικροπείραμα προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να διπλασιάζουν με δυναμικό τρόπο τις πλευρές του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο κανονικού πολυγώνου, να παρατηρούν τις μετρήσεις των περιμέτρων τους που δίνει το λογισμικό καθώς και το σχήμα με το οποίο τείνουν τα πολύγωνα αυτά να ταυτιστούν και να οδηγηθούν στην ανακάλυψη του τύπου που υπολογίζει το μήκος του κύκλου.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5682>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5682>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ
Κύκλος
Μήκος κύκλου
Περίμετρος
Κανονικό πολύγωνο
Περιγεγραμμένο πολύγωνο
Εγγεγραμμένο πολύγωνο
Ακτίνα
Λόγος

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Οι εκπαιδευτικοί στόχοι του παρόντος μικροπειράματος είναι σαφής και βασίζονται απόλυτα στους σχολικούς στόχους για την εκμάθηση της γεωμετρικής έννοιας του μήκους κύκλου. Παράλληλα, ο δυναμικός χειρισμός των αναπαραστάσεων, δίνει δυνατότητα για εμβάθυνση των μαθηματικών εννοιών, που μελετά τον παρόν μικροπείραμα, καθώς και την διερεύνηση εκ μέρους του μαθητή.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Οι οριακές περιπτώσεις των αναπαραστάσεων, ελέγχονται από την χρήση δυο δοθέντων δρομέων. Ειδικότερα με τον δρομέα « π », μεταβάλλεται η τιμή του πλήθους των πλευρών των πολυγώνων. Η μέγιστη τιμή που δέχεται ο δρομέας « π », στην πρώτη δραστηριότητα, είναι το 96, ενώ στις επόμενες δυο είναι το 1536. Επιπλέον, η δραστηριότητα 3 παρουσιάζει τον δρομέα της ακτίνας του κύκλου, ο οποίος δέχεται τιμές στο διάστημα $[0,5]$. Επιπροσθέτως, ο έλεγχος των αριθμητικών τιμών που εμφανίζονται και στις τρεις δραστηριότητες, γίνεται με τους προαναφερθέντες δρομείς.

Οι ειδικές λειτουργίες που εμφανίζονται στο παρόν λογισμικό είναι επί το πλείστον τρεις, οι οποίες συσχετίζονται μεταξύ τους. Ειδικότερα, σύμφωνα με την περιγραφή της πρώτης δραστηριότητας, μέσω αυτής της λειτουργίας ο μαθητής μπορεί να αντιμετωπίσει με ευκολία το μαθηματικό πρόβλημα. Στην συνέχεια, η ειδική λειτουργία εμφάνισης πινάκων (εικόνα 44), προωθεί τον μαθητή για την ολοκλήρωση της δεύτερης δραστηριότητας. Τέλος, στην τρίτη δραστηριότητα η ειδική λειτουργία που εμφανίζεται, είναι παρόμοια αυτής της δεύτερης, με την διαφορά ότι δίνεται βοηθητικό κείμενο, το οποίο διευκολύνει τον μαθητή για την επαλήθευση των εικασιών του.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
Σχολιασμός	Με το σύρσιμο των δοθέντων δρομέων, εμφανίζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις καθώς και μετρήσεις αυτών.	Δρομέας
Φιλτράρισμα	Εμφάνιση και απόκρυψη εκφωνήσεων και αναπαραστάσεων	Κουμπιά
Διερεύνηση	Μετρήσεις πλευρών εγγεγραμμένων ορθογώνιων πολυγώνων.	Δρομέας
Αναδιοργάνωση	Μεταβολή των τιμών για την εμφάνιση διαφορετικών αναπαραστάσεων.	Δρομέας
Αναζήτηση	Τύπου εύρεσης κύκλου.	Δρομέας

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Η διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών, που συμπεριλαμβάνονται στο παρόν μικροπείραμα, είναι εφικτή με τις ειδικές λειτουργίες που παρέχει αυτό, οι οποίες αναφέρονται στην παράγραφο του μικροπειράματος, καθώς και στην ανάλυση της εργαλειακής διάστασης του περιεχομένου.
- Οι δυνατότητες που παρέχονται στον μαθητή για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, παρέχονται με την βοήθεια των δρομέων και βελτιώνουν την ποιότητα και την ακρίβεια του συνόλου των αναπαραστάσεων του μικροπειράματος.
- Εμφανίζεται μικρή δυνατότητα για πειραματισμό. Η διερεύνηση των μαθητών περιορίζεται στις λειτουργίες των αναπαραστάσεων και των δρομέων, οι οποίες μεταβάλλουν τις ίδιες.
- Η ανατροφοδότηση που δίνεται στον μαθητή, είναι οι μετρήσεις των περιμέτρων των εγγεγραμμένων και των περιγεγραμμένων πολυγώνων, ανάλογα με την τιμή του δρομέα « n », καθώς και του δρομέα « R ». Κατά συνέπεια των ανωτέρω, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να επαληθεύσει τις υποθέσεις που πιθανόν έχει αναπτύξει, για την επίλυση των δραστηριοτήτων.
- Στο μικροπείραμα εμφανίζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις, του ίδιου γεωμετρικού αντικειμένου. Συγκεκριμένα, ο μαθητής έχει δυνατότητα να δει τα διαφορετικά πολύγωνα, τα οποία είναι είτε εγγεγραμμένα είτε περιγεγραμμένα του δοθέντος κύκλου.
- Τα χωρικά και τα γραφικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων μπορούν με ευκολία να ξεπεραστούν. Αρχικά, οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια αλληλουχία από εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα ενός κύκλου, ώστε να οδηγηθούν στην διαμόρφωση του μαθηματικού τύπου και στην εφαρμογή αυτού. Συμπερασματικά, το μικροπείραμα δίνει ευκαιρία για την αντιμετώπιση της γεωμετρικής ιδιότητας, την οποία μελετά.
- Για την διεξαγωγή των δραστηριοτήτων του μικροπειράματος, απαιτείται η χρήση ΛΔΓ. Η παρουσίαση του πλήθους διαφορετικών περιπτώσεων της ίδιας μαθηματικής αναπαράστασης, απαιτούν την εφαρμογή ενός ΛΔΓ, καθώς σε διαφορετική περίπτωση θα παρουσιάζονταν στατικές αναπαραστάσεις, ενώ πιθανόν θα εμφανιζόταν δυσκολία στην προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών που εμφανίζονται στις δραστηριότητες. Επιπλέον, με την εφαρμογή της δυναμικής εναλλαγής των δοθέντων πολυγώνων, καθώς και η παροχή των προαναφερθέντων ειδικών λειτουργιών, καθοδηγεί τον μαθητή για την ανάλυση εις βάθος της μαθηματικής έννοιας, που μελετάται.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

Η χρήση του συρσίματος στο παρόν μικροπείραμα περιορίζεται στην μεταβολή θέσης των αναπαραστάσεων. Ως συνέπεια οι λειτουργίες του συρσίματος είναι περιορισμένες και δεν αποφέρουν σημαντικές παρατηρήσεις καθώς και στοιχεία για την διερεύνηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές.

Ανθεκτικές ή εύπλαστες κατασκευές

Οι κατασκευές που παρουσιάζονται στο μικροπείραμα, είναι ανθεκτικές. Οι αναπαραστάσεις, δεν παρέχουν δυνατότητες στον μαθητή για παρέμβαση στην δομή αυτών, καθώς οι λειτουργίες του συρσίματος είναι μειωμένες, ενώ οι ειδικές λειτουργίες που εμφανίζονται για την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος, περιορίζουν τις δυνατότητες για τροποποίηση των στοιχείων των δοθέντων αναπαραστάσεων.

Λειτουργίες του συρσίματος

Όπως αναφέρεται και σε προηγούμενη παράγραφο, οι λειτουργίες του συρσίματος εμφανίζονται περιορισμένες. Επομένως δεν θα γίνει περαιτέρω ανάλυση στην παρούσα παράγραφο.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Το μικροπείραμα έχει δυνατότητες για ενίσχυση της μαθηματικής δραστηριότητας, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Οι λειτουργίες του λογισμικού καθιστούν αναγκαία την χρήση αυτού για την εμφάνιση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των δοθέντων γεωμετρικών αντικειμένων, αλλά δεν ωθείται ο μαθητής για την χρήση των εργαλείων του ΛΔΓ, ώστε να επιλύσει το μαθηματικό πρόβλημα. Εντούτοις, οι δυνατότητες του μικροπείραματος καθιστούν την χρήση του ΛΔΓ, απαραίτητη. Επομένως το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ, αναγνωρίζεται ως το τέταρτο επίπεδο.

Τελική ανάλυση

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση οι αναπαραστάσεις που περιέχει το μικροπείραμα ενισχύουν οπτικά την διερεύνηση των μαθητών. Με τις λειτουργίες των δρομέων και την εμφάνιση των διαφορετικών περιπτώσεων της ίδιας αναπαράστασης, ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει τις δυναμικές αλλαγές στα αντικείμενα που πραγματεύεται το μικροπείραμα, και ως συνέπεια να προσεγγίσει με ευκολία την έννοια του μήκους κύκλου. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, οι αναπαραστάσεις που εμφανίζονται είναι περιορισμένες.

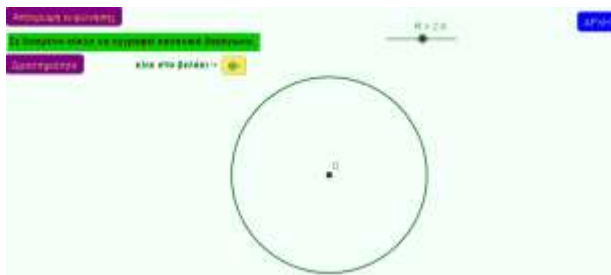
Επιπλέον, όπως αναφέρεται και σε ανωτέρω παράγραφο η αντιμετώπιση της ακολουθίας εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων του κύκλου, δίνει την ευκαιρία στον μαθητή να ξεπεράσει με ευκολία τα χωρικά και τα γραφικά χαρακτηριστικά αυτών. Κατά συνέπεια, αναπτύσσεται με ευκολία η διαμόρφωση του μαθηματικού τύπου του μήκους κύκλου. Επιπροσθέτως, η χρήση του συρσίματος στο παρόν μικροπείραμα περιορίζεται στην μετακίνηση των θέσεων των δοθέντων γεωμετρικών σχημάτων, ενώ δεν εφαρμόζεται για την διερεύνηση των δομών των σχημάτων, από τον μαθητή. Τέλος, το παρόν μικροπείραμα απαιτεί την χρήση του ΛΔΓ, για την ανάπτυξη των δραστηριοτήτων. Συνεπώς, το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ αναγνωρίζεται ως το τέταρτο επίπεδο.

5.2.8 Μικροπειράμα: Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου

Κατηγορία «Κατασκευές»

Περιγραφή

Η αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος, γίνεται με την αναπαράσταση κύκλου ακτίνας που δίνεται από τον δρομέα «R». Ο μαθητής έχει την δυνατότητα, να ενεργοποιήσει το κουμπί «Δραστηριότητα», με το οποίο εμφανίζεται νέο κουμπί και κείμενο που παροτρύνει την αλληλεπίδραση του ίδιου, με αυτό. Δεξιά της οθόνης εμφανίζεται κουμπί με την ετικέτα «ΑΡΧΗ», όπου η αλληλεπίδραση του μαθητή με αυτό, επιστρέφει την αναπαράσταση στην αρχική της μορφή (εικόνα 46). Επίσης η γραμμή εργαλείων που παρέχεται στον μαθητή, παρουσιάζεται στην εικόνα 47, και περιέχει συγκεκριμένες λειτουργίες του ΛΔΓ, για να αξιοποιήσει ο μαθητής.

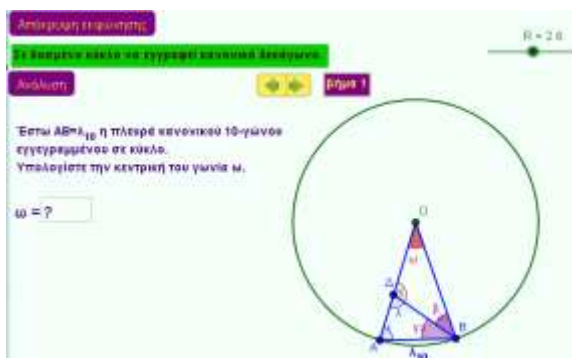


Εικόνα 46: Αρχική παρουσίαση του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»



Εικόνα 47: Γραμμή εργαλείων του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Ακολουθώς, η ενεργοποίηση του κουμπιού «βελάκι», εμφανίζει ισοσκελές τρίγωνο στο εσωτερικό του αρχικού κύκλου, καθώς και το εργαλείο εισαγωγής τιμής του ΛΔΓ. Η ορθή εισαγωγή της τιμής της κεντρικής γωνίας « ω », ολοκληρώνει την παρούσα δραστηριότητα, ενώ ο μαθητής έχει την δυνατότητα, να προχωρήσει σε επόμενη δραστηριότητα με την ενεργοποίηση του κουμπιού «βελάκι». Η εισαγωγή της λανθασμένης τιμής, εμφανίζει βοηθητικό κείμενο, ώστε ο μαθητής να επαναλάβει την εικασία για την τιμή της κεντρικής γωνίας (εικόνα 49). Στην συνέχεια και αφού ο μαθητής έχει εισάγει την γωνία που απαιτείται για την συνέχιση της δραστηριότητας, εμφανίζεται το κείμενο που παρουσιάζεται στην εικόνα 50. Επισημαίνεται ότι, σε περίπτωση που ο μαθητής δεν καταφέρει να εισάγει την σωστή γωνία, δεν μπορεί να συνεχίσει σε επόμενο βήμα. Η ειδική αυτή λειτουργία αναλύεται σε επόμενο στάδιο.



Εικόνα 48: Βήμα 1 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Απάντηση: 40°

26. Σε δοσμένα κύκλω να εγγραφεί κανονικό δεκαγώνιο.

Βήμα 1

Έστω $AB = \lambda_{10}$ η πλευρά κανονικού 10-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλω.

Υπολογίστε την κεντρική του γωνία ω .

$\omega = 40^\circ$

Εικόνα 49: Εμφάνιση κειμένου σε περίπτωση λανθασμένης εισαγωγής τιμής από τον μαθητή του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

$\omega = 36^\circ$

Εικόνα 50: Εμφάνιση κειμένου σε περίπτωση σωστής εισαγωγής τιμής από τον μαθητή του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Στο επόμενο βήμα, ο μαθητής καλείται, να εξετάσει τις τιμές των ζητούμενων γωνιών. Όμοια με αμέσως προηγούμενο βήμα, η ειδική λειτουργία απαιτεί την ορθή εισαγωγή τιμών από τον μαθητή, για την επίτευξη της δραστηριότητας, ενώ παράλληλα επιτρέπει σε αυτόν, να συνεχίσει με την επόμενη δραστηριότητα. Παρακάτω, παρουσιάζεται η εικόνα 52, στην οποία εμφανίζονται οι ορθές τιμές και η ανατροφοδότηση που γνωστοποιεί την ορθότητα των αποτελεσμάτων, που εξήγαγε ο μαθητής. Να σημειωθεί ότι η ειδική λειτουργία των βημάτων 1 και 2, δεν εμφανίζεται ξανά στο μικροπείραμα.

Απάντηση: 72°

27. Σε δοσμένα κύκλω να εγγραφεί κανονικό δεκαγώνιο.

Βήμα 2

Η BD είναι διχοτόμος του τριγώνου AOB .
Να υπολογίσει τα μέτρα όλων των γωνιών των τριγώνων $\triangle ODB$ και $\triangle BDA$ του σχήματος.

$\widehat{OAB} = \alpha = 72^\circ$

$\hat{\beta} = \gamma = 36^\circ$

$\widehat{O\hat{D}B} = \delta = 108^\circ$

$\widehat{A\hat{D}B} = \lambda = 72^\circ$

Τι σχέσεις είναι τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle ODB$:
Δικαιολογήστε ότι: $\widehat{B\hat{D}O} = \lambda_{12}$ και $\widehat{A\hat{D}B} = \lambda_{12}$.

Εικόνα 51: Βήμα 2 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Αιολούθως, ζητείται από τον μαθητή η αναγνώριση της σχέσης μεταξύ των στοιχείων της αναπαράστασης. Η δραστηριότητα αυτή, η οποία παρουσιάζεται στην εικόνα 53, εμφανίζει βοηθητικό κείμενο το οποίο αναδύεται με την ενεργοποίηση του κουμπιού «Βοήθεια». Στο βήμα 4, ζητείται από τον μαθητή, να ανακαλέσει τις γεωμετρικές του γνώσεις, για την παραγωγή εικασιών. Όπως φαίνεται και στην εικόνα 54, βοηθητικό κείμενο εμφανίζεται, μέσω της αλληλεπίδρασης του μαθητή με το κουμπί «Βοήθεια», έτσι ώστε να επιβεβαιώσει την εικασία του.

Απόσταση **βήμα 3**

Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το τετράγωνο της πλευράς AB με την ακτίνα R του κύκλου.

Βήματα

Τα τρίγωνα OAB και $BA\Delta$ είναι όμοια αφού έχουν τις γωνίες τους ίσες.

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{OA}{AB} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} = \frac{R}{\lambda_{10}}$$

ή εφαρμόζοντας το θεώρημα των Διχοτόμων στο τρίγωνο AOB .

Εικόνα 52: Βήμα 3 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Απόσταση σημείων **βήμα 4**

Απόσταση

$\lambda_{10} = R \cdot (R - \lambda_{10})$

Παρατηρήστε προσεκτικά τη σχέση, στην οποία καταλήξατε και σκεφθείτε σε ποια γνωστή κατασκευή με κανόνα και διαβήρη σας οδηγεί.

Βήματα

Επειδή $\lambda_{10} = AB = \Delta B = R - \lambda_{10}$ (γιατί οι μήκη $\lambda_{10} = R - \lambda_{10}$) κερδίζουμε ότι το λ_{10} είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε την ακτίνα R σε μέσο και άκρο λόγο.

Εικόνα 53: Βήμα 4 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Στο βήμα 5, ζητείται από τον μαθητή να αναπτύξει την γεωμετρική κατασκευή του μέσου και άκρου λόγου. Ο μαθητής παροτρύνεται για την εφαρμογή δοθέντων εργαλείων του ΛΔΓ (εικόνα 55), ώστε να ολοκληρώσει την ζητούμενη γεωμετρική κατασκευή. Εντούτοις, παρέχεται η δυνατότητα αλληλεπίδρασης με κουμπί, που φέρει την ετικέτα «Δείξε διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο». Το εργαλείο αυτό παρουσιάζει πλήθος βημάτων (εικόνα 55), με τα οποία ο μαθητής καθοδηγείται για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας του βήματος 5.

Απόσταση σημείων **βήμα 5**

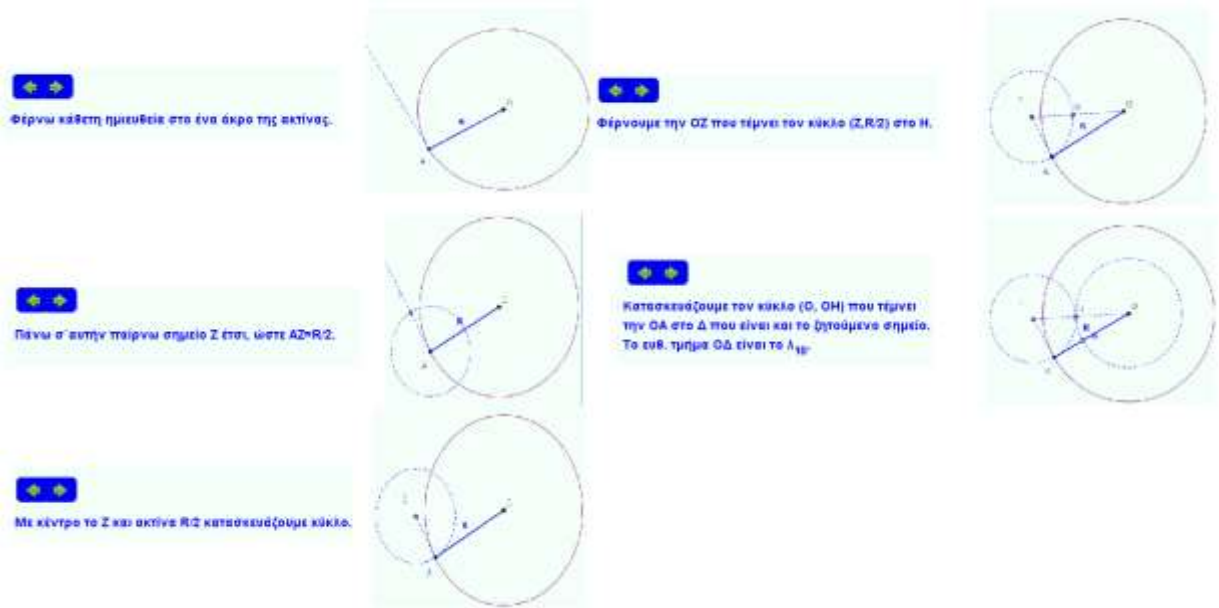
Κατασκευή

Με τα εργαλεία του λογισμικού που σας δίνονται να διαιρέσετε την ακτίνα του κύκλου (O, R) σε μέσο και άκρο λόγο.

Δείξε διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο

ΑΡΧΗ

Εικόνα 54: Αρχική παρουσίαση βήματος 5 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»



Εικόνα 55: Βοηθητικά βήματα για την κατασκευή του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Η ενεργοποίηση του κουμπιού «βελάκι» εμφανίζει νέα δραστηριότητα, η οποία ζητάει από τον μαθητή να αποδείξει την ορθότητα της δοθείσας πρότασης. Επιπλέον, εμφανίζεται κουμπί με την ετικέτα «Βοήθεια», το οποίο παρουσιάζει βοηθητικό κείμενο για την διευκόλυνση του μαθητή στην ανάπτυξη της απόδειξης (εικόνα 57).

Αποδομωτή εκφώνηση

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

Σύνθεση

βήμα 6

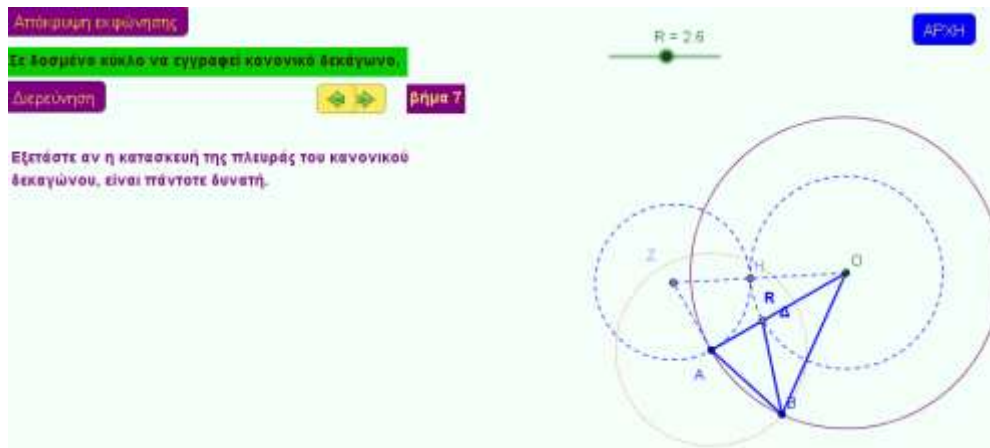
Η AB κατασκευάστηκε ίση με την OA.
Να αποδείξετε ότι η πλευρά AB είναι πλευρά κανονικού δεκαγώνου.

Βοήθεια

Προσπαθήστε συγκρίνοντας τα τρίγωνα OAB και BOA να συμπεράνετε ότι $\widehat{OAB} = 2 \cdot \widehat{AOB}$ και στη συνέχεια ότι $\widehat{AOB} = 36^\circ$.

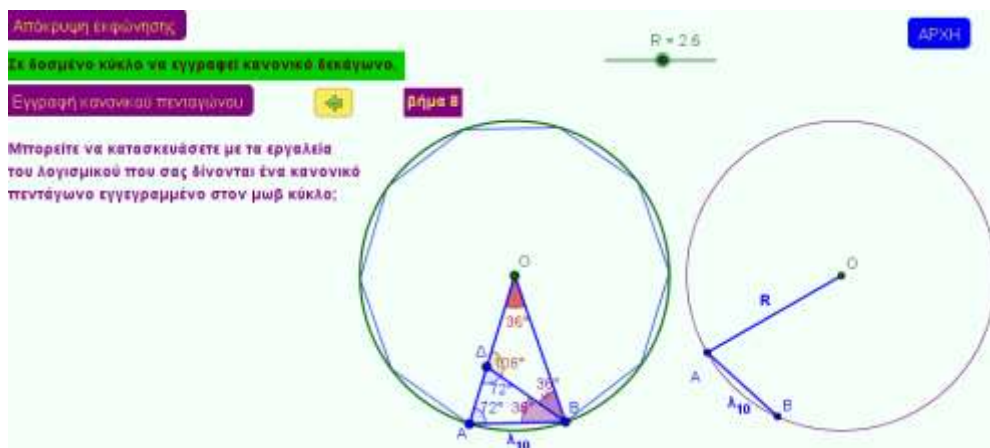
Εικόνα 56: Βήμα 6 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Στην συνέχεια, επιτρέπεται στον μαθητή η δραστηριοποίηση του, με το βήμα 7, το οποίο εξετάζει την κατασκευή δεκαγώνου. Ο μαθητής έχει την δυνατότητα να αναπτύξει τις εικασίες, οι οποίες βασίζονται και στις γεωμετρικές ιδιότητες και κατασκευές, με τις οποίες έγινε αλληλεπίδραση σε προηγούμενα βήματα (εικόνα 57).



Εικόνα 57: Βήμα 7 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Τέλος, ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με το γεωμετρικό πρόβλημα της κατασκευής κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένο στον δοθέν κύκλο (εικόνα 58). Στο σημείο αυτό δεν δίνεται περαιτέρω βοήθεια, με αποτέλεσμα να απαιτείται η κατασκευή πενταγώνου, με την χρήση εργαλείων του λογισμικού, ενώ τα βήματα που χρειάζονται για την διεκπεραίωση αυτής της κατασκευής, γνωστοποιούνται στον μαθητή, από προηγούμενα βήματα του μικροπειράματος.



Εικόνα 58: Βήμα 8 του μικροπειράματος «Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου»

Μεταδεδομένα

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την εμπλοκή των μαθητών με τη γεωμετρική κατασκευή ενός κανονικού δεκαγώνου. Το μικροπείραμα προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να ακολουθήσουν βήμα-βήμα την ανάλυση της κατασκευής και να ελέγξουν τις απαντήσεις τους, ώστε να είναι σε θέση να κατασκευάσουν στη συνέχεια το κανονικό δεκάγωνο με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ: <http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5849>

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5849>

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ
Κανονικό δεκάγωνο
Εγγεγραμμένο πολύγωνο

Κύκλος
Κεντρική γωνία πολυγώνου
Διαίρεση ευθ. τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο
Κανονικό πεντάγωνο

Μαθηματική διάσταση του περιεχομένου

Στο παρόν μικροπείραμα, ικανοποιούνται οι δηλωμένοι εκπαιδευτικοί στόχοι, καθώς είναι προαπαιτούμενη η γνώση των μαθητών, για την αναγνώριση των ιδιοτήτων των κανονικών πολυγώνων. Οι διδακτικοί στόχοι, που αναφέρονται στο βιβλίο του καθηγητή, εστιάζουν στην αναγνώριση της κανονικότητας ενός πολυγώνου, μέσω των στοιχείων και των ιδιοτήτων του. Επιπροσθέτως, για τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται σε κύκλο, ζητείται από τους μαθητές να έχουν την ικανότητα να υπολογίζουν την πλευρά, το απόστημα και το εμβαδόν από την ακτίνα του κύκλου.

Εργαλειακή διάσταση του περιεχομένου

Ο έλεγχος των οριακών περιπτώσεων γίνεται με την χρήση του μοναδικού δρομέα, ο οποίος μεταβάλλει την τιμή της ακτίνας. Συγκεκριμένα, ο δρομέας «R» δέχεται τιμές στο διάστημα $[0,5]$, με αποτέλεσμα, να περιορίζεται ο χειρισμός των οριακών περιπτώσεων. Επιπλέον, οι αριθμητικές τιμές του παρόντος μικροπειράματος εμφανίζονται στα βήματα 1 και 2. Ο χειρισμός αυτών, γίνεται με την ορθή εισαγωγή των τιμών που ζητούνται, από τον μαθητή. Στην περίπτωση, που ο μαθητής δεν εισάγει την σωστή τιμή, το μικροπείραμα εμφανίζει βοηθητικό κείμενο, το οποίο τον πληροφορεί, για την απαραίτητη αλλαγή αυτής.

Η ειδική λειτουργία του μικροπειράματος εμφανίζεται στα βήματα 1 και 2. Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που παρουσιάζονται στην αναλυτική περιγραφή του μικροπειράματος, μέσω της ειδικής αυτής λειτουργίας, το ΛΔΓ εμποδίζει ή επιτρέπει στον μαθητή, την συνέχιση του μικροπειράματος. Συγχρόνως, η λειτουργία αυτή παρέχει ανατροφοδότηση στον μαθητή, για την ορθότητα του αποτελέσματος του, ενώ ταυτόχρονα διευκολύνει τον πειραματισμό, με στόχο την παραγωγή εικασιών και την άμεση επαλήθευση αυτών.

Δυνατότητες του ΛΔΓ

Κατηγορίες Αλληλεπιδράσεων Μικροπειράματος

Αλληλεπιδράσεις	Σχόλια	Εργαλεία λογισμικού
Σχολιασμός	Η ειδική λειτουργία που εμφανίζεται στα βήματα 1 και 2. Επίσης στο βήμα 5, εμφανίζονται διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού αντικειμένου για την επεξήγηση των βημάτων.	Εισαγωγή τιμής, Κουμπιά
Σύνθεση	Ζητείται η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων.	Εργαλεία κατασκευής
Φιλτράρισμα	Βήματα δραστηριότητας και βοηθητικά κείμενα.	Κουμπιά
Διερεύνηση	Στα βήματα 1 και 2, ζητείται η εισαγωγή τιμών.	Εισαγωγή τιμής
Αναζήτηση	Στο βήμα 7 η αναζήτηση για δυνατότητα κατασκευής πλευράς κανονικού δεκαγώνου.	Εργαλεία κατασκευής

Πρόσθετη αξία του ψηφιακού υλικού

- Οι ανατροφοδοτήσεις που παρέχει το παρόν μικροπείραμα, ενισχύουν την διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών και των γεωμετρικών κατασκευών.
- Δεν εμφανίζονται δυνατότητες για εμφάνιση διαφορετικών περιπτώσεων και περαιτέρω διερεύνηση αυτών. Αυτό κυρίως συμβαίνει, λόγω της έλλειψης λειτουργιών του συρσίματος, στην οποία γίνεται αναφορά σε επόμενη παράγραφο.
- Υπάρχει περιορισμένης έκτασης πειραματισμός, λόγω της καθοδηγούμενης παρουσίασης των 7 βημάτων, τα οποία διευκολύνουν την κατασκευή του δεκαγώνου, αλλά δεν παρέχουν ευκαιρίες για περαιτέρω διερεύνηση.
- Οι ανατροφοδοτήσεις που παρέχει το μικροπείραμα, διευκολύνουν τον μαθητή στην ανάπτυξη εικασιών καθώς και στην τελική κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος, όπως φαίνεται και από την αναλυτική περιγραφή αυτού.
- Το μικροπείραμα δεν παρέχει πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου μαθηματικού προβλήματος.
- Τα χωρικά και γραφικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων είναι δύσκολο να ξεπεραστούν από τον μαθητή, καθώς ο πειραματισμός είναι μικρής έκτασης, και η εμφάνιση πολλαπλών αναπαραστάσεων, είναι περιορισμένη.
- Δεν απαιτείται η χρήση ενός ΛΔΓ, καθώς οι αναπαραστάσεις που εμφανίζονται παρέχουν περιορισμένες δυνατότητες για χρήση του συρσίματος, ενώ το μικροπείραμα βασίζεται στην εμφάνιση έτοιμων σχημάτων. Πιο συγκεκριμένα, ο μαθητής δεν έχει την δυνατότητα να αξιοποιήσει το σύριμο σε ορισμένα σημεία, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται περιορισμένες καταστάσεις της ίδιας αναπαράστασης. Επιπλέον, η παροχή γεωμετρικών αντικειμένων, στις οποίες ο μαθητής δεν μπορεί να επέμβει στην δομή και τις ιδιότητες αυτών, μειώνουν τις δυνατότητες του ΛΔΓ και ως συνέπεια η χρήση του δεν είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων.

Ρόλος και χρήση του συρσίματος

Το στοιχείο που δέχεται τις λειτουργίες του συρσίματος στο παρόν μικροπείραμα, είναι το σημείο Α, το οποίο μετακινεί το αρχικό ισοσκελές τρίγωνο, που είναι εσωτερικό του δοθέντος κύκλου. Επιπλέον ο μαθητής μπορεί να σύρει το σημείο Ο (κέντρο του δοθέν κύκλου). Η ύπαρξη των λειτουργιών του συρσίματος στα προαναφερθέντα σημεία, δεν παρουσιάζει άμεση επίπτωση για την ανάπτυξη των εικασιών, από τους μαθητές, καθώς και για την επέκταση της διερευνητικής μάθησης. Επομένως, στην παρούσα παράγραφο δεν θα γίνει ανάλυση του ρόλου και της χρήσης του συρσίματος.

Ανθεκτικές ή Εύπλαστες κατασκευές

Η βασική κατασκευή που τίθεται στο μαθητή από το μικροπείραμα είναι εύπλαστη, καθώς ζητείται από εκείνον η κατασκευή ενός εγγεγραμμένου δεκαγώνου. Παρόλα αυτά, το μικροπείραμα, στο σύνολο του, παρατηρείται ότι περιέχει ανθεκτικές κατασκευές, οι οποίες εμφανίζονται στα βήματα 1 έως και 8.

Λειτουργίες συρσίματος

Η χρήση του συρσίματος είναι περιορισμένη και ως συνέπεια δεν γίνεται ανάλυση της παρούσας παραγράφου.

Επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ

Η δραστηριότητα που παρέχει το μικροπείραμα χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση της δοθείσας γεωμετρικής ιδιότητας. Εντούτοις, οι υπάρχουσες δυνατότητες του ΛΔΓ δεν αξιοποιούνται μέγιστα, με αποτέλεσμα, η χρήση του λογισμικού για την ολοκλήρωση της παρούσας δραστηριότητας να μην είναι απαραίτητη. Επομένως, ενώ το γεγονός ότι οι δραστηριότητες που συντελούν το μικροπείραμα, διεξάγονται σε ΛΔΓ, διευκολύνει τις ενέργειες των μαθητών, δεν προσφέρει αλλαγές σε αυτές, όσον αφορά τις δυνατότητες του ΛΔΓ. Συνεπώς, το επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ του παρόντος μικροπειράματος, κατατάσσεται στο πρώτο.

Τελική ανάλυση

Αρχικά, γίνεται επισήμανση της ειδικής λειτουργίας, που εμφανίζεται στα βήματα 1 και 2 (εικόνες 49 και 51). Η λειτουργία αυτή, διευκολύνει τον μαθητή για την ανάπτυξη εικασιών αλλά και της τελικής κατασκευής του ζητούμενου γεωμετρικού σχήματος. Επιπλέον, παρέχεται βοηθητικό κουμπί που φέρει την ετικέτα «Δείξε διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο» στο βήμα 5 (εικόνα 55), το οποίο παρουσιάζει βήμα-βήμα την γεωμετρική κατασκευή.

Επιπροσθέτως, η κατασκευή πενταγώνου στο τελευταίο βήμα, λειτουργεί ως σύνδεση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων του μικροπειράματος. Ειδικότερα, ο μαθητής μπορεί να συνδέσει τα προηγούμενα βήματα, για την κατασκευή κανονικού δεκαγώνου, ώστε να τα εφαρμόσει στην νέα κατασκευή. Η ενίσχυση της οπτικοποίηση των αναπαραστάσεων, συμβαίνει κυρίως στο βήμα 5. Στο συγκεκριμένο βήμα, ο μαθητής έχει την δυνατότητα να παρατηρήσει τις αλλαγές στο δοθέν σχήμα, καθώς εναλλάσσει τις αναπαραστάσεις με την ενεργοποίηση ειδικού κουμπιού (εικόνα 55).

Τέλος, επισημαίνεται ότι, η χρήση του ΛΔΓ δεν απαιτείται για την διεξαγωγή του παρόντος μικροπειράματος. Παρόλα αυτά, σε διαφορετική περίπτωση, η διεξαγωγή των δραστηριοτήτων σε περιβάλλον Χ-Μ, θα δυσχέραινε την ολοκλήρωση αυτών, από τους μαθητές. Συμπερασματικά, οι δυναμικές αναπαραστάσεις που παρέχει το παρόν μικροπείραμα, διευκολύνουν τον μαθητή για την διερεύνηση των ιδιοτήτων αυτού, καθώς και την τελική κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος.

5.3 Τροποποίηση μικροπειράματος

Η τροποποίηση ή διασκευή (Κυνηγός & Διαμαντίδης, 2014) του μικροπειράματος, διαμορφώνει τα υπάρχοντα εργαλεία (instrumentation) (Rabardel, 1995), ενώ παρέχει μια περιγραφή για την διεξαγωγή αυτής (documental genesis, Guin & Trouche, 1999). Βάση των θεωρητικών πλαισίων, στα οποία στηρίχθηκε η παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται προσπάθεια για περιγραφή των σχεδιαστικών αποφάσεων που λήφθηκαν κατά την τροποποίηση του υπάρχοντος μικροπειράματος. Οι αλλαγές στα μικροπειράματα μπορούν να γίνουν, για την βελτίωση των δυνατοτήτων παιδαγωγικής τους αξιοποίησης (Trgalova κ.ά., 2010; Trgalova & Jahn, 2013; Sedig & Sumner, 2006; Healy, 2000), αλλά και για την αξιοποίηση του επιπέδου ενσωμάτωσης του ΛΔΓ (Laborde, 2002). Επιπλέον, μελετάται η δυνατότητα επέκτασης της διερευνητικής μάθησης.

5.3.1 Μικροπείραμα: Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη

Η ανάλυση των χαρακτηριστικών του παρόντος μικροπειράματος, ανέδειξε μια ανθεκτική κατασκευή (Healy, 2000). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι, η λειτουργία του συρσίματος του σημείου Α, μεταβάλλει τις δυο κάθετες πλευρές του τριγώνου, ενώ η αναπαράσταση οριοθετείται από το δοθέν ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και το σημείο Α κινείται στα πλαίσια του ημικυκλίου αυτού. Η αλλαγή των λειτουργιών συρσίματος του σημείου Α, ώστε η μεταβολή του ίδιου να ξεφεύγει από τα όρια του ημικυκλίου, δίνει την δυνατότητα για περαιτέρω πειραματισμό. Έτσι ο μαθητής έχει την ευκαιρία να εργαστεί στην δημιουργία του ορθογωνίου τριγώνου, με την βοήθεια των λειτουργιών του συρσίματος. Η τροποποίηση του μικροπειράματος βασίζεται στις αλλαγές που αναφέρονται παρακάτω.

Αρχικά γίνεται αντικατάσταση της εκφώνησης της δραστηριότητας με νέα εκφώνηση. Παράλληλα, διαγράφεται το κουμπί «Βοήθεια» και το βοηθητικό κείμενο, που εμφανίζει το αρχικό μικροπείραμα. Επιπλέον, εισάγεται νέο κουμπί με την ετικέτα «Υπολογισμός εμβαδών», το οποίο εμφανίζει και αποκρύπτει, τις μετρήσεις των μ_1 , μ_2 , $\mu_1 + \mu_2$ και $E_{\Delta B \Gamma}$, αλλά και κουμπί με την ετικέτα «Απόδειξη», το οποίο εμφανίζει κείμενο, που προσάπτεται παρακάτω.

Όσον αφορά την εκφώνηση του μικροπειράματος, δίνεται στον μαθητή, τρίγωνο με ενεργοποιημένη την μέτρηση της γωνίας Α, του οποίου όλες οι κορυφές είναι μεταβλητές και η θέση τους δεν οριοθετείται από δοθέν κύκλο, ώστε ακολούθως να αναγνωρίσει την αναγκαιότητα της ύπαρξης ορθογωνίου τριγώνου. Ειδικότερα, δίνεται μια αναπαράσταση ενός τριγώνου, το οποίο εμφανίζει τους μηνίσκους μ_1 και μ_2 και τους κυκλικούς τομείς τ_1 και τ_2 . Στην συνέχεια, ζητείται από τον μαθητή, η αναγνώριση της σχέσης μεταξύ των εμβαδών των δυο μηνίσκων και του εμβαδόν τριγώνου. Το αρχικό τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, οπότε απαιτείται η ενασχόληση του μαθητή με την κατασκευή συγκεκριμένου σχήματος, ώστε να εμφανίσει την ζητούμενη σχέση ($\mu_1 + \mu_2 = E_{\Delta B \Gamma}$). Να σημειωθεί ότι, η εφαρμογή των λειτουργιών του συρσίματος, μεταβάλλει το σχήμα αλλά και τις δοθείσες μετρήσεις, οι οποίες παρέχονται στον ίδιο με το κουμπί «Υπολογισμός εμβαδών». Στο δεύτερο ερώτημα, ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει το είδος της γωνίας, με την οποία επαληθεύεται η σχέση, καθώς και να αιτιολογήσει την απάντησή του, ώστε να αναπτύξει εικασίες για τον τρόπο δημιουργίας αυτής.

Στην συνέχεια (ερώτημα 3), ζητείται από τον μαθητή, η απόδειξη της γεωμετρικής σχέσης του προηγούμενου ερωτήματος. Παράλληλα παρέχεται στον ίδιο, κουμπί με την ετικέτα «Απόδειξη», με

το οποίο ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μια σειρά από δραστηριότητες, οι οποίες τον διευκολύνουν για την ανάπτυξη της τελικής απόδειξης. Ειδικότερα, με την κατασκευή των κύκλων με διάμετρο AB, AG και BG εμφανίζονται τα γεωμετρικά σχήματα στα οποία στηρίζονται οι αρχικές αναπαράστάσεις των μηνίσκων (μ_1, μ_2) και των κυκλικών τομέων (τ_1, τ_2). Επιπλέον, ο μαθητής καλείται να παρατηρήσει αν εμφανίζεται σχέση μεταξύ των κύκλων, για την οποία απαιτείται η χρήση εργαλείου του λογισμικού ώστε να γίνουν οι μετρήσεις των εμβαδών αυτών. Η προσέγγιση αυτή, θα ωθήσει τον μαθητή να λάβει υπόψη, κατά την διεξαγωγή της απόδειξης, τους κύκλους και τις ιδιότητες αυτών, που συσχετίζονται με το γεωμετρικό πρόβλημα.

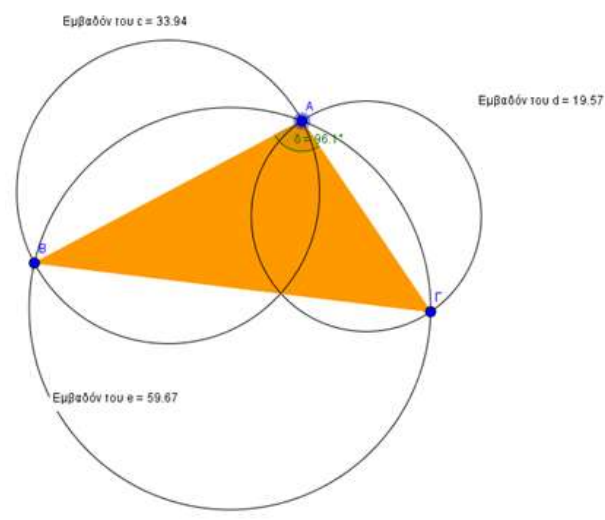
Η εκφώνηση που δίνεται για την ενασχόληση του μαθητή με το τροποποιημένο μικροπείραμα είναι η εξής:

«Εστω μ_1, μ_2 τα εμβαδά των σχηματιζόμενων μηνίσκων και τ_1, τ_2 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές AB και AG. Ακολουθήστε τις παρακάτω οδηγίες για να αναπτύξετε τις εικασίες σας για τις σχέσεις των δοθέντων μηνίσκων με το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ:

1. Με την βοήθεια του συρσίματος των σημείων του τριγώνου, μπορείτε να αναπτύξετε κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών των δυο μηνίσκων και του εμβαδόν τριγώνου. Για περαιτέρω βοήθεια μπορείτε να ενεργοποιήσετε το παρακάτω κουμπί (κουμπί «Υπολογισμός εμβαδών»).
2. Ποια είναι η συνθήκη που εξυπηρετεί την σχέση που αναπτύξατε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
3. Αποδείξτε την σχέση που ανακαλύψατε προηγουμένως. Για περαιτέρω βοήθεια, μπορείτε να ενεργοποιήσετε το κουμπί «Απόδειξη».

Παράλληλα η ενεργοποίηση του κουμπιού «Απόδειξη», θα εμφανίζει το παρακάτω κείμενο, ενώ η εικόνα 60, αντικατοπτρίζει την κατασκευή στην οποία οι μαθητές καταλήγουν μετά την ολοκλήρωση του πρώτου ερωτήματος:

1. Κατασκευάστε τους παρακάτω κύκλους:
 - a. Κύκλος με διάμετρο το AB.
 - b. Κύκλος με διάμετρο το AG.
 - c. Κύκλος με διάμετρο το BG.
2. Μπορείτε να αναπτύξετε μια σχέση για τα εμβαδά των κύκλων που κατασκευάσατε;



Εικόνα 59: Προτεινόμενη τροποποίηση μικροπείραματος "Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη"

Τέλος, επισημαίνεται ότι, η τροποποίηση στηρίχθηκε και στον τρόπο που εισάγεται η απόδειξη της γεωμετρικής σχέσης, για τον μαθητή. Η πρόσθεση ενός νέου ερωτήματος, ωθεί τον μαθητή για την προσέγγιση της απόδειξης, με την βοήθεια των διαθέσιμων εργαλείων του λογισμικού. Σκοπός αυτού θα είναι ο μαθητής να αντιμετωπίσει κάθε πτυχή της αρχικής γεωμετρικής κατασκευής και κατά συνέπεια να επιτευχθεί η επέκταση της διερευνητικής μάθησης. Συγχρόνως, η παρούσα τροποποίηση, ανέπτυξε μια εύπλαστη κατασκευή (Healy, 2000), ενίσχυσε την πρόσθετη αξία του λογισμικού (Trgalova κ.ά., 2010), αλλά και παρέχει δυνατότητες για αύξηση του επιπέδου ενσωμάτωσης του ΛΔΓ (Laborde, 2002). Τέλος, ο πειραματισμός του μαθητή με το σημείο A, δίνει δυνατότητες για ανάπτυξη εικασιών, ενώ στο αρχικό μικροπείραμα οι λειτουργίες του συρσίματος δίνουν δυνατότητες για έλεγχο της διατήρησης των γεωμετρικών ιδιοτήτων (Trgalova & Jahn, 2013).

6. Συζήτηση & Συμπεράσματα

Η διεξαγωγή της έρευνας, έγινε με την αρχική κατηγοριοποίηση 187 μικροπειραμάτων, η οποία έγινε βάση των στοιχείων που συλλέχθηκαν από την σύνθεση επιλεγμένων θεωρητικών πλαισίων, ενώ στην συνέχεια έγινε ποιοτική ανάλυση των στοιχείων για 8 επιλεγμένα μικροπειράματα. Η δεύτερη φάση της ανάλυσης, είχε ως στόχο την αναγνώριση της ποιότητας του εκάστοτε μικροπειράματος και των δυνατοτήτων παιδαγωγικής αξιοποίησης αυτού, αλλά και την περιγραφή των λειτουργιών του λογισμικού δυναμικού χειρισμού (ΛΔΧ), που χρησιμοποιήθηκε για την διεξαγωγή του. Τέλος, η έρευνα ολοκληρώνεται, με την τροποποίηση ενός μικροπειράματος, με στόχο την ανάδειξη των παιδαγωγικών δυνατοτήτων του.

Η σύνθεση του υπάρχοντος θεωρητικού πλαισίου, έγινε με στόχο την αντιμετώπιση των διαφόρων περιορισμών που εμφανίζει η αφθονία των διαδικτυακών ψηφιακών υλικών (Trgalova κ.ά., 2009). Σύμφωνα με τους Sedig και Sumner (2006), είχε παραλειφθεί, από έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών, η ανάπτυξη ενός θεωρητικού πλαισίου, με το οποίο διακρίνονται οι χρήσεις των αλληλεπιδράσεων, καθώς και ο τρόπος που χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά για την υποστήριξη την διερεύνησης μιας μαθηματικής δραστηριότητας. Παράλληλα, οι Drijvers κ.ά. (2007), επισήμαναν, ότι μια λεπτομερής περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας, είναι αναγκαία, ενώ η περιγραφή αυτή θα αναπτύσσεται από τον εκπαιδευτικό, και θα αναφέρει όλες εκείνες τις τεχνικές που μπορούν να υποστηρίξουν τις λειτουργίες τους, με στόχο την αναβάθμιση της διερευνητικής μάθησης. Επομένως, ένας προβληματισμός της Διδακτικής των Μαθηματικών, ήταν η δημιουργία μιας κοινής «γλώσσας», με την οποία θα υπήρχε ευκολία για την περιγραφή των δυνατοτήτων των διαφόρων ψηφιακών υλικών.

Βάση των ανωτέρω προβληματισμών, η παρούσα διπλωματική εργασία, αρχικά εστιάστηκε στην σύνθεση ενός πλαισίου αξιολόγησης των ψηφιακών υλικών. Ειδικότερα, δημιουργήθηκε ένα πλαίσιο κατηγοριοποίησης ψηφιακών υλικών, αλλά και ένα πλαίσιο ποιοτικής ανάλυσης επιλεγμένων ψηφιακών υλικών. Τα πλαίσια αυτά αποσκοπούν στην περιγραφή των λειτουργιών ενός ψηφιακού υλικού, με στόχο την ανάδειξη των δυνατοτήτων παιδαγωγικής αξιοποίησης αυτών. Επισημαίνεται ότι, τα στοιχεία της κατηγοριοποίησης, διευκόλυναν την επιλογή των ψηφιακών υλικών, για την ακόλουθη ποιοτική ανάλυση. Επιπλέον, τα πλαίσια αυτά είναι εστιασμένα για την αναγνώριση των δυνατοτήτων των ψηφιακών υλικών ΛΔΧ, λόγω της εστίασης των θεωρητικών πλαισίων που αναλύθηκαν στην παρούσα διπλωματική, σε παρόμοια υλικά.

Στην συνέχεια, τα πλαίσια που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενη φάση, εφαρμόστηκαν σε συγκεκριμένο πλήθος μικροπειραμάτων, του διαδικτυακού αποθετηρίου Φωτόδεντρο. Η ανάλυση αυτή είχε στόχο, αρχικά την κατηγοριοποίηση των μικροπειραμάτων, και στην συνέχεια την ανάδειξη της παιδαγωγικής αξιοποίησης αυτών, στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Κατά την κατηγοριοποίηση του αρχικού πλήθους των 187 μικροπειραμάτων, παρατηρήθηκε η χρήση του ΛΔΧ, από το μεγαλύτερο πλήθος αυτών. Έτσι η κατηγοριοποίηση συνεχίστηκε για τα 93 μικροπειράματα του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (ΛΔΓ) (Geogebra). Επιπλέον, η επιλογή των συγκεκριμένων μικροπειραμάτων, είχε στόχο την ανάδειξη του τρόπου προσέγγισης των μαθηματικών δραστηριοτήτων, όπως αυτής της «απόδειξης και εικασίας», από το μικροπείραμα, μέσω των δυνατοτήτων του ΛΔΓ. Παράλληλα, να σημειωθεί ότι, οι λειτουργίες του συρσίματος, χρησιμοποιήθηκαν, στο μεγαλύτερο μέρος τους, για την επαλήθευση κάποιας εικασίας. Στην συνέχεια, έγινε ποιοτική ανάλυση 8 μικροπειραμάτων, τα οποία επιλέχθηκαν βάση της μαθηματικής δραστηριότητας που εμπεριείχαν, των λειτουργιών συρσίματος που εμφάνιζαν (Trgalova & Jahn, 2013), αλλά και του επιπέδου ενσωμάτωσης του ΛΔΓ (Laborde, 2002).

Μαθηματική δραστηριότητα	Μικροπειράματα	Κατασκευές	Λειτουργίες συρσίματος	Επίπεδο ενσωμάτωσης
Απόδειξη και εικασία (Α.Ε.)	Προβολές χορδών στη διάμετρο κύκλου [1]	Ανθεκτική	2	2
	Πολυγωνική σπείρα [2]	Ανθεκτική	-	3
	Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη [3]	Ανθεκτική	3	2
	Μία ιδιότητα της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων [4]	Ανθεκτική	2	3
Διερεύνηση μοντέλου (Δ.Μ.)	Κατασκευάζοντας το είδωλο του σκοτεινού θαλάμου [5]	Ανθεκτική	1	4
Έλεγχος γεωμετρικών ιδιοτήτων (Ε.Γ.Ι)	Διερεύνηση συνάρτησης που δημιουργείται από το εμβάδον [6]	Ανθεκτική	-	4
	Προσεγγίζοντας το μήκος του κύκλου [7]	Ανθεκτική	-	4
Κατασκευές (Κ)	Εγγραφή κανονικού δεκαγώνου [8]	Εύπλαστη	-	1

Πίνακας 8: Γενικά στοιχεία από την ποιοτική ανάλυση των χαρακτηριστικών των μικροπειραμάτων

Ένα μέρος των μικροπειραμάτων που αναλύθηκαν, εμφάνισαν καινοτομία στον τρόπο προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών, αλλά και στην εφαρμογή των ψηφιακών εργαλείων του ΛΔΧ. Ειδικότερα, με το μικροπείραμα [6] αναδείχθηκαν τρόποι διασύνδεσης μαθηματικών εννοιών, γεωμετρίας και άλγεβρας, μέσω μιας ειδικής λειτουργίας, στην οποία γίνεται αναφορά στην ανάλυση, ενώ οι εκπαιδευτικοί στόχοι εξελίχθηκαν και εμφανίστηκε εκτεταμένη διερευνητική μάθηση. Παράλληλα το μικροπείραμα [7], ενισχύει τις οπτικές αναπαραστάσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, για την δυναμική προσέγγιση του μήκους κύκλου, ενώ ο δυναμικός χειρισμός που παρέχει ο δρομέας παρουσιάζει αναπαραστάσεις, με τις οποίες ο μαθητής έχει την δυνατότητα να αναπτύξει διάφορες μαθηματικές ιδέες, όπως αυτής του ορίου. Το μικροπείραμα [5], δίνει την ευκαιρία στους μαθητές, να διερευνήσουν ένα τρισδιάστατο μαθηματικό αντικείμενο, το οποίο βασίζεται στις λειτουργίες και τους περιορισμούς ενός πραγματικού μοντέλου, αυτού του σκοτεινού θαλάμου.

Όσον αφορά τα επίπεδα ενσωμάτωσης του ΛΔΓ (Laborde, 2002), τα επιλεγμένα μικροπειράματα είχαν στο πλήθος τους ανεπτυγμένο επίπεδο ενσωμάτωσης της τεχνολογίας, όμως επιλέχτηκε και μικρό πλήθος μικροπειραμάτων με κατώτερο επίπεδο, ώστε να γίνουν διακριτές οι διαφοροποιήσεις που εμφανίζονται μεταξύ αυτών. Το μικροπείραμα [8] παρουσίασε 1^ο επίπεδο ενσωμάτωσης τεχνολογίας, καθώς παρέχει δυνατότητες για κατασκευή γεωμετρικού αντικειμένου, όμως ο έλεγχος των γεωμετρικών ιδιοτήτων, λόγω της έλλειψης των λειτουργιών του συρσίματος, δεν διαφέρει από αυτόν που θα έκανε ο μαθητής σε περιβάλλον Χ-Μ. Στην συνέχεια, το μικροπείραμα [1], εμφανίζει 2^ο επίπεδο ενσωμάτωσης του ΛΔΓ, καθώς παρέχει δυνατότητες για εύρεση σχέσεων μέσω την

χρήσης του συρσίματος, ενώ εστιάζει σε μεγάλο βαθμό, στις μετρήσεις που παρέχει η ανατροφοδότηση, για την ανάπτυξη εικασιών από τους μαθητές.

Στα μικροπειράματα που εμφάνισαν το 3^ο και 4^ο επίπεδο ενσωμάτωσης, παρατηρήθηκε ανεπτυγμένη παιδαγωγική αξιοποίηση των δυνατοτήτων τους, καθώς έγινε αποτελεσματικότερη αξιοποίηση των λειτουργιών του ΛΔΧ. Για παράδειγμα, στα μικροπειράματα [4] και [5], οι δοθείσες δραστηριότητες και ανατροφοδοτήσεις, ωθούν τον μαθητή στην εφαρμογή των ψηφιακών εργαλείων, για την παρατήρηση των διαφόρων λειτουργιών των αναπαραστάσεων. Ένα ακόμα παράδειγμα, είναι τα μικροπειράματα [2], [6] και [7], στα οποία ο μαθητής καλείται για την παρατήρηση μιας αλληλουχίας αναπαραστάσεων, οι οποίες διευκολύνουν τον ίδιο, για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονταν σε αυτήν.

Η έλλειψη λειτουργιών συρσίματος, δεν εμποδίζει απαραίτητα την αξιοποίηση των λειτουργιών του ΛΔΧ, για την επέκταση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων των μικροπειραμάτων. Ο δυναμικός χειρισμός που αποσκοπεί στην ανάπτυξη εικασιών από τους μαθητές και στην επέκταση της διερευνητικής μάθησης, γίνεται μέσω των λειτουργιών ενός ψηφιακού εργαλείου του ΛΔΓ, των δρομέων. Επομένως, εμφανίζονται μικροπειράματα, τα οποία δεν παρουσίασαν λειτουργίες του συρσίματος, αλλά το επίπεδο ενσωμάτωσης ΛΔΓ ήταν αναπτυγμένο. Ειδικότερα τα μικροπειράματα [6] και [7] δεν εμφάνισαν δυνατότητες για λειτουργίες συρσίματος, εντούτοις η ενσωμάτωση των ΛΔΓ, αναγνωρίζεται στο 4^ο επίπεδο.

Επιπροσθέτως, ενώ η αξιοποίηση των λειτουργιών του ΛΔΓ (Trgalova κ.ά., 2010), ενός μικροπειράματος, μπορεί να εμφανίζεται σε μεγάλο βαθμό, το επίπεδο ενσωμάτωσης της τεχνολογίας, μπορεί να μην αναγνωρίζεται ως το ανώτατο. Ειδικότερα το μικροπείραμα [3], περιέχει πλήθος δυνατοτήτων αξιοποίησης των λειτουργιών του ΛΔΓ, όπως η χρήση των λειτουργιών του συρσίματος για εμφάνιση ανατροφοδοτήσεων και διευκόλυνση του μαθητή στην παραγωγή εικασιών, εντούτοις υπάρχουν στοιχεία τα οποία κατατάσσουν το μικροπείραμα στο 2^ο επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, στο μικροπείραμα αυτό, η ανάπτυξη εικασιών για την κατασκευή της απόδειξης, εισέρχεται μέσω των διαφόρων μετρήσεων, που ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει, ενώ από τον ίδιο ζητάτε να μεταβεί σε περιβάλλον X-M, για την ολοκλήρωση αυτής.

Στα μικροπειράματα της κατηγορίας «απόδειξη και εικασία», η ανάλυση εστίασε και στον τρόπο προσέγγισης της γεωμετρικής απόδειξης. Ειδικότερα, στο μικροπείραμα [2] η ανάπτυξη της γεωμετρικής απόδειξης από τον μαθητή, γίνεται με πλήθος ανατροφοδοτήσεων, με τις οποίες ο ίδιος μπορεί να αναγνωρίσει τις διάφορες γεωμετρικές σχέσεις, οι οποίες δημιουργούν το ζητούμενο σχήμα. Επιπλέον, το μικροπείραμα [3] εστίαστηκε στην απόδειξη της γεωμετρικής σχέσης, την οποία ο μαθητής μπορεί να προσεγγίσει μέσω της δυναμικής αναπαράστασης, ενώ απαιτείται από τον ίδιο η σύνθεση των γεωμετρικών του γνώσεων για την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων αυτής. Εντούτοις, η ανάπτυξη της απόδειξης στο μικροπείραμα αυτό, δεν γίνεται με ευκολία από τον μαθητή, καθώς απαιτείται από τον ίδιο, η αναγνώριση πλήθους γεωμετρικών σχημάτων και ιδιοτήτων της αναπαράστασης, ώστε να διακρίνει έναν αποτελεσματικό τρόπο απόδειξης της ζητούμενης σχέσης. Επομένως, στην τρίτη φάση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, γίνεται προσπάθεια για τροποποίηση αυτών των στοιχείων, ώστε ο μαθητής να έχει περισσότερες ευκαιρίες για αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων, που συνθέτουν την σχέση αυτή.

Επιπλέον γίνεται αναφορά στις αλληλεπιδράσεις που εμφανίζονται στο πλήθος των μικροπειραμάτων (Sedig & Sumner, 2006). Παρατηρήθηκε ότι το μεγαλύτερο πλήθος των μικροπειραμάτων εμφάνισε την αλληλεπίδραση «Φιλτράρισμα», καθώς το εργαλείο του ΛΔΧ, κουμπί, συχνά αξιοποιείται στα μικροπειράματα και παρέχει την αλληλεπίδραση αυτή. Επιπλέον, η αλληλεπίδραση «Παραγωγή κίνησης», εμφανίζεται μόνο στο μικροπείραμα [2], με την οποία γίνεται εμφάνιση κινουμένου

σχεδίου, για την ανάδειξη του τρόπου κατασκευής της πολυγωνικής σπείρας (Πίνακας 9). Να σημειωθεί ότι οι αλληλεπιδράσεις «Σπάσιμο σε κομμάτια», «Κόψιμο», «Κατακερματισμός», «Διαμόρφωση της εικόνας» και «Οριοθέτηση του πεδίου», δεν εμφανίζονται στην παρούσα ανάλυση των μικροπειραμάτων.

Αλληλεπίδραση	Μικροπειράματα							
	Α.Ε.				Δ.Μ.	Ε.Γ.Ι.		Κ
	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
Παραγωγή κίνησης		-						
Σχολιασμός		-	-		-	-	-	-
Φιλτράρισμα	-	-	-		-	-	-	-
Διερεύνηση	-	-	-	-	-	-	-	-
Αναδιοργάνωση	-		-	-	-	-	-	
Αναζήτηση	-	-	-	-	-	-	-	-
Σύνθεση					-			-

Πίνακας 9: Αλληλεπιδράσεις που εμφανίζονται στα μικροπειράματα

Σε τρίτη φάση, η έρευνα εστιάζει στον τρόπο που μπορούν να αξιοποιηθούν τα προαναφερθέντα στοιχεία, ώστε να είναι εμφανής η ενίσχυση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων της, αλλά και της διερευνητικής μάθησης, η οποία θα επιτευχθεί μέσω των πιθανών μεταβολών στον σχεδιασμό των μικροπειραμάτων. Η ανάλυση των χαρακτηριστικών που έγινε σε προηγούμενη φάση, ανέδειξε στοιχεία τα οποία επιδέχονταν αλλαγή. Η τροποποίηση αυτή, ξεκίνησε από την αναγνώριση μιας ανθεκτικής κατασκευής και την μεταβολή αυτής σε εύπλαστη (Healy, 2000). Η επιβολή των λειτουργιών του συρσίματος στο σημείο Α, της αρχικής αναπαράστασης, εφαρμόστηκε για τον έλεγχο της διατήρησης των συνθηκών, ενώ στο τροποποιημένο οι λειτουργίες βασίζονται στην ανάπτυξη εικασιών, από τους μαθητές (Trgalova & Jahn, 2013). Επιπλέον, η παρότρυνση του μαθητή για την εφαρμογή των ειδικών εργαλείων του ΛΔΓ, σε όλο το εύρος του μικροπειράματος, ενισχύει την πρόσθετη αξία του λογισμικού (Trgalova κ.ά., 2010) και παρέχει δυνατότητες για αύξηση του επιπέδου ενσωμάτωσης του ΛΔΓ (Laborde, 2002). Τέλος, επισημαίνεται ότι, η τροποποίηση στηρίχθηκε και στον τρόπο που εισάγεται η απόδειξη της γεωμετρικής σχέσης, για τον μαθητή. Η πρόσθεση ενός νέου ερωτήματος, ωθεί τον μαθητή για την προσέγγιση της απόδειξης, με την βοήθεια των διαθέσιμων εργαλείων του λογισμικού, ενώ οι λειτουργίες του αξιοποιούνται για την διάκριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων. Επομένως, η τροποποίηση του μικροπειράματος «Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη», παρέχει δυνατότητες για ενίσχυση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων του.

Βασικό στοιχείο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ήταν η σύνθεση πλαισίου αποτίμησης των χαρακτηριστικών των μικροπειραμάτων, για την ανάδειξη των παιδαγωγικών δυνατοτήτων τους. Η διάκριση αυτή, παρέχει δυνατότητες για αναγνώριση των προαναφερθέντων στοιχείων, από τον εκπαιδευτικό που μελετά ένα ψηφιακό υλικό, ο οποίος στην συνέχεια, προοικονομεί για την τροποποίηση αυτού, ώστε να παρέχει δυνατότητες για παιδαγωγική αξιοποίηση του και επέκταση της διερευνητικής μάθησης. Επιπροσθέτως, η εφαρμογή αυτού του πλαισίου αξιολόγησης, για τα χαρακτηριστικά των μικροπειραμάτων, έχει στόχο την ανάπτυξη των παιδαγωγικών τους δυνατοτήτων, με τις οποίες η υποδομή του Φωτόδεντρου, θα εξελιχθεί.

Οι περιορισμοί τις παρούσας έρευνας, αναδύονται από το πλήθος των υπαρχόντων θεωρητικών πλαισίων, με το οποίο η σύνθεση ενός ενιαίου πλαισίου, εμφάνισε δυσκολίες. Τα θεωρητικά πλαίσια της, έως τώρα, βιβλιογραφίας της Διδακτικής των Μαθηματικών, προσεγγίζουν με διαφορετικό τρόπο την ανάδειξη των δυνατοτήτων παιδαγωγικής αξιοποίησης ενός ψηφιακού υλικού, με αποτέλεσμα η παραγωγή ενός ενιαίου πλαισίου για την ανάλυση των χαρακτηριστικών αυτών, να δυσκολεύει την αξιολογική διαδικασία. Για παράδειγμα, θεωρητικά πλαίσια όπως των Trgalova κ.ά. (2010), επικεντρώθηκαν στην αναγνώριση των λειτουργιών του συρσίματος, ενώ κατά την

κατηγοριοποίηση και την ποιοτική ανάλυση των μικροπειραμάτων, της παρούσας διπλωματικής εργασίας, δεν εμφανίστηκαν τέτοιες δυνατότητες. Ένας ακόμα περιορισμός, εμφανίζεται κατά την κατηγοριοποίηση των μικροπειραμάτων, βάση των μαθηματικών δραστηριοτήτων που ενυπάρχουν σε αυτά. Οι κατηγορίες αυτές ήταν γενικές, οπότε μερικά μικροπειράματα περιείχαν μαθηματικές δραστηριότητες, που άνηκαν σε διαφορετικές κατηγορίες. Τέλος, η τροποποίηση ενός μικροπειράματος, απαιτεί χρόνο από τεχνολογική και παιδαγωγική άποψη, ενώ οι σχεδιαστικές επιλογές, μπορεί να μη προωθήσουν σε μέγιστο βαθμό, την αξιοποίηση των παιδαγωγικών δυνατοτήτων του μικροπειράματος, αλλά και την διερευνητική μάθηση.

Η πρόταση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εστιάζεται στην ανάλυση της ποιότητας και των δυνατοτήτων των ψηφιακών υλικών, όπως των μικροπειραμάτων, με στόχο την ανάδειξη της παιδαγωγικής αξιοποίησης αυτών, αλλά την τροποποίηση των ήδη υπαρχόντων, η οποία μπορεί να επιτευχθεί από τους εκπαιδευτικούς των Μαθηματικών. Προτείνεται η ανάπτυξη ενός ενιαίου πλαισίου ανάλυσης των χαρακτηριστικών ενός ψηφιακού υλικού, το οποίο θα είναι εγκεκριμένο από το σύστημα στο οποίο θα εφαρμόζεται. Επιπλέον, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός, ο οποίος θα αναλύει το εκάστοτε ψηφιακό υλικό ή ακόμα θα το τροποποιεί, να μπορεί να δημοσιεύει τα αποτελέσματά του, σε ειδική διαδικτυακή πλατφόρμα, ώστε να είναι εφικτή η παρουσίαση των μετατροπών, του ψηφιακού υλικού. Η χρήση αξιολογικών κριτηρίων και η περιγραφή των δυνατοτήτων των ψηφιακών υλικών μιας πλατφόρμας (π.χ. Φωτόδεντρο), δίνει ευκαιρίες για διαρκής βελτίωση των ψηφιακών υλικών (π.χ. μικροπειραμάτων), ενώ γίνεται ευκολότερη η εύρεση αυτών και η αναγνώριση της ποιότητας τους.

Οι ανωτέρω προτάσεις, στοχεύουν στην εξέλιξη των ψηφιακών υλικών, καθώς και στην επαγγελματική εξέλιξη του εκπαιδευτικού. Οι σύγχρονες αντιλήψεις της Διδακτικής των Μαθηματικών, αλλά και οι ανάγκες της Μαθηματικής εκπαίδευσης χρειάζονται εκπαιδευτικούς που είναι αναστοχαζόμενοι επαγγελματίες και σχεδιαστές εκπαιδευτικού υλικού, οι οποίοι θα συμμετέχουν στον μετασχηματισμό του μοντέλου της μαθηματικής εκπαίδευσης (Κυνηγός και Διαμαντίδης, 2014). Επομένως, η παρούσα διπλωματική εργασία, στοχεύει και στην προσφορά εργαλείων στον εκπαιδευτικό, ώστε να μπορεί ο ίδιος, να αναγνωρίζει τις δυνατότητες ενός μικροπειράματος για την παιδαγωγική αξιοποίηση αυτών, ενώ η πιθανή τροποποίηση του μικροπειράματος για την ανάπτυξη των παιδαγωγικών δυνατοτήτων του και την επέκταση της διερευνητικής μάθησης (documental genesis, Guin & Trouche, 1999), να είναι επηρεασμένη από το πλαίσιο που προτάθηκε.

7. Βιβλιογραφία

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205-224.
- Ainley, J., & Pratt, D. (2002). Purpose and utility in pedagogic task design. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 2-017).
- Ainley, J., & Pratt, D. (2002). Purpose and utility in pedagogic task design. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 2-017).
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction*, 16(3), 183-198.
An ICMI Study, 121-128.
- Artigue, M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational studies in mathematics*, 33(2), 133-169.
- Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of the GDM. Potsdam*.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. In *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 131-158). Springer Berlin Heidelberg.
- Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. In *colloque" Vingt ans de didactique des mathématiques en France", 15-17 juin 1993* (pp. 364-370). La Pensée Sauvage.
- Boyle, T. (1997). *Design for multimedia learning*. Prentice-Hall, Inc..
- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). *Dordrecht, NL: Kluwer*.
- Card, S., MacKinlay, J. and Shneiderman, B. (1999). *Readings in Information Visualization: Using Vision to Think*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.
- Chaachoua, H., Nicaud, J. F., Bronner, A., & Bouhineau, D. (2004). Aplusix, a learning environment for algebra, actual use and benefits. In *ICME 10: 10th International Congress on Mathematical Education, July 4-11, 2004* (p. 8).

- Chaachoua, H., Nicaud, J. F., Bronner, A., & Bouhineau, D. (2004). Aplusix, a learning environment for algebra, actual use and benefits. In *ICME 10: 10th International Congress on Mathematical Education, July 4-11, 2004* (p. 8).
- Cheng, P. (2002). Electrifying diagrams for learning: Principles for complex representational systems. *Cognitive Science* 26: 685–736.
- Chevallard, Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (pp. 183–203). Paris: Presses Universitaires de France.
- Cooper, B., & Dunne, M. (2000). Constructing the 'legitimate' goal of a 'realistic' maths item. *Assessment: Social practice and social product*, 87.
- Cuoco, A.A. and F.R., Curcio, (Eds.) (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. Excerpt from Introduction to de Villiers, M. (1999). *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press.
- diSessa, A. (2000). *Changing minds, computers, learning and literacy*. Cambridge, MA, USA: MIT Press.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Van Gisbergen, S., & Gravemeijer, K. (2007, February). Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function. In *Proceedings of the V Congress of the European society for research in mathematics education CERME5* (pp. 1389-1398).
- Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. In *Secondary algebra education* (pp. 5-26). SensePublishers.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23-49.
- Dubinsky, E., & Tall, D. (2002). Advanced mathematical thinking and the computer. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 231-248). Springer Netherlands.
- Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 317-333.
- Fischer, G., & Ostwald, J. (2001). Problems, promises, realities, and challenges. *IEEE Intelligent systems*, 60-72.
- Fischer, G., & Ostwald, J. (2005). Knowledge communication in design communities. In *Barriers and biases in computer-mediated knowledge communication* (pp. 213-242). Springer US.

- Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag.*
- Flamand, P., & Gervais, A. (2004). Les objets d'apprentissage: au-delà de la technologie, la pédagogie. *Le bulletin Clic*, 54, 1-5.
- Gadanidis, G., Sedig, K., & Liang, H. N. (2004). Designing online mathematical investigation. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 23, 275-298.
- Glasgow, J., Narayanan, N.H. and Chandrasekaran, A.B., (Eds.) (1995). *Diagrammatic Reasoning: Cognitive and Computational Perspectives*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Gobet, F., Lane, P. C., Croker, S., Cheng, P. C., Jones, G., Oliver, I., & Pine, J. M. (2001). Chunking mechanisms in human learning. *Trends in cognitive sciences*, 5(6), 236-243.
- Golledge, R.G. (1999). Human wayfinding and cognitive maps. In R.G. Golledge (Ed.), *Wayfinding Behavior: Cognitive Mapping and Other Spatial Processes* (pp. 5–45). Baltimore, London: The Johns Hopkins University Press.
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2013). Collective work with resources: an essential dimension for teacher documentation. *ZDM*, 45(7), 1003-1016.
- Guin, D. and Trouche, L. (1999) The complex process of converting tools in to mathematical instruments: The case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-2), 5-23.
- Hansen, Y.M. (1999). Graphic tools for thinking, planning, and problem solving. In R. Jacobson (Ed.), *Information Design* (pp. 193–221). Cambridge, MA: The MIT Press.
- Harel, I. E., & Papert, S. E. (1991). *Constructionism*. Ablex Publishing.
- Haspekian, M. (2005). An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International journal of computers for mathematical learning*, 10(2), 109-141.
- Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1(3), 263-291.
- Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. *Document resume*, 138.

- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63-76.
- Healy, L., Hoyles, C., & Laborde, J. M. (2001). Teaching and learning dynamic geometry. *Editorial in the special issue on the subject in the IJCML*, 6(3).
- Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Algebra and function development. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 1, 55-108.
- Hennessy, S., Ruthven, K., & Brindley, S. (2005). Teacher perspectives on integrating ICT into subject teaching: commitment, constraints, caution, and change. *Journal of curriculum studies*, 37(2), 155-192.
- Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. In *Proceedings of the sixth congress of the European society for research in mathematics education*. Lyon: Institute Nationale De Recherche Pédagogique.
- Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations—a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(1), 63-86.
- Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villiani (eds). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*.
- Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 1-17). Springer Berlin Heidelberg.
- Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P., & Roschelle, J. (2013). Cornerstone mathematics: designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM*, 45(7), 1057-1070.
- Johnston-Wilder, S., & Pimm, D. (2005). Some technological tools of the mathematics teacher's trade. *Teaching secondary mathematics with ICT*, 18-39.
- Jonassen, D.H., Beissner, K. and Yacci, M., (Eds.) (1993). *Structural Knowledge: Techniques for Representing, Conveying, and Acquiring Structural Knowledge*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 55-85.
- Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world*. Routledge. Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, 36, 1-11.

- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York, NY: Simon and Schuster Macmillan.
- Keisoglou S. and Kynigos, C. (2006) Measurements With A Physical And A Virtual Quadant: Students' Understandings Of Trigonometric Tangent. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education* 3-425-432, Novotna J., Moraova H., Kratka Mm & Stehlikova N. (Eds), Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Keitel-Kreidt, C., & Ruthven, K. (Eds.). (2012). *Learning from computers: Mathematics education and technology* (Vol. 121). Springer Science & Business Media.
- Keitel-Kreidt, C., & Ruthven, K. (Eds.). (2012). *Learning from computers: Mathematics education and technology* (Vol. 121). Springer Science & Business Media.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In *Proceedings of the eleventh conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 11). Volume 1* (pp. 3-27). University of Montréal.
- Komatsu, K., & Tsujiyama, Y. (2013). Principles of task design to foster proofs and refutations in mathematical learning: Proof problem with diagram. *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study, 22*, 471-479.
- Kortenkamp, U., Blessing, A. M., Dohrmann, C., Kreis, Y., Libbrecht, P., & Mercat, C. (2009, January). Interoperable interactive geometry for europe—first technological and educational results and future challenges of the intergeo project. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 1150-1160).
- Kortenkamp, U., Dohrmann, C., Kreis, Y., Dording, C., Libbrecht, P., & Mercat, C. (2009, July). Using the intergeo platform for teaching and research. In *The Ninth International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 9)*.
- Kynigos, C. (2012). Niches for Constructionism: forging connections for practice and theory. In Proc. of Constructionism 2012 Conference, Athens, Greece
- Kynigos, C. (1995). We should not miss the chance: educational technology as a means expression and observation in general education. *Greek education, perspectives of reformulation and modernization*, 396-416.
- Kynigos, C. (2004). A "black-and-white box" approach to user empowerment with component computing. *Interactive Learning Environments*, 12(1-2), 27-71.
- Kynigos, C. (2006). The lesson of exploration. *Ellinika Grammata, Athens*.
- Kynigos, C. (2007). Half-baked logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education-An International Journal*, (Vol 6_2), 335-359.

- Kynigos, C. (2007). Using half-baked microworlds to challenge teacher educators' knowing. *International journal of computers for mathematical learning*, 12(2), 87-111.
- Kynigos, C. (2014) Book Review: *The Mathematics Teacher in the Digital Era*, DOI: 10.1007/s10758-014-9219-3. *Journal of Technology, Knowledge and Learning*, Springer, Dordrecht.
- Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?. In *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 417-438). Springer International Publishing.
- Kynigos, C. and Gavrilis, S. (2006) Constructing A Sinusoidal Periodic Covariation. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Education* 4-9-16, Novotna J., Moraova H. Kratka Mm & Stehlikova N. (Eds), Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 Year-Olds' Meanings around Intrinsic Curves with a Medium for Symbolic Expression and Dynamic Manipulation. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 165-172.
- Kynigos, C., & Psycharis, G. (2009). Investigating the role of context in experimental research involving the use of digital media for the learning of mathematics: Boundary objects as vehicles for integration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14(3), 265-298.
- Kynigos, C., Bardini, C., Barzel, B., & Maschietto, M. (2007). Tools and technologies in mathematical didactics. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1332-1338).
- Kynigos, C., Philippou, G., Potari, D. Sakonidis, H. (2009). *Research in mathematics education in Greece and Cyprus*. In Proceedings of the PME33, v.1, 303-322.
- Kynigos, C., Psycharis, G., & Moustaki, F. (2010). Meanings Generated While Using Algebraic-Like Formalism to Construct and Control Animated Models. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(1).
- Laborde C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez, P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers, 2
- Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions. In Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics, pp.22–35, Korea, *National University of Education*.

- Laborde, C. (2007). The role and uses of technologies in mathematics classrooms: Between challenge and *modus vivendi*. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 7(1), 68-92.
- Laborde, C., & Laborde, J. M. (2012). *Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that mean*, Université Joseph Fourier, Grenoble, France
Cabrilog, Grenoble, France
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 275-304.
- Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: a case of proof by contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(2), 145-165.
- Lins, B. (2003). Actual meanings, possible uses: Secondary mathematics teachers and Cabri-géometre. *CERME-3*. http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_Lins_cerme3.pdf.
- Mahé, A., & Noël, E. (2006). Description et évaluation des ressources pédagogiques: quels modèles?. *ISDM: Information Science for Decision Making*, (25).
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 25-53.
- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 87-125.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179-196.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
- Paivio, A. (1983). The empirical case for dual coding. In J.C. Yuille (Ed.), *Imagery, Memory and Cognition*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc..
- Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, 36, 1-11.
- Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational psychologist*, 20(4), 167-182.

- Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational psychologist*, 20(4), 167-182.
- Peper, R. J., & Mayer, R. E. (1986). Generative effects of note-taking during science lectures. *Journal of Educational psychology*, 78(1), 34.
- Peterson, D., (Eds.) (1996). *Forms of Representation*. Exeter, UK: Intellect Books.
- Pettersson, R. (1989) *Visuals for Information Research and Practice*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains.
- Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2005). Incorporating Internet resources into classroom practice: pedagogical perspectives and strategies of secondary-school subject teachers. *Computers & Education*, 44(1), 1-34.
- Sareni, B., Krähenbühl, L., Beroual, A., Nicolas, A., & Brosseau, C. (1997). A boundary integral equation method for the calculation of the effective permittivity of periodic composites. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2 Part 2), 1580-1583.
- Scher, D., & Goldenberg, E. P. (2001). A multirepresentational journey through the law of cosines. *The roles of representation in school mathematics*, 117-128.
- Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational studies in mathematics*, 29(3), 259-291.
- Sedig, K., & Morey, J. (2005). 17 A descriptive framework for designing interaction for visual abstractions. *Studies in Multidisciplinarity*, 2, 239-254.
- Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(1), 1-55.
- Sedig, K., Rowhani, S., Morey, J. and Liang, H. (2003). Application of information visualization techniques to the design of a mathematical mindtool: A usability study. *Information Visualization* 2(3): 142–160.
- Sherman, W. R., & Craig, A. B. (2003). Understanding Virtual Reality—Interface, Application, and Design. *Presence*, 12(4), 441-442.
- Sinclair, N., Arzarello, F., Gaisman, M., Lozano, M., Dagiene, M., Behrooz, E., & Jackiw, N. (2010). In C. Hoyles & J-B. Lagrange (Eds.) *Mathematics education and technology—Rethinking the terrain* (pp. 61–78). New York, NY: Springer.
- Son, J. W., & Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46.

- Spence, R. (1999). A framework for navigation. *International Journal of Human-Computer Studies* 51: 919–945.
- Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking (Vol. 11). *Springer Science & Business Media*.
- Thomas, M. O., & Lin, C. (2013). Designing tasks for use with digital technology. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, 109.
- Trgalova, J., & Chaachoua, H. (2009). Relationship between design and usage of educational software: the case of Aplusix. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1429-1438).
- Trgalová, J., & Jahn, A. P. (2013). Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. *ZDM*, 45(7), 973-986.
- Trgalova, J., Jahn, A. P., & Soury-Lavergne, S. (2009, January). Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6).
- Trouche, L. (1996). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un «environnement calculatrice», ETUDE DES RAPPORTS ENTRE PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION ET PROCESSUS D'INSTRUMENTATION* (Doctoral dissertation).
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 9, 281–307.
- Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (2012). Technology-driven developments and policy implications for mathematics education. In *Third international handbook of mathematics education* (pp. 753-789). Springer New York.
- Vergnaud, G. (1998). Towards a cognitive theory of practice. In *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 227-240). Springer Netherlands.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.
- Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite Frant, J., Doorman, M., Kieran, C., ... & Yang, Y. (2012). Task design in mathematics education. *Proceedings of ICMI Study*, 22, 17-23.
- Winn, W. (1993). A conceptual basis for educational applications of virtual reality. *Technical Publication R-93-9, Human Interface Technology Laboratory of the Washington Technology Center, Seattle: University of Washington*.

Zhang, J. (1997). The nature of external representations in problem solving. *Cognitive Science* 21(2): 179–217.

ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ (2008). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*, ΙΤΥ, Αθήνα

Καλογερία, Ε., Κυνηγός, Χ. & Περυσινάκη Ε. (2014). ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ 'ΝΕΑ' ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ, 50 Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ. Φλώρινα.

Κυνηγός, Χ. & Διαμαντίδης, Δ. (2014). Διασκευάζοντας μικροπειράματα του Ψηφιακού Σχολείου ως εφαλτήριο για τον εκπαιδευτικό: Μια περίπτωση σχεδιασμού γύρω από την εξίσωση. 1^ο Πανελλήνιο Συνέδριο :«Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες», Ρόδος

Κυνηγός, Χ., (2014). Εμπλουτισμός των Σχολικών Βιβλίων των Μαθηματικών για την υποστήριξη της μαθηματικής δράσης και εμπειρίας. *Ψηφιακό Σχολείο*, Άξονας Δράσης: Ψηφιακό Εκπαιδευτικό Περιεχόμενο. Υπ. Παιδείας και Θρησκευμάτων, Ε.Π. Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση, ΕΣΠΑ (2007 – 2013).

Μεγάλου, Ε. & Κακλαμάνης, Χ. (2015). Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία, Αποθετήρια Μαθησιακών Αντικειμένων «Φωτόδεντρο» και Ψηφιακή Εκπαιδευτική Πλατφόρμα e- me. 8^ο Πανελλήνιο Συνέδριο των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ, Σύρος

Φωτόδεντρο (2012). Από τη δημιουργία ψηφιακών πόρων για τον εμπλουτισμό των σχολικών βιβλίων στα Μαθησιακά Αντικείμενα του «Φωτόδεντρου». *Συνοπτικός οδηγός V1.0*, ΙΤΥΕ [2]

Φωτόδεντρο (2012). Δημιουργία Ταξινομιών για την περιγραφή της Θεματικής Περιοχής των μαθησιακών αντικειμένων του Ψηφιακού Αποθετηρίου. *Συνοπτικός οδηγός V1.0*, ΙΤΥΕ [4]

Φωτόδεντρο (2012). Εγχειρίδιο Πιστοποιημένων Χρηστών του Ψηφιακού Αποθετηρίου Μαθησιακών Αντικειμένων «Φωτόδεντρο». *Συνοπτικός οδηγός V1.0*, ΙΤΥΕ [1]

Φωτόδεντρο (2012). Εκπαιδευτικά Μεταδεδομένα του Ψηφιακού Αποθετηρίου Μαθησιακών Αντικειμένων. *Συνοπτικός οδηγός V1.0*, ΙΤΥΕ [3]

Ψυχάρης, Γ. (2005) Ανάπτυξη νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας σε προβλήματα αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών με χρήση ειδικών εργαλείων υπολογιστικής τεχνολογίας, Δημοσίευτη διδακτορική διατριβή, ΦΠΨ Αθηνών, Τομέας Παιδαγωγικής ΕΚΠΑ.

8 Παράρτημα

8.1 Κατηγοριοποίηση Sedig & Sumner

Αλληλεπίδραση	Περιγραφή	Εντολές/ Εργαλεία Διαδραστικού Γεωμετρικού λογισμικού (IGS)
Παραγωγή κίνησης (animating)	Παραγωγή κίνησης μέσα στην ψηφιακή αναπαράσταση	Δίνω κίνηση(Animating)
Σχολιασμός (annotating)	Σχολιασμός μιας ψηφιακής αναπαράστασης, με την τοποθέτηση σημειώσεων ή σημαδιών, σε αυτή	Τοποθέτηση ετικετών(Labeling), Δημιουργία κειμένου(Creating text), Αφήνω ίχνος (Tracing), Αλλαγή εμφάνισης (Changing appearance), Γράφει στο πρόχειρο (Scribbling)
Σπάσιμο σε κομμάτια (chunking)	Ομαδοποίηση ενός πλήθους όμοιων ή συσχετισμένων, αλλά ασύνδετων, οπτικών στοιχείων	Οργάνωση των εργαλείων (Organizing tools)
Σύνθεση (Composing)	Συνδυασμός διαχωρισμένων οπτικών στοιχείων για την δημιουργία μιας ψηφιακής αναπαράστασης	
Κόψιμο (cutting)	Αφαίρεση ανεπιθύμητων ή μη αναγκαίων ποσοτήτων από την ψηφιακή αναπαράσταση	Διαγραφή (deleting)
Φιλτράρισμα (Filtering)	Εμφάνιση ή απόκρυψη ή μετατροπή ενός επιλεγόμενου υποσυνόλου τω οπτικών στοιχείων μιας ψηφιακής αναπαράστασης, σύμφωνα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά ή κριτήρια.	Απόκρυψη/ Εμφάνιση (Hiding/ Showing), Αλλαγή εμφάνισης (Changing appearance), Καταστολή εντολών (Suppressing tools)
Κατακερματισμός (Fragmenting)	Η διάσπαση μιας ψηφιακής αναπαράστασης, σε συστατική ή στοιχειώδη μέρη	
Διερεύνηση (Probing)	Η εστίαση ή η εξβάθυνση, σε συγκεκριμένες πτυχές, ιδιότητες ή συστατικά μιας ψηφιακής αναπαράστασης, για περαιτέρω ανάλυση και εξαγωγή πληροφοριών.	Πληροφορίες αντικειμένων (Object information), Μέτρηση (Measuring), Αλλαγή κλίμακας (Changing scale)
Αναδιοργάνωση (rearranging)	Η αλλαγή της θέσης στο χώρο και ή της κατεύθυνσης των στοιχείων μέσα στην ψηφιακή αναπαράσταση.	Σύρσιμο (dragging), αναδιοργάνωση εργαλείων (rearranging tools)
Αναδιαμόρφωση (Repicture)	Η παρουσίαση της ψηφιακής αναπαράστασης, με εναλλακτικό τρόπο	
Οριοθέτηση του πεδίου (Scoping)	Η αλλαγή του βαθμού ορατότητας της κατασκευής ή ανακατασκευής μιας ψηφιακής αναπαράστασης, με την προσαρμογή του οπτικού πεδίου.	Επανάληψη διαδικασίας κατασκευής(Replaying construction), Εργαλείο επανάληψης/ αναίρεσης(Do/Undo)
Αναζήτηση (Searching)	Η αναζήτηση για την ύπαρξη ή την τοποθεσία, συγκεκριμένων ιδιοτήτων ή στοιχείων ή δομών μέσα σε μια ψηφιακή αναπαράσταση.	Έρευνα για εργαλεία κτλ.

8.2 Μικροπειράματα

8.2.1 Μικροπειράματα- Κεφάλαιο 9

Αρχεία	Επίπεδα ενσωμάτωσης	Μαθηματική δραστηριότητα				Κατασκευές	Σύρσιμο
		Κατ.1	Κατ.2	Κατ.3	Κατ.4		
b_lyk_geom_kef9_2_apodeiktikes_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_1_Eisagogi.ggb	1				1		
B_Lyk_Geom_kef9_2_apodeiktikes_askiseis_1.ggb	2	1				ανθεκτική	1
B_Lyk_Geom_kef9_2_apodeiktikes_askiseis_2.ggb	2	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_2_drastiriotita_1.ggb	1	1				εύπλαστη	-
B_Lyk_Geom9_2_Pythagoreio_Theorima.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_2_syntheta_themata_6.ggb	2	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom9_2_theoria.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_2_thm_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_2_thm_4.mwd	-						
B_Lyk_Geom9_3_Istoriko_Simeiwma.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_3_provlima_1_2_a.ggb	1			1		εύπλαστη	
B_Lyk_Geom_kef9_3_provlima_1_2_b.ggb	1			1		εύπλαστη	
B_Lyk_Geom_kef9_3_provlima_3.ggb	2			1		εύπλαστη	3
B_Lyk_Geom_kef9_4_ask_emp_a.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_4_ask_emp_b.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_4_askiseis_empedosis_1.ggb	2	1				ανθεκτική	3
B_Lyk_Geom9_4_paradeigma.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_4_syntheta_themata_3a.ggb	2	1				ανθεκτική	3
B_Lyk_Geom_kef9_4_syntheta_themata_3b.ggb	2	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_5_askiseis_empedosis_3.ggb	2	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_5_er_kat.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_7_apodeiktikes_askiseis_2.ggb	2	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_askiseis_empedosis_4.ggb	2	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_drast.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef9_7_drastiriotita_1.ggb	1	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_drastiriotita_2.ggb	1			1		ανθεκτική	3
B_Lyk_Geom_kef9_7_Ergasia.ggb	3	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_genikes_askiseis_5.ggb	2	1				ανθεκτική	3
B_Lyk_Geom_kef9_7_genikes_askiseis_7.ggb	3	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_syntheta_themata_3.ggb	2	1				ανθεκτική	1
B_Lyk_Geom_kef9_7_syntheta_themata_4.ggb	1	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_theorima_I.ggb	3	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_theorima_II.ggb	3	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef9_7_XrisiTomi_1.ggb	1	1				ανθεκτική	3
B_Lyk_Geom_kef9_7_XrisiTomi_2a.ggb	1		1			ανθεκτική	1
B_Lyk_Geom_kef9_7_XrisiTomi_2b.ggb	1			1		εύπλαστη	1
B_Lyk_Geom_kef9_7_XrisiTomi_2c.ggb	1			1		εύπλαστη	-

8.2.2 Μικροπείράματα –Κεφάλαιο 10

Αρχεία	Επίπεδα ενσωμάτωσης	Μαθηματική δραστηριότητα				Κατασκευές	Σύρσιμο
		Κατ.1	Κατ. 2	Κατ.3.	Κατ. 4		
B_Lyk_Geom_kef10_3_emb_parmou.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef10_4_efarm_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef10_5_gen_ask_7.mwd	-						
kef10_1_eigagogi.ggb	1				1	εύπλαστη	-
kef10_3_askisi_5_apodeiktikes.ggb	3	1				ανθεκτική	1
kef10_3_askisi_embada_e(x).ggb	3					ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_1.ggb	1				1	εύπλαστη	-
kef10_3_drasirotita_2.ggb	3	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_3.ggb	2			1		εύπλαστη	3
kef10_3_drasirotita_4.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_5.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_6.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_7.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_8.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_9.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_drasirotita_10.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef10_3_embada_basik_sximata.ggb	3		1			ανθεκτική	3
kef10_3_enbadon_paralelogram.ggb	2		1			ανθεκτική	2
kef10_5_askisi_1_syntheta_themata.ggb	1	1				ανθεκτική	2
kef10_5_logos_embadon_1.ggb	4		1			ανθεκτική	1
kef10_5_logos_embadon_2.ggb	4		1			ανθεκτική	2
kef10_6_tetragonismos_poligonou.ggb	4				1	ανθεκτική	-

8.2.3 Μικροπείράματα – Κεφάλαιο 11

Αρχεία	Επίπεδο ενσωμάτωσης	Μαθηματική δραστηριότητα				Κατασκευές	Σύρσιμο
		Κατ.1	Κατ. 2	Κατ.3	Κατ.4		
b_lyk_geom_kef11_1_epektasi_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_1_gonia_kanonikou_ngono_u.mwd	-						
b_lyk_geom_kef11_2_epektasi_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_3_nea_drastiriotita.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_4_askisi_empedosis_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_4_mikos_kyklou.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_4_nea_drastiriotita.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_5_nea_drastiriotita.mwd	-						
b_lyk_geom_kef11_6_epektasi_1.mwd	-						
B_Lyk_Geom_kef11_genikes_askisi_5.ggb	2	1				ανθεκτική	1
B_Lyk_Geom_kef11_genikes_askisi_7.ggb	3		1			ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef11_genikes_askisi_8.ggb	1	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef11_istoriko_a.ggb	4					ανθεκτική	2

B_Lyk_Geom_kef11_istoriko_b.ggb	4					ανθεκτική	1
B_Lyk_Geom_kef11_istoriko_c.ggb	4					ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef11_istoriko_d.ggb	4					ανθεκτική	2
kef11_1_kanonika_polygona.ggb	3	1				ανθεκτική	2
kef11_2_apodeiktikes_askisi_1.ggb	2	1				ανθεκτική	3
kef11_2_apodeiktikes_askisi_6.ggb	4	1				ανθεκτική	3
kef11_2_paratirisi.ggb	4		1			ανθεκτική	3
kef11_2_stoixeia_kanonikou_polygonou.ggb	3	1				ανθεκτική	1
kef11_2_synthetes_askisi_2_epektasi_1.ggb	1	1				ανθεκτική	2
kef11_2_synthetes_askisi_2_epektasi_2.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef11_2_theorima_1.ggb	4	1				εύπλαστη	1
kef11_3_drastiriotites.ggb	3			1		ανθεκτική	2
kef11_3_efarmogi_1.ggb	3			1		ανθεκτική	-
kef11_3_engrafi_kanonikon_polygonon.ggb	3			1		ανθεκτική	-
kef11_3_engrafi_oktagonoy_se_tetragono.ggb	2			1		ανθεκτική	3
kef11_4_mikos_kyklou.ggb	3		1			ανθεκτική	-
kef11_5_empedosis_askisi_1.ggb	1	1				ανθεκτική	2
kef11_5_synthetes_askisi_1.ggb	1		1			ανθεκτική	2
kef11_6_emvadon_kyklou.ggb	3		1			ανθεκτική	1
kef11_7_efarmogi_1.ggb	2	1				εύπλαστη	3
kef11_8_apodeiktikes_askisi_4.ggb	2	1				ανθεκτική	3
kef11_8_drastiriotita.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef11_8_empedosis_askisi_4.ggb	1	1				ανθεκτική	2
kef11_genikes_polygoniki_speira.ggb	3	1				ανθεκτική	-

8.2.4 Μικροπειράματα Κεφάλαιο 12

Αρχεία	Επίπεδα ενσωμάτωσης	Μαθηματική δραστηριότητα				Κατασκευές	Σύρσιμο
		Κατ. 1	Κατ. 2	Κατ. 3	Κατ. 4		
b_lyk_geom_kef_12_3_axioma_6.ggb	3			1		ανθεκτική	2
kef12_3_erotoseis_katanoisis_1.ggb	3		1			ανθεκτική	3
kef12_3_orismos_2_b.ggb	4		1			ανθεκτική	3
kef12_3_orismos_l.ggb	3		1			ανθεκτική	3
kef12_4_ask_1_apodeiktiki_a.ggb	3				1	ανθεκτική	1
kef12_4_ask_1_apodeiktiki_b.ggb	4	1				ανθεκτική	2
B_Lyk_Geom_kef12_4_ask_3_apodeiktiki.ggb	4	1				ανθεκτική	2
kef12_4_theorima_l.ggb	3	1				ανθεκτική	2
kef12_4_theorima_IV.ggb	2	1				ανθεκτική	2
kef12_4_Theorima_Thali.ggb	3	1				ανθεκτική	2
b_lyk_geom12.2_Anafealeosi.ggb	4				1	ανθεκτική	1

8.2.5 Μικροπειράματα – Κεφάλαιο 13

Αρχεία	Επίπεδα ενσωμάτωσης	Μαθηματική δραστηριότητα				Κατασκευές	Σύρσιμο
		Κατ 1	Κατ 2	Κατ 3	Κατ 4		
b_lyk_geom_kef13_4_anaptygma_kybou.ggb	4				1	ανθεκτική	3
b_lyk_geom_kef13_7_nea_askisi.ggb	4			1		ανθεκτική	2
b_lyk_geom_kef13_tomi_orthou_prismatos.ggb	4				1	ανθεκτική	2
b_lyk_geom_kef13_epanaliptiki_askisi.ggb	4			1		ανθεκτική	3
<i>Τα υπόλοιπα 71 μικροπειράματα, διεξάγονται με το πρόγραμμα « 3D Scratch»</i>							