**Θεωρία Πιθανοτήτων**
**Τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ**
**Εξέταση 15 Φεβρουαρίου 2024**

**Άσκηση 1**. Διαθέτουμε δύο κάλπες, Α και Β. Η Α περιέχει 9 σφαιρίδια αριθμημένα ως

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

(κάθε σφαιρίδιο έχει έναν ακριβώς αριθμό πάνω του) ενώ η Β περιέχει 13 σφαιρίδια αριθμημένα ως

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 4, 6, 8.$$

Δηλαδή, στη Β, σε κάθε ζυγό αριθμό του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ αντιστοιχούν 2 σφαιρίδια.

Φτιάχνουμε έναν πενταψήφιο αριθμό καθορίζοντας τα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά.

Για τα ερωτήματα (α)-(δ) η διαδιακασία είναι η εξής. Για τον καθορισμό κάθε ψηφίου επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από τον κάλπη Α, σημειώνουμε το ψηφίο που γράφει πάνω και το επιστρέφουμε στην κάλπη. Υπολογίστε τις πιθανότητες στον πενταψήφιο αριθμό που θα κατασκευαστεί:

(**α**) Όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικά.

(**β**) Να μην υπάρχουν δύο διαδοχικά ψηφία ίσα.

(**γ**) Να εμφανίζεται το 2 ακριβώς μία φορά και το 4 ακριβώς 2 φορές.

(**δ**) Τα ψηφία να αποτελούν γνησίως αύξουσα ακολουθία. Π.χ., όπως στον αριθμό 24589.

Για τα ερωτήματα (ε)-(η) η διαδιακασία είναι η εξής. Επιλέγουμε πρώτα στην τύχη μία από τις κάλπες (πιθανότητα 1/2 για καθεμία) και έπειτα με αυτή την κάλπη καθορίζουμε τον αριθμό όπως στα προηγούμενα ερωτήματα. Δηλαδή, για τον καθορισμό κάθε ψηφίου επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη, σημειώνουμε το ψηφίο που γράφει πάνω και το επιστρέφουμε στην κάλπη.

(**ε**) Ποια η πιθανότητα από αυτή τη διαδικασία να προκύψει ο αριθμός 22526;

(ζ) Αν από όλη τη διαδικασία για τον καθορισμό του αριθμού πληροφορούμαστε μόνο ότι προέκυψε ο 22526 (δηλαδή δεν γνωρίζουμε ποια κάλπη επιλέχθηκε), διαιθητικά, ποια κάλπη θεωρείτε ότι είναι το πιθανότερο να έχει επιλεγεί;

(**η**) Στο σενάριο του ερωτήματος (ζ), υπολογίστε την πιθανότητα, δεδομένου ότι σχηματίστηκε ο αριθμός 22526, να έχει επιλεγεί η κάλπη Α.

**Άσκηση 2** Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Ονομάζουμε $X$ το πλήθος των ρίψεων κατά τις οποίες έρχεται η ζαριά 4 στις πρώτες 100 ρίψεις και $Y$ το πλήθος των ρίψεων μέχρι το ζάρι να φέρει την ένδειξη 3 για πρώτη φορά (π.χ., αν στις πρώτες 10 ρίψεις έρθουν 6, 2, 4, 2, 5, 6, 2, 3, 1, 2, τότε $Y = 8$).

**(α)** Ποια η κατανομή της $X$; Υπολογίστε την $\mathbf{E}(X)$.

**(β)** Ποια η κατανομή της $Y$; Υπολογίστε την $\mathbf{E}(Y)$.

**(γ)** Υπολογίστε τις μέσες τιμές $\mathbf{E}(2^X), \mathbf{E}(2^Y)$.

Για τα **(α), (β)**, χρησιμοποιήστε έτοιμους (χωρίς απόδειξη) του τύπους για τη μέση τιμή γνωστών κατανομών, αλλά γράψτε τη γενική τους μορφή πριν τους εφαρμόσετε.

**Άσκηση 3** . Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 1 και διασπορά 1, $X \sim \mathrm{N}(1, 1)$. Με βάση τη $X$ κατασκευάζεται η $Y := 2X + 1$. Να υπολογιστούν οι ποσότητες

(**α**) $\mathrm{Prob}(X < 2)$,

(**β**) $\mathrm{Prob}(Y > 2)$,

(**γ**) $\varrho(X,Y) := \mathrm{Cov}(X,Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$.

Δίδονται οι ακόλουθες τιμές της $\Phi(z)$:

| $z$ | -2.0 | -1.5 | -1.0 | -0.5 | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | 2.3 % | 6.7% | 15.9 % | 30.9% | 50% | 69.1% | 84.1% | 93.3% | 97.7% |

Θυμηθείτε ότι $\Phi(z) = \mathrm{Prob}(Z \leq z)$ εάν $\mathrm{Z} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

**Άσκηση 4**. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} M \cdot (x^2 - x^4) & \text{αν } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

(**α**) Να προσδιοριστεί η σταθερά $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $f$ να είναι αποδεκτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάποιας τ.μ. $X$.

(**β**) Να βρεθούν οι τιμές της τ.μ. $X$ του ερωτήματος (**α**) στις οποίες μεγιστοποιείται η πυκνότητα $f$.

(**γ**) Να υπολογιστεί η διασπορά $\mathrm{Var}(X)$ της τ.μ. $X$ του ερωτήματος (**α**).

**Απαντήσεις**

**Άσκηση 1.** **(α)**

$$\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{9^5}$$

**(β)**

$$\frac{9 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9^5}$$

**(γ)**

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2} \times 7^2}{9^5}$$

Ο αριθμητής δίνει το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων, και τα μετράμε ως εξής.Επιλέγουμε πρώτα πού θα εμφανιστεί το 2 (5 επιλογές), έπειτα επιλέγουμε τις δύο θέσεις (από τις 4 που έμειναν) που θα τοποθετηθεί το 4, και τέλος, για καθεμία από τις δύο θέσεις που έχουν μείνει, έχουμε 7 επιλογές (τα ψηφία 2 και 4 δεν επιτρέπονται εκεί).

**(δ)**

$$\frac{\binom{9}{5}}{9^5}$$

Κάθε υποσύνολο του $\{1, 2, \dots, 9\}$ με 5 στοιχεία δίνει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία (βάζουμε τα στοιχεία σε αύξουσα σειρά) και, αντίστροφα, κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία ... Το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, 9\}$ με 5 στοιχεία είναι $\binom{9}{5}$.

**(ε)** Έστω

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{επιλέγεται η κάλπη A}\}, \\ A_2 &:= \{\text{επιλέγεται η κάλπη B}\}, \\ C &:= \{\text{προκύπτει ο αριθμός 22526}\}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(C|A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(C|A_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{9^5} + \frac{1}{2}\frac{2^4}{13^5}$$

**(ζ)** Η κάλπη B γιατί η πιθανότητα να βγει ο οποιοσδήποτε ζυγός από αυτήν είναι μεγαλύτερη από ότι από την A (2/13 έναντι 1/9) και ο 22526 έχει πολύ περισσότερους ζυγούς από ότι μονούς. Σημειώνουμε ότι η πιθανότητα να βγει ο 5 από τη B είναι 1/13, που είναι μικρότερο του 1/9 (η πιθανότητα να βγει ο 5 από την A).

**(η)** Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes.

$$\mathbf{P}(A_1|C) = \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(C|A_1)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{9^5}}{\frac{1}{2}\frac{1}{9^5} + \frac{1}{2}\frac{2^4}{13^5}} = \frac{13^5}{13^5 + (1/2) \cdot 18^5}$$

Για τον παρονομαστή, χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (ζ). Με χρήση υπολογιστή, βρίσκουμε ότι το τελευταίο κλάσμα είναι περίπου ίσο με 0.282. Διαπιστώνουμε ότι η διαίσθησή μας στο (ζ) ήταν σωστή.

**Άσκηση 2.** **(α)** $X \sim$Bin(100, 1/6). $\mathbf{E}(X) = 100/6$. Γενικά, αν $X \sim$Bin$(n, p)$, τότε $\mathbf{E}(X) = np$.

**(β)** $Y \sim$Γεωμετρική(1/6). $\mathbf{E}(Y) = 6$. Γενικά, αν $Y \sim$Γεωμετρική$(p)$, τότε $\mathbf{E}(Y) = 1/p$.

**(γ)** Έστω $p := 1/6$ η παράμετρος της διωνυμικής $X$. Τότε

$$\mathbf{E}(2^X) = \sum_{k=0}^{100} 2^k \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (2p)^k (1-p)^{100-k} = (2p+1-p)^{100} = (1+p)^{100} = (7/6)^{100}.$$

Έστω $p := 1/6$ η παράμετρος της Γεωμετρικής τ.μ. $Y$. Τότε

$$\mathbf{E}(2^Y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k p(1-p)^{k-1} = 2p \sum_{k=1}^{\infty} \{2(1-p)\}^{k-1} = \infty$$

αφού η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $2(1-p) = 10/6 > 1$.

**Άσκηση 3**. Κατά τα γνωστά, η τυχαία μεταβλητή $Z := X - 1$ ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1)$ (τυπική κανονική κατανομή).

**(α)** Έχουμε Prob($X < 2$)=Prob($Z < 1$)=Prob($Z \leq 1$) $= \Phi(1) = 0.841$ Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί η $Z$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

**(β)** Έχουμε $Y = 2(Z + 1) + 1 = 2Z + 3$. Έτσι

$$\text{Prob}(Y > 2) = \text{Prob}(Z > -1/2) = 1 - \text{Prob}(Z \leq -1/2) = 1 - \Phi(-1/2) = 1 - 0.309 = 0.691$$

**(γ)** Με βάση γνωστές ιδιότητες της διασποράς και της συνδιακύμανσης, έχουμε

$$\text{Cov}(X, Y) = 2\text{Cov}(X, X) = 2\text{Var}(X) = 2,$$
$$\text{Var}(Y) = 4\text{Var}(X) = 4.$$

Επομένως, υπολογίζουμε ότι $\varrho(X, Y) = 1$.

**Άσκηση 4. (α)** Πρέπει η $f$ να έχει ολοκλήρωμα 1. Έτσι

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = M \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)\,dx = \mathrm{M}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{15}M,$$

επομένως $M = 15/4$.

**(β)** Η πυκνότητα $f$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $(-1, 1)$ με παράγωγο $f'(x) = M(2x - 4x^3)$. Βρίσκουμε εύκολα ότι τα σημεία ολικού μεγίστου για την $f$ είναι τα $-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \in (-1, 1)$. Οι τιμές της $X$ που ζητούνται είναι οι $-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$.

**(γ)** $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0$ γιατί η $(x \mapsto xf(x))$ είναι περιττή συνάρτηση και την ολοκληρώνουμε σε σύνολο συμμετρικό ως προς το 0. Έτσι,

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = M \int_{-1}^{1} x^2(x^2 - x^4)\,dx = \mathrm{M}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{4M}{35} = \frac{3}{7}.$$