Θεωρια Πιθανοτητων[1]

I. Στοιχεια συνδυαστικης και κλασικος ορισμος της πιθανοτητας

Πολλαπλασιαστικη αρχη

1.1. Πόσοι επταψήφιοι αριθμοί (γραφή στο δεκαδικό σύστημα) υπάρχουν

(α) που να μην έχουν δυο διαδοχικά ψηφία ίδια,
(β) που όλα τους τα ψηφία να είναι διαφορετικά.

1.2. Πόσες διαφορετικές πινακίδες 6 γραμμάτων από το ελληνικό αλφάβητο μπορούμε να κατασκευάσουμε ώστε σε αυτές να μην υπάρχουν σε διαδοχή δύο φωνήεντα ούτε δύο σύμφωνα.

Διαταξεις με επαναληψη η χωρις. Μεταθεσεις

1.3. Δέκα αθλητές διαγωνίζονται στον δρόμο των 100 μέτρων. Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες νικητών;

1.4. Δέκα αθλητές διαγωνίζονται σε 3 αθλήματα (κολύμπι, ποδηλασία, τρέξιμο). Για τον νικητή κάθε αθλήματος υπάρχει ένα έπαθλο και τα τρια έπαθλα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Πόσοι είναι οι τρόποι κατανομής των τριών επάθλων στους δέκα αθλητές;

1.5. Δέκα αθλητές διαγωνίζονται στον δρόμο των 100 μέτρων. Πόσες είναι οι δυνατές σειρές τερματισμού; [Δηλαδή ποιος φτάνει πρώτος, ποιος δεύτερος, κ.λπ.]

Συνδυασμοι με επαναληψη η χωρις

1.6. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 14 φορές και καταγράφουμε τα αποτελέσματα με τη σειρά εμφάνισής τους (Συμβολίζουμε με «Κ» το «Κεφαλή» και με «Γ» το «Γράμματα»). Ένα δυνατό αποτέλεσμα είναι το (Κ, Γ, Κ, Γ, Κ, Γ, Γ, Γ, Γ, Γ, Γ, Κ, Κ, Γ). Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα στα οποία εμφανίζεται Κ ακριβώς 5 φορές;

1.7. Πόσες διατεταγμένες εξάδες, $(k_1, k_2, \dots, k_6)$, διαφορετικών μεταξύ τους αριθμών από το $\{1, 2, \dots, 49\}$ υπάρχουν με την ιδιότητα $k_1 < k_2 < \cdots < k_6$;

1.8. Δεκαπέντε δευτεροετείς φοιτητές πηγαίνουν σε ένα μπαρ και θα παραγγείλουν ο καθένας από μία μπύρα. Το μπαρ διαθέτει 6 μάρκες μπύρας (Fix, Μύθος, ...). Ο σερβιτόρος δίνει στον βοηθό του μια λίστα στην οποία καταγράφει πόσες μπύρες από το κάθε είδος χρειάζεται ώστε ο βοηθός να ετοιμάσει την παραγγελία (Ο βοηθός δεν ενδιαφέρεται για το ποιος φοιτητής παρήγγειλε ποια μπύρα). Πόσες είναι οι δυνατές λίστες που μπορεί να προκύψουν από την παραγγελία των φοιτητών;

1.9. Μια μητέρα έχει ένα κουτί που περιέχει 10 όμοια μπισκότα. Θα τα μοιράσει στα 4 παιδιά της. Πόσες είναι οι δυνατές μοιρασιές; [Σημασία έχει μόνο το πόσα μπισκότα παίρνει κάθε παιδί, όχι το σε ποιο παιδί καταλήγει κάθε συγκεκριμένο μπισκότο.]

1.10. Πόσες είναι οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις [διατεταγμένες 11-άδες $(x_1, x_2, \dots, x_{11})$] της ακόλουθης εξίσωσης;

$$x_1 + \cdots + x_{11} = 20$$

Πολλαπλασιαστικη αρχη ξανα

1.11. Με πόσους τρόπους μπορούν 8 άνθρωποι (ανάμεσα στους οποίους οι Α, Β) να καθίσουν σε μια σειρά αν

[1]Τμήμα Φυσικής, ΕΚΠΑ. Ασκήσεις στο πρώτο μισό του μαθήματος. Δημήτρης Χελιώτης

(α) δεν υπάρχουν περιορισμοί,
(β) οι A και B πρέπει να καθίσουν ο ένας δίπλα στον άλλον,
(γ) υπάρχουν 4 άντρες και 4 γυναίκες και απαγορεύεται οποιοσδήποτε άντρας να κάθεται δίπλα σε άντρα και οποιαδήποτε γυναίκα να κάθεται δίπλα σε γυναίκα,
(δ) υπάρχουν 5 άντρες και 3 γυναίκες και οι άντρες πρέπει να καθίσουν ο ένας δίπλα στον άλλον,
(ε) υπάρχουν 4 παντρεμένα ζευγάρια και κάθε ζευγάρι πρέπει να καθίσει δίπλα-δίπλα.

1.12. Ένας παίκτης παίζει μια εξάδα στο ΛΟΤΤΟ (έξι διαφορετικούς αριθμούς ανάμεσα στους 1, 2, ..., 49). Πόσες είναι οι εξάδες ΛΟΤΤΟ που έχουν ακριβώς δύο κοινά στοιχεία με την εξάδα του παίκτη;

1.13. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 6 πύργους σε μια σκακιέρα ώστε να μην απειλεί κανείς κάποιον άλλον; [Κάθε δύο τετράγωνα της σκακιέρας θεωρούνται διαφορετικά όπως και οι πύργοι μεταξύ τους.]

Γενικες ασκησεις συνδυαστικης

1.14. Πόσοι φυσικοί από το σύνολο $\{1, 2, \dots, 280\}$ διαιρούνται τουλάχιστον με έναν από τους $2, 5, 7$;

1.15. (Κυκλικές μεταθέσεις) Εφτά φίλοι Φ1, Φ2, ..., Φ7 κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο σε ένα στρογγυλό τραπέζι εφτά θέσεων που τις αριθμούμε ακολουθώντας την τριγωνομετρική φορά ως $1, 2, \dots, 7$ ξεκινώντας αυθαίρετα από μια. Η τοποθέτησή (Φ3, Φ4, Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6) σημαίνει ότι ο Φ3 κάθεται στη θέση 1, ο Φ4 στη θέση 2, κ.λπ. Δύο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες αν και μόνο αν η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη αν όλα τα άτομα μετακινηθούν προς τα δεξιά έναν δεδομένο αριθμό θέσεων, τον ίδιο για όλους. Για παράδειγμα, οι (Φ3, Φ4, Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6), (Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6, Φ3, Φ4) είναι ίδιες γιατί η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη αν όλοι μετακινηθούν 5 θέσεις προς τα δεξιά τους. Πόσες είναι οι διαφορετικές τοποθετήσεις των εφτά φίλων στο τραπέζι;

Κλασικος ορισμος της πιθανοτητας

1.16. Ένας δρομέας των εκατό μέτρων πρόκειται να τρέξει στον διάδρομο 5 απο τους 10 διαθέσιμους στον στίβο. Μαζί του θα τρέξουν άλλοι 4 δρομείς οι οποίοι τοποθετούνται τυχαία στις υπόλοιπες θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα να μην τοποθετηθεί κανείς στους διαδρόμους 4, 6;

1.17. Απο μία κάλπη που περιέχει 100 σφαιρίδια αριθμημένα $\{1, 2, \dots, 100\}$, εξάγουμε το ένα μετά το άλλο στην τύχη με επανάθεση 10 σφαιρίδια. Ποια η πιθανότητα τα πέντε πρώτα σφαιρίδια να φέρουν διαφορετικούς αριθμούς και τα υπόλοιπα 5 να φέρουν αριθμούς διαφορετικούς απο αυτούς των πρώτων πέντε;

1.18. Σε έναν διαγωνισμό ζωγραφικής συμμετέχουν 13 αγόρια και 10 κορίτσια, και δίνονται 8 έπαθλα. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν ισοβαθμίες, και όλες οι δυνατές κατατάξεις είναι ισοπίθανες. Τα έπαθλα είναι 2000, 1500, 1000 Ευρώ για τον πρώτο δεύτερο και τρίτο καλύτερο διαγωνιζόμενο αντίστοιχα, ενώ οι επόμενοι 5 σε επίδοση κερδίζουν 500 ευρώ ο καθένας.

(α) Πόσοι οι διαφορετικοί δυνατοί τρόποι απονομής των 8 επάθλων;

(β) Ποια η πιθανότητα τα τρία πρώτα έπαθλα να κερδηθούν από κορίτσια ενώ τα υπόλοιπα πέντε από αγόρια.

1.19. (α) Πόσες είναι οι διαφορετικές δεκάδες ημερών του Φεβρουαρίου;

(β) Επιλέγουμε στην τύχη 10 μέρες μέσα στον Φεβρουάριο (όλες οι δεκάδες έχουν την ίδια πιθανότητα). Ποια η πιθανότητα οι μέρες που επιλέξαμε να είναι διαδοχικές;

1.20. Φτιάχνουμε έναν εξαψήφιο αριθμό με ψηφία ανάμεσα στα $\{1, 2, \dots, 9\}$. Κάθε ψηφίο επιλέγεται στην τύχη.

(α) Ποια η πιθανότητα στον αριθμό που θα προκύψει όλα τα ψηφία να είναι ίδια;
(β) Ποια η πιθανότητα στον αριθμό που θα προκύψει όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικα;
(γ) Ποια η πιθανότητα στον αριθμό που θα προκύψει να εμφανίζονται μόνο δύο ψηφία, το ένα 2 φορές και το άλλο 4 φορές;

1.21. Σε μια πόλη $n+1$ ατόμων ένα άτομο επιλέγει τυχαία ένα από τα υπόλοιπα και λέει μια φημολογία. Το δεύτερο άτομο κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(a) Η φημολογία να ειπωθεί r φορές χωρίς να γυρίσει σε αυτόν που την άρχισε.
(b) Η φημολογία να ειπωθεί $r \leq n$ φορές χωρίς να ακουστεί απο κάποιο άτομο που την ξέρει ήδη.

1.22. Ένα λεωφορείο ξεκινάει απο την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει απο n στάσεις.

(a) Να κατασκευαστεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών.
(β) Να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.
(γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από έναν φοιτητές.

1.23. Σε μια τάξη k μαθητών, $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, ποια είναι η πιθανότητα ο a_1 να έχει γενέθλια την ίδια μέρα με κάποιον από τους υπόλοιπους $k-1$ μαθητές;

1.24. Σε μια τάξη 100 μαθητών, ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς 2 άτομα να έχουν κοινή ημερομηνία γέννησης ενώ τα υπόλοιπα 98 να έχουν διαφορετικές ημερομηνίες γέννησης και μεταξύ τους και με τα άλλα δύο άτομα.

1.25. Σε ένα ράφι τοποθετούνται με τυχαία σειρά 6 βιβλία μαθηματικών, 4 βιβλία φυσικής, 3 βιβλία ιστορίας, 7 βιβλία ξένων γλωσσών, και 10 λεξικά. Ποια είναι η πιθανότητα όλα τα βιβλία του ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί;

1.26. Έχουμε μία Βασιλόπιτα με n κομμάτια και μια ουρά n ατόμων. Σε ένα ακριβώς κομμάτι υπάρχει ένα νόμισμα. Ένα άτομο (εκτός της ουράς) μοιράζει τα κομμάτια ένα προς ένα επιλέγοντας κάθε φορά ένα στην τύχη. Για δεδομένο $r \in \{1, \dots, n\}$, ποιες είναι οι πιθανότητες

(α) Το νόμισμα να βρεθεί στην r-οστή δοκιμή.
(β) Το νόμισμα να μην βρεθεί ως την r-οστή δοκιμή.

1.27. Έχουμε r δοχεία και κάθε φορά επιλέγουμε ένα στην τύχη και τοποθετούμε έναν βώλο σε αυτό. Η διαδικασία σταματάει όταν ένα δοχείο έχει δύο βώλους. Ποια είναι η πιθανότητα αυτό να συμβεί με τον n-οστο βώλο;

1.28. Μία κάλπη περιέχει 100 μαύρα και 200 άσπρα σφαιρίδια. Βγάζουμε τυχαία 100 σφαιρίδια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ακριβώς 10 μαύρα;

1.29. Μια κάλπη περιέχει 1000 σφαιρίδια απο τα οποία τα 25 είναι μαύρα, τα 30 άσπρα, και τα 945 κόκκινα. Επιλέγουμε τυχαία 15 σφαιρίδια απο την κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει

(α) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια;
(β) ακριβώς 2 μαύρα και 3 άσπρα;
(γ) ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μαύρα;

1.30. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με 13 φοιτητές και περνάει από 4 στάσεις. Να υπολογιστεί η πιθανότητα στην πρώτη στάση να αποβιβαστούν 3 φοιτητές, στη δεύτερη 4, στην τρίτη 4, και στην τέταρτη 2 φοιτητές.

1.31. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με $k \geq 3$ φοιτητές και περνάει από n στάσεις ($n \geq k-2$). Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ακριβώς μία στάση να αποβιβαστούν ακριβώς 3 φοιτητές ενώ σε καθεμία από τις υπόλοιπες στάσεις να αποβιβαστεί το πολύ ένας φοιτητής.

1.32. Επιλέγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση 5 σφαιρίδια απο μια κάλπη με 60 σφαιρίδια αριθμημένα 1, 2,..., 60. Έστω ότι οι ενδείξεις τους είναι $k_1, k_2, \dots, k_5$, με τη σειρά με την οποία εξάγονται.

(α) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5$;

(β) Ποια η πιθανότητα να ισχύει $k_5 > \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$;

1.33. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές ($n \geq 2$). Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) Να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6.

(β) Να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6 και να μην εμφανιστεί καθόλου ο αριθμός 1.

1.34. Ρίχνουμε n συνηθισμένα ζάρια. Για $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες

(α) Η μεγαλύτερη ένδειξη (από τις n) να ισούται με k.

(β) Η μικρότερη ένδειξη (από τις n) να ισούται με k.

1.35.[2] Απο μια κληρωτίδα που περιέχει n λαχνούς αριθμημένους $1, 2, \dots, n$ εξάγεται ένα λαχνός, καταγράφουμε το νούμερο του, και τον επιστρέφουμε. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία $k \geq 3$ φορές. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(a) Να επιλεγεί ο λαχνός 1 τουλάχιστον μια φορά.

(b) Να επιλεγούν οι λαχνοί 1, 2, 3 τουλάχιστον μια φορά ο καθένας.

1.36. Από τους αριθμούς $1, 2, \dots, 1050$ διαλέγουμε έναν στην τύχη.

(α) Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος αριθμός να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς 3 ή 5;

(β) Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος αριθμός να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς 3 ή 5 ή 7;

1.37. Ανελκυστήρας ξεκινάει με k άτομα από το ισόγειο n-όροφης οικοδομής. Υποθέτοντας ότι όλες οι αποβιβάσεις είναι εξίσου πιθανές, να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(α) Όλα τα άτομα να αποβιβασθούν σε διαφορετικούς ορόφους.

(β) Ακριβώς k_1 άτομα να αποβιβασθούν στον πρώτο όροφο, ακριβώς k_2 άτομα να αποβιβασθούν στον δεύτερο όροφο, ..., ακριβώς k_n άτομα να αποβιβασθούν στον n-οστό όροφο (εδώ $k_1 + \dots + k_n = k$).

Λογισμος με ενδεχομενα

1.38. Έστω A, B ενδεχόμενα σε έναν δειγματικό χώρο με $\mathbf{P}(A) = 0.6, \mathbf{P}(B) = 0.2, \mathbf{P}(A \cap B) = 0.1$. Γράψτε με τη βοήθεια συνολοθεωρητικών πράξεων τα παρακάτω ενδεχόμενα και υπολογίστε την πιθανότητα καθενός.

(α) Τουλάχιστον ένα από τα A, B πραγματοποιείται.

(β) Ακριβώς ένα από τα A, B πραγματοποιείται.

(γ) Το πολύ ένα από τα A, B πραγματοποιείται.

(δ) Κανένα από τα A, B δεν πραγματοποιείται.

[2] Οι ασκήσεις 1.35, 1.36 είναι εφαρμογές της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού.

1.39. Έστω A, B ενδεχόμενα σε έναν δειγματικό χώρο με $\mathbf{P}(A) = 0.6, \mathbf{P}(B) = 0.2, \mathbf{P}(A \cup B) = 0.7$. Υπολογίστε τις πιθανότητες των εξής ενδεχομένων.

(α) Πραγματοποιείται και το A και το B.

(β) Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B.

1.40. Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα σε έναν δειγματικό χώρο. Γράψτε με τη βοήθεια συνολοθεωρητικών πράξεων το ενδεχόμενο από τα τρία αυτά ενδεχόμενα να συμβεί μόνο το A και δείξτε ότι η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου ισούται με

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup \Gamma) - \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(\Gamma) + \mathbf{P}(B \cap \Gamma).$$

2. Δεσμευμενη πιθανοτητα και ανεξαρτησια

2.1. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα μια διπλή ζαριά να είναι εξάρες δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι περιέχει τουλάχιστον ένα έξι;

2.2. Έστω A, B ενδεχόμενα σε έναν δειγματικό χώρο Ω ώστε $0 < \mathbf{P}(B) < 1$.

(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(A \mid B) + \mathbf{P}(A^c \mid B) = 1$.

(β) Θεωρώντας τον δειγματικό χώρο δύο ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος και τα ενδεχόμενα $A :=$ {η πρώτη ρίψη φέρνει «Κ»}, $B :=$ {και οι δύο ρίψεις φέρνουν «Κ»} δείξτε ότι γενικά δεν ισχύει $\mathbf{P}(A \mid B) + \mathbf{P}(A \mid B^c) = 1$.

2.3. Έστω ότι κάποιος ρίχνει ένα δίκαιο νόμισμα 3 φορές. Δεδομένου ότι μία από τις ρίψεις ήρθε κεφαλή, ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον μία από τις άλλες ρίψεις να έρθει κεφαλή;

2.4. Εστω ενδεχόμενα A, B με $P(A) > 0$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{P}(A \cap B \mid A \cup B) \leq \mathbf{P}(A \cap B \mid A)$.

(β) $\mathbf{P}(B \mid B \cup A) \geq \mathbf{P}(B \mid A)$.

2.5. Ένα κουτί περιέχει ένα άσπρο και ένα μπλε σφαιρίδιο. Ξεκινάμε μια ακολουθία εξαγωγών από το κουτί. Κάθε φορά, εξάγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο και το επιστρέφουμε στο κουτί μαζί με ένα καινούργιο σφαιρίδιο του ίδιου χρώματος (άρα μετά από n εξαγωγές το κουτί έχει $2 + n$ σφαιρίδια).

(α) Για $n \in \mathbb{N}^+$, να βρεθεί η πιθανότητα σε όλες τις πρώτες n εξαγωγές να επιλέξουμε άσπρο σφαιρίδιο.

(β) Για $n \in \mathbb{N}^+$, να βρεθεί η πιθανότητα σε όλες τις πρώτες n εξαγωγές να επιλέξουμε άσπρο σφαιρίδιο και στις επόμενες n να επιλέξουμε μπλε σφαιρίδιο.

Θεωρημα ολικης πιθανοτητας

2.6. Μια κάλπη περιέχει 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια ενώ μια δεύτερη κάλπη περιέχει 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την πρώτη και το τοποθετούμε στη δεύτερη. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο απο τη δεύτερη κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

2.7. Μία κάλπη περιέχει 13 σφαιρίδια αριθμημένα $1, 2, \ldots, 13$. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, σημειώνουμε το αριθμό του, και το επιστρέφουμε στην κάλπη. Αν ο αριθμός του ήταν i, τότε παίρνουμε από την κάλπη i σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο (χωρίς επανάθεση). Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέξαμε στην αρχή του πειράματος να μήν είναι ανάμεσα σε αυτά που επιλέξαμε στο τέλος;

2.8. Ένα κουτί περιέχει $n \geq 2$ διακεκριμένους λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το n. Ένας λαχνός επιλέγεται στην τύχη και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι τόσες ανεξάρτητες φορές όσες ήταν η ένδειξη του λαχνού που επιλέχθηκε. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης και των δύο ενδείξεων 3 και 5 από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά;

2.9. Μια κάλπη περιέχει k άσπρα και $n - k$ μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε διαδοχικά 3 σφαιρίδια ως εξής. Μετά από κάθε εξαγωγή, αν το σφαιρίδιο είναι άσπρο, το επιστρέφουμε στην κάλπη, ενώ αν είναι μαύρο, το αντικαθιστούμε με άσπρο. Ποια είναι η πιθανότητα το τρίτο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

2.10. (Το κρυμμένο κόμμα) Κάνουμε μία δημοσκόπηση επιλέγοντας τυχαία άτομα από τον πληθυσμό μια πόλης θέλοντας να υπολογίσουμε το ποσοστό ενός κόμματος X στην πόλη. Δυστυχώς, στη δημοσκόπηση δεν συμμετέχουν όλα τα άτομα που επιλέγουμε, αλλά γνωρίζουμε τα εξής. Η πιθανότητα να συμμετάσχει στη δημοσκόπηση ένας που δεν ψηφίζει το X είναι 0.8 ενώ η πιθανότητα να συμμετάσχει ένα που ψηφίζει το X είναι 0.3. Από τη δημοσκόπηση συνάγουμε ότι το τυχόν άτομο που δέχεται να συμμετάσχει έχει πιθανότητα 0.25 να ψηφίσει το X. Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχόν άτομο στην πόλη να ψηφίσει το X; [Δηλαδή ποιο είναι το πραγματικό ποσοστό του κόμματος;]

2.11. Ένα νόμισμα φέρνει «Κ» με πιθανότητα 1/4 και «Γ» με πιθανότητα 3/4. Το ρίχνουμε, και αν έρθει «Κ» ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια ενώ αν έρθει «Γ» ρίχουμε τρία αμερόληπτα ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών που ρίχνουμε να ισούται με 3;

Θεωρημα Bayes

2.12. Θεωρούμε δύο κάλπες X, Y με την εξής σύνθεση:

X: 5 μαύρα και 5 άσπρα σφαιρίδια,

Y: 1 μαύρο και 9 άσπρα σφαιρίδια.

Ένα άτομο επιλέγει τυχαία (με ίση πιθανότητα) μία από τις δύο κάλπες και εξάγει απο αυτήν το ένα μετά το άλλο με επανάθεση 4 σφαιρίδια (δηλαδή μετά απο κάθε εξαγωγή, επιστρέφει το σφαιρίδιο στην κάλπη). Σε εμάς, απο όλη τη διαδικασία, φανερώνεται μόνο ότι και τα τέσσερα σφαιρίδια είναι άσπρα. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλεγεί στην αρχή η κάλπη X;

2.13. Σε έναν πληθυσμό, το 0.1% πάσχει απο μια ασθένεια X. Ένα τεστ κάνει λάθος διάγνωση στο 5% των περιπτώσεων που το άτομο που κάνει το τεστ έχει την ασθένεια ενώ κάνει λάθος στο 1% των περιπτώσεων που το άτομο είναι υγιές. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο απο τον πληθυσμό και το τεστ δηλώνει ότι το άτομο έχει την ασθένεια. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα το άτομο όντως να έχει την ασθένεια;

2.14. Το συρτάρι Σ_1 περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά νομίσματα ενώ το συρτάρι Σ_2 περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο νομίσματα στην τύχη.

(α) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο χρυσά;
(β) Αν διαπιστωθεί (κατά τη σύλληψή του) ότι έχει κλέψει δύο χρυσά νομίσματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι Σ_1;

2.15. Οι ασφαλιστικές εταιρείες κατατάσσουν τους οδηγούς σε 10 κατηγορίες, $A_1, A_2, \dots, A_{10}$, ανάλογα με την πιθανότητα να κάνουν ατύχημα στη διάρκεια του έτους. Συγκεκριμένα, ένας οδηγός της κατηγορίας A_k ($k \in \{1, 2, \dots, 10\}$) έχει πιθανότητα $k/100$ να πραγματοποιήσει ατύχημα στη διάρκεια του έτους. Υποθέτουμε ότι στη συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρεία τα $k/55$ των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην κατηγορία A_k, $k = 1, 2, \dots, 10$. Αν ένας οδηγός, ασφαλισμένος στη συγκεκριμένη εταιρεία, αναφέρει ατύχημα στη διάρκεια του έτους, ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κατηγορία k;

Ανεξαρτητα ενδεχομενα

2.16. Για τα ενδεχόμενα A, B γνωρίζουμε ότι $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.7, \mathbf{P}(A) = 0.5$. Να βρεθεί η $\mathbf{P}(B)$ σε καθένα από τα εξής δύο σενάρια.

(α) Τα A, B είναι ξένα μεταξύ τους.

(β) Τα A, B είναι ανεξάρτητα.

2.17. Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές, και θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

A: Η πρώτη ρίψη φέρνει 1.

B: Δεν εμφανίζεται 2 σε κάποια ρίψη.

Είναι τα A, B ανεξάρτητα; Διαισθητικά, περιμένετε η $\mathbf{P}(A \mid B)$ να ισούται με $\mathbf{P}(A)$;

2.18. Δύο ενδεχόμενα A, B με $P(A), P(B) > 0$ λέγονται θετικά συσχετισμένα αν $P(A \mid B) > P(A)$, ενώ αρνητικά συσχετισμένα αν $P(A \mid B) < P(A)$.

(a) Να δειχθεί ότι αν τα A, B είναι θετικά συσχετισμένα, τότε $P(B \mid A) > P(B)$ και $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ (προφανώς και οι τρείς περιορισμοί είναι ισοδύναμοι εφόσον $P(A), P(B) > 0$).

(b) Ρίχνουμε ένα ζάρι δυό φορές και ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Εμφανίζεται 1 τουλάχιστον μια φορά}\}, \\ B &:= \{\text{Οι δύο ενδείξεις είναι διαφορετικές}\}, \\ C &:= \{\text{Η πρώτη ένδειξη δεν είναι 1}\}. \end{aligned}$$

Είναι τα A, B θετικά ή αρνητικά συσχετισμένα; Τα A, C;

2.19. Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα να δειχθεί ότι καθένα απο τα ακόλουθα ζεύγη είναι ανεξάρτητα (α) A, B^c, (β) A^c, B, (γ) A^c, B^c.

2.20. Θεωρούμε $k \geq 1$ ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος και τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &: \text{και οι δυό όψεις εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά.} \\ B &: \text{η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται το πολύ μια φορά.} \end{aligned}$$

Για ποιες τιμές του k είναι τα A, B ανεξάρτητα;

2.21. Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα N_1, N_2, πλην όμως, το ένα φέρνει ((Κ)) με πιθανότητα $p_1 = 1/2$ (δίκαιο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 3/4$ (κίβδηλο) . Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{η πρώτη ρίψη είναι Κ}\}, \\ A_2 &:= \{\text{η δεύτερη ρίψη είναι Κ}\}. \end{aligned}$$

Είναι τα A_1, A_2 ανεξάρτητα;

2.22. Για δυό παθήσεις α, β, είναι γνωστό ότι το ποσοστό των ατόμων του πληθυσμού που πάσχουν μόνο από την α είναι 0.6%, αυτών που πάσχουν μόνο απο τη β είναι 0.5%, και αυτών που πάσχουν και απο τις δύο είναι 0.2%. Είναι οι δυό παθήσεις ανεξάρτητες;

2.23. Ένα πείραμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p \in (0, 1)$. Εκτελούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών του πειράματος.

(α) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες στις πρώτες n δοκιμές είναι

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Θεωρούμε ότι $0 \leq k \leq n$.

(β) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα σε όλες τις δοκιμές της ακολουθίας να έχουμε αποτυχία είναι 0.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η πρώτη επιτυχία να συμβαίνει στην k δοκιμή, όπου $k \in \mathbb{N}^+$.

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, όπου $k \in \mathbb{N}^+$.

***2.24.** Τρεις παίκτες, οι a_1, a_2, a_3, παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν διαδοχικά ένα συνηθισμένο νόμισμα με τη σειρά $a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3$ κ.ο.κ., και κερδίζει αυτός που θα φέρει πρώτος κορώνα. Έστω p_j η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο παίκτης j. Να δείξετε ότι $p_2 = p_1/2$ και $p_3 = p_2/2$, και να συμπεράνετε ότι $p_1 = 4/7$, $p_2 = 2/7$ και $p_3 = 1/7$.

3. Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

3.1. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $I := \{-5, -4, -3, ..., 3, 4, 5\}$ και συνάρτηση πιθανότητας $f_X(k) = a$ για κάθε $k \in I$ (και προφανώς $f_X(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R} \setminus I$ αφού η X παίρνει τιμές στο I).
(α) Ποια είναι η τιμή του a;
(β) Ποια η πιθανότητα $\mathbf{P}(X \geq 0.2)$;
(γ) Ποια η μέση τιμή $\mathbf{E}\{\log(|X| + 1)\}$;

3.2. Έστω $a \in [0, 1]$. Δείξτε ότι υπάρχει τυχαία μεταβλήτη X με τιμές στο $\{-1, 0, 1\}$ ώστε $\mathbf{E}(X) = 0, \operatorname{Var}(X) = a$. [Αρκεί να ορίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας, f_X, της X.]

3.3. Έστω $f(x) = c/2^{|x|}$ για $x \in \mathbb{Z}$ και $f(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, όπου η c είναι μια σταθερά. Για ποια τιμή της c είναι η f συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής;

3.4. Να εξεταστεί αν ορίζεται η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X αν αυτή έχει συνάρτηση πιθανότητας

(α) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \frac{1}{x^2} & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$ (β) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \frac{1}{x^2} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}, x < 0, \\ \frac{1}{2^{x+1}} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}, x > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

3.5. Δυό παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1 ή 2. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός, τότε ο Α κερδίζει και παίρνει β Ευρώ από τον Β ενώ αν ο X είναι άρτιος, τότε ο Α χάνει και δίνει α Ευρώ στον Β.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο Α;
(γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ α και β ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο;

3.6. (Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης) Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη, τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού; Θα έδινες 50 Ευρώ για να παίξεις το παιχνίδι;

3.7. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(t) := \mathbf{E}\{(X - t)^2\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο σημείο[3] $t := \mathbf{E}(X)$.

3.8. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} & \text{αν } x \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Για ποια $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathbf{E}(X^a) < \infty$;

3.9. Έχουμε k άτομα. Θεωρούμε ότι η ημερομηνία γέννησης καθενός είναι μια τυχαία ημερομηνία από τις $[365] := \{1, 2, 3, \ldots, 365\}$ και ότι οι ημερομηνίες γέννησης όλων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
(α) Έστω M το πλήθος ημερομηνιών στο [365] στις οποίες γεννιέται τουλάχιστον ένα άτομο. Ποια είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής M;
(β) Για $i \in [365]$, ποια η πιθανότητα την ημερομηνία i να έχει γενέθλια ακριβώς ένα από τα k άτομα.

---

[3]Το ότι $\mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$ έπεται από τη σχέση $\{\mathbf{E}(|X|)\}^2 \leq \mathbf{E}(X^2)$, η οποία είναι συνέπεια του τύπου $0 \leq \operatorname{Var}(|X|) = \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(|X|)\}^2$.]

(γ) Έστω N το πλήθος ημερομηνιών στο $[365]$ στις οποίες γεννιούνται τουλάχιστον δύο άτομα. Ποια είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής N;

(δ) Βρείτε τις αριθμητικές τιμές των αποτελεσμάτων στα (α), (γ) για $k = 23$ και $k = 30$.

4. Ειδικές διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Διωνυμική

4.1. Κατασκευάζουμε έναν αριθμό στο [0, 1) με 80 δεκαδικά ψηφία επιλέγοντας καθένα απο αυτά απο το $\{0, 1, \dots, 9\}$ ομοιόμορφα (δηλαδή, όλα τα ψηφία έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής). Ποια είναι η κατανομή του αριθμού των εμφανίσεων του 3 και ποια η μέση της τιμή;

4.2. Δύο ζάρια Α και Β ρίχονται 90 φορές. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των ρίψεων που η ένδειξη του Α ξεπερνάει την ένδειξη του Β κατά δύο μονάδες τουλάχιστον;

4.3. Ένας σκοπευτής ρίχνει 10 βολές προς ένα στοχο. Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο 4 φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να τον πετύχει τρείς. Να υπολογιστεί η ευστοχία του σκοπευτή, δηλαδή η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο σε μία δεδομένη βολή. Έπειτα να υπολογιστούν οι πιθανότητες σε 5 βολές να πετύχει τον στόχο

(α) Δύο τουλάχιστον φορές.
(β) Ή όλες ή καμία φορά.
(γ) Το πολύ 4 φορές αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον δύο φορές.

4.4. Μια αεροπορική εταιρεία έχει παρατηρήσει ότι 5% όσων έχουν αγοράσει εισιτήριο δεν εμφανίζεται για να ταξιδέψει. Τη σημερινή πτήση εκτελεί ένα αεροπλάνο με 200 θέσεις και η εταιρεία έχει πουλήσει 203 εισιτήρια. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορέσει να εξυπηρετήσει έναν επιβάτη με εισιτήριο; Υποθέστε ότι αν A_i είναι το ενδεχόμενο να εμφανιστεί ο επιβάτης i, τα ενδεχόμενα $\{A_i : 1 \leq i \leq 203\}$ είναι ανεξάρτητα.

4.5. Έστω ότι η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p με $p \in (0, 1)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(t^X) = (pt + q)^n$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $q = 1 - p$ (θεωρούμε ότι η έκφραση t^X ισούται με 1 όταν $t = X = 0$).

Γεωμετρική

4.6. Μία κάλπη περιέχει 20 μαύρα και 60 άσπρα σφαιρίδια. Εξάγουμε σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο με επανάθεση. (α) Ποια είναι η πιθανότητα το 7ο σφαιρίδιο να είναι το πρώτο μαύρο σφαρίδιο που εξάγεται; (β) Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 10 εξαγωγες για να εμφανιστεί μαύρο σφαιρίδιο. (γ) Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού των άσπρων σφαιριδίων που εμφανίζονται πριν την πρώτη εμφάνιση μαύρου σφαιριδίου.

4.7. Ένας αθλητής του άλματος εις μήκος προσπαθεί να κάνει ένα άλμα τουλάχιστον 8 μέτρα. Η πιθανότητα να καταφέρει ένα τέτοιο άλμα σε μια οποιαδήποτε προσπάθεια είναι 0.3. Ένας κριτής αποφαίνεται αν το άλμα είναι έγκυρο ή όχι. Ο κριτής σήμερα είναι αναστατωμένος και βλέπει σωστά όλα τα άκυρα άλματα αλλά ακυρώνει με πιθανότητα 0.1 οποιοδήποτε έγκυρο (η ακύρωση ενός άλματος γίνεται ανεξάρτητα από την ακύρωση άλλων). Έστω X το πλήθος των προσπαθειών που θα κάνει ο αθλητής ώσπου να πραγματοποιήσει ένα άλμα τουλάχιστον 8 μέτρα το οποίο θα κριθεί έγκυρο από τον κριτή. Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X; Ποια η μέση της τιμή;

4.8. Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού και έστω X ο αριθμός των ρίψεων μέχρι πριν την εμφάνιση για πρώτη φορά της ένδειξης «1». Στη συνέχεια, από ένα κουτί που περιέχει 7 κόκκινα και 3 πράσινα σφαιρίδια επιλέγουμε τυχαία με επανάθεση X σφαιρίδια και έστω Y ο αριθμός των πράσινων σφαιριδίων που επιλέγονται. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y = 0)$. [Αν συμβεί να έχουμε $X = 0$, τότε δεν γίνεται κάποια εξαγωγή από το κουτί, και επομένως $Y = 0$.]

4.9. Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι για πρώτη φορά να εμφανιστεί η ένδειξη «5» και έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να συμβεί αυτό. Να βρείτε:

(α) Τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών, τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X, και τη διασπορά της.
(β) Την πιθανότητα να μην εμφανιστεί η ένδειξη «3», αν είναι γνωστό ότι το «5» εμφανίστηκε (για πρώτη φορά) στην k δοκιμή (για $k \in \mathbb{N}^+$).
(γ) Την πιθανότητα να εμφανιστεί το «3» (τουλάχιστον μία φορά).
(δ) Την πιθανότητα να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις «3» και «6» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά (πριν έρθει το «5»).

4.10. Έστω ότι η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0,1)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(t^X) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $|t| < 1/(1-p)$.

4.11. (Η ιδιότητα του αμνήμονα για τη γεωμετρική τυχαία μεταβλητή) Έστω ότι η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p \in (0,1)$. Να δειχθεί ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει ότι

$$\mathbf{P}(X > m+n | X > m) = \mathbf{P}(X > n).$$

4.12. Θεωρούμε ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Περιμένουμε ώσπου να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις 3 και 4. Για παράδειγμα, ένα δυνατό σενάριο των αποτελεσμάτων της ακολουθίας είναι

$$5, 1, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 6, 3$$

και τότε σταματάμε. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται (στο παράδειγμα, $X = 10$). Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X;

4.13. (α) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια συνεχώς μέχρι να εμφανιστεί το αποτέλεσμα $(6,6)$. Έστω X ο (τυχαίος) αριθμός ρίψεων που κάνουμε ώσπου να συμβεί αυτό. Ποια η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και ποια η μέση τιμή της;

(β) Στο ίδιο πείραμα όπως στο ερώτημα (α) σταματάμε τις ρίψεις όταν έχουμε δει όλες τις μεγάλες διπλές ζαριές, δηλαδή τις $(4,4), (5,5), (6,6)$. Έστω Y ο (τυχαίος) αριθμός ρίψεων που κάνουμε ώσπου να συμβεί αυτό. Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y;

4.14. (Ο αμνήμων τουρίστας) Ένας τουρίστας επιθυμεί να επισκεφθεί 4 πρωτεύουσες Α,Β,Γ,Δ. Διαλέγει μια στην τύχη και την επισκέπτεται την 1η μέρα. Τη 2η μέρα διαλέγει μια από τις 3 που δεν επισκέφθηκε την 1η μέρα. Την 3η μέρα διαλέγει μια από τις 3 που δεν επισκέφθηκε την 2η μέρα (αλλά μπορεί να ξαναεπισκεφθεί αυτή που επισκέφθηκε την 1η μέρα). Βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των ημερών Ν μέχρι να έχει επισκεφθεί όλες τις πρωτεύουσες τουλάχιστον μία φορά.

4.15. (Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε απο τα n διαφορετικά είδη. Ποια είναι η μέση τιμή μ_n του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι απο κάθε είδος; Ποια είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της μ_n για $n \to \infty$;

Υπόδειξη: Έστω Y_i η αγορά κατά την οποία βρίσκουμε το i-στο νέο κουπόνι. Ζητάμε την $E(Y_n)$. Ποια είναι η κατανομή καθεμίας από τις διαφορές $Y_2 - Y_1, \ldots, Y_n - Y_{n-1}$;

4.16. Κατασκευάζουμε έναν αριθμό $x = 0.a_1a_2a_3...$ στο $[0,1)$ επιλέγοντας τα δεκαδικά του ψηφία απο αριστερά προς τα δεξιά το ένα μετά το άλλο απο το $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ομοιόμορφα. Στον αριθμό που σχηματίζεται ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός δεκαδικών ψηφίων

(α) Πρίν απο την εμφάνιση για πρώτη φορά του ψηφίου 7.

(β) Πριν την εμφάνιση για πρώτη φορά ενός απο τα ψηφία 2, 4, 6.
(γ) Πριν την 8η εμφάνιση του ψηφίου 4.
(δ) Μέχρι την 4η εμφάνιση ζυγού ψηφίου.
(ε) Μέχρι την εμφάνιση και των τριών ψηφίων 3, 5, 6.

Poisson

4.17. Ο αριθμός των ληστειών που γίνονται σε όλα τα καταστήματα της τράπεζας ABC σε έναν μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ μια ληστεία σε έναν μήνα ισούται με 12 φορές την πιθανότητα να συμβούν ακριβώς 2 ληστείες, να βρεθεί η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον μία ληστεία σε έναν μήνα.

4.18. Έστω ότι η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ) για κάποιο $\lambda > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(t^X) = e^{\lambda(t-1)}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (θεωρούμε ότι η έκφραση t^X ισούται με 1 όταν $t = X = 0$).

4.19. (Εκλέπτυνση της Poisson) Ο αριθμός X των πελατών που εισέρχονται σε ένα κατάστημα στη διάρκεια μιας μέρας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 120. Κάθε πελάτης, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, πληρώνει με κάρτα με πιθανότητα 1/4 ή με μετρητά (με πιθανότητα 3/4). Έστω Y ο αριθμός των πελατών που πληρώνει με κάρτα στη διάρκεια μιας ημέρας. Να δειχθεί ότι η Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $(1/4) \cdot 120 = 30$.

4.20. Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για μία χρονιά. Καθένας από τους οδηγούς προκαλεί ατύχημα τη δεδομένη χρονιά με πιθανότητα $p = 1/1000$. Έστω X ο αριθμός των οδηγών που προκαλούν ατύχημα εκείνη τη χρονιά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X \leq 1), P(X = 3), P(X = 10)$, και έπειτα οι προσεγγίσεις τους χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της κατανομής της X απο κατάλληλη κατανομή Poisson.

4.21. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$.
(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(Xh(X)) = \lambda \mathbf{E}(h(X+1)) \tag{1}$$

για κάθε $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.
(β) Χρησιμοποιώντας το (α) για τις συναρτήσεις $h(x) = 1$ και $h(x) = x\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ υπολογίστε τις $\mathbf{E}(X), \mathrm{Var}(X)$.

5. Ανεξαρτητες τυχαιες μεταβλητες

5.1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα τρεις φορές. Έστω X το πλήθος των εμφανίσεων της ένδειξης Κεφαλή στις δύο πρώτες ρίψεις και Y το πλήθος των εμφανίσεων της ένδειξης Κεφαλή στις δύο τελευταίες ρίψεις.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.

(β) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5.2. Έστω X, Y διακριτές ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια κατανομή (δηλαδή $f_X = f_Y$), πεπερασμένη μέση τιμή και πεπερασμένη διασπορά. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\{(X - Y)^2\} = 2\mathrm{Var}(X).$$

5.3. Έστω ότι δύο παίχτες A, B έχουν ο καθένας ένα νόμισμα που φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_{\mathrm{A}}, p_B \in (0, 1)$ αντίστοιχα. Ξεκινούν ταυτόχρονα να ρίχνουν ο καθένας το νόμισμά του τις χρονικές στιγμές 1, 2, …Αν σε κάποια ρίψη φέρουν «Κ» ταυτόχρονα, το παιχνίδι κρίνεται ισόπαλο. Διαφορετικά, κερδίζει αυτός που θα φέρει πρώτος «Κ». Θεωρούμε ότι όλες οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα το παιχνίδι να λήξει ισόπαλο.

(β) Αν $p_A = p_B$, υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσει ο A.

5.4. Έστω $p_1, p_2 \in (0, 1)$, X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p_i)$ για $i = 1, 2$. Να δειχθεί ότι η $Z := X_1X_2$ ακολουθεί την κατανομή Bernoulli(p) για κατάλληλη παράμετρο p την οποία και να προσδιορίσετε.

5.5. Έστω $p_1, p_2, p_3 \in (0, 1)$, X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \mathrm{Geom}(p_i)$ για $i = 1, 2, 3$. Να δειχθεί ότι η $Z := \min\{X_1, X_2, X_3\}$ ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με κατάλληλη παράμετρο p την οποία και να προσδιορίσετε.

5.6. Έστω $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1), X_2 \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_2)$. Για $n \in \mathbb{N}^+$ να δειχθεί ότι η $X_1|\{X_1 + X_2 = n\}$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n, \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) =: p$. Δηλαδή να δειχθεί ότι για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X_1 = k|\{X_1 + X_2 = n\}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

5.7. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή ώστε η X να είναι ανεξάρτητη από την X. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$, δηλαδή η X είναι σταθερή τυχαία μεταβλητή.

Απαντήσεις §1

1.1. (α) Υπάρχουν $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^7$ αριθμοί. Γιατί αν πούμε $A_1 A_2 \dots A_7$ τον αριθμό, τότε τον κατασκευάζουμε καθορίζοντας ένα ένα τα ψηφία από αριστερά προς δεξιά. Το A_1 έχει 9 επιλογές (δεν μπορεί να είναι 0) και έπειτα καθένα από τα $A_2, A_3, \dots, A_7$ έχει 9 επιλογές γιατί δεν μπορεί να ισούται με το προηγούμενό του.

(β) $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$.

1.2. $17 \times 7 \times 17 \times 7 \times 17 \times 7 + 7 \times 17 \times 7 \times 17 \times 7 \times 17$.

1.3. $10 \times 9 \times 8$.

1.4. $10 \times 10 \times 10$.

1.5. $10!$

1.6. $\binom{14}{5}$

1.7. $\binom{49}{6}$

1.8. $\left[{6 \atop 15}\right] = \binom{20}{15}$

$\left[{n \atop k}\right]$ είναι το σύμβολο που χρησιμοποιείται στην ελληνική βιβλιογραφία για τους συνδυασμούς με επανάληψη των n ανά k. Ισούται με $\binom{n+k-1}{k}$. Στη διεθνή βιβλιογραφία χρησημοποιείται το σύμβολο $\left(\binom{n}{k}\right)$.

1.9. $\left[{4 \atop 10}\right] = \binom{13}{10}$

1.10. $\left[{11 \atop 20}\right]$

1.11. (α) $8!$

(β) $2 \times (7!)$ γιατί αντιμετωπίζουμε τους Α, Β ως ένα άτομο, οπότε έχουμε 7 «άτομα» να μεταθέσουμε. Έπειτα πολλαπλασιάζουμε επί 2 επειδή οι Α, Β μπορούν να καθίσουν ως Α, Β ή ως Β, Α.

(γ) $2 \times 4! \times 4!$ γιατί η σειρά μπορεί να ξεκινήσει με άντρα ή με γυναίκα (για αυτό το 2) και αν ξεκινάει με άντρα, τότε οι θέσεις 1, 3, 5, 7 θα καταλαμβάνονται από άνδρες (4! τρόποι) ενώ οι 2, 4, 6, 8 από γυναίκες (4! τρόποι).

(δ) $4! \times 5!$ γιατί αντιμετωπίζουμε τους 5 άνδρες ως ένα άτομο και πρώτα μεταθέτουμε 4 «άτομα» ενώ μετά μεταθέτουμε τους 5 άνδρες.

(ε) $4!(2!)^4$

1.12. $\binom{6}{2}\binom{43}{4}$. Ξεκινώντας να κατασκευάσουμε μια εξάδα όπως αυτή που περιγράφεται, έχουμε $\binom{6}{2}$ τρόπους να διαλέξουμε ποιοι είναι οι δύο αριθμοί που θα είναι κοινοί με την εξάδα του παίχτη. Έπειτα, επιλέγουμε τα υπόλοιπα 4 στοιχεία της από τους 43 αριθμούς που είναι διαφορετικοί από αυτούς του παίχτη.

1.13. $\binom{8}{6}(8)_6 6! = (8)_6 \cdot (8)_6$. Ας το δούμε με βάση την πρώτη έκφραση. Για μια τοποθέτηση, πρώτα επιλέγουμε 6 από τις 8 κάθετες της σκακιέρας (έχουν γράμματα Α, Β, ..., Η, αυτό γίνεται με $\binom{8}{6}$ τρόπους). Μετά, σε κάθε κάθετη επιλέγουμε το οριζόντιο ύψος που θα τοποθετηθεί πύργος, δηλαδή επιλέγουμε έναν αριθμό από το 1 ως το 8 (έτσι αριθμούνται οι οριζόντιες γραμμές στη σκακιέρα). Αυτό γίνεται με $(8)_6$ τρόπους. Έτσι, έχουμε επιλέξει τις 6 θέσεις που θα τοποθετηθούν πύργοι, και έπειτα υπάρχουν 6! τρόποι να τοποθετηθούν οι 6 πύργοι σε αυτές τις θέσεις.

1.14. Για $k = 2, 5, 7$, ορίζουμε

$$A_k := \{i \in \{1, 2, \dots, 280\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } k\}.$$

Ζητάμε την πληθικότητα του συνόλου $A_2 \cup A_5 \cup A_7$. Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A_2 \cup A_5 \cup A_7) &= \mathrm{N}(A_2) + \mathrm{N}(A_5) + \mathrm{N}(A_7) - \mathrm{N}(A_2 \cap A_5) - \mathrm{N}(A_2 \cap A_7) - \mathrm{N}(A_5 \cap A_7) \\ &+ \mathrm{N}(A_2 \cap A_5 \cap A_7) \\ &= [280/2] + [280/5] + [280/7] \\ &- [280/10] - [280/14] - [280/35] + [280/70] \\ &= 140 + 56 + 40 - 28 - 20 - 8 + 4 = 148. \end{aligned}$$

Οι αγκύλες δηλώνουν ακέραιο μέρος.

1.15. $7!/7 = 6!$. Αυτό γιατί κάθε μία τοποθέτηση στο τραπέζι δίνει 7 τοποθετήσεις σε ευθεία γραμμή. Για παράδειγμα, η (Φ3, Φ4, Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6), δίνει τις
Φ3, Φ4, Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6,
Φ4, Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6, Φ3,
Φ7, Φ1, Φ5, Φ2, Φ6, Φ3, Φ4,
κ.ο.κ.
Η απεικόνιση αυτή από κυκλικές τοποθετήσεις σε τοποθετήσεις σε ευθεία είναι 1 προς 7. Αρα, αν πούμε C_7 το πλήθος κυκλικών τοποθετήσεων, πρέπει $7 \cdot C_7 = 7!$, που δίνει αυτό που ισχυριστήκαμε.

1.16.

$$\frac{(7)_4}{(9)_4}$$

1.17.

$$\frac{(100)_5(95)^5}{100^{10}}$$

1.18. (α) Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων απονομής των 8 επάθλων είναι

$$23 \times 22 \times 21 \times \binom{20}{5}.$$

Γιατί έχουμε 23 επιλογές για το άτομο που θα πάρει τα 2000 ευρώ, έπειτα για κάθε τέτοια επιλογή έχουμε 22 επιλογές για το άτομο που θα πάρει τα 1500 ευρώ, έπειτα για καθεμία από τις προηγούμενες επιλογές έχουμε 21 επιλογές για το άτομο που θα πάρει τα 1000 ευρώ, και τέλος έχουμε $\binom{20}{5}$ τρόπους να επιλέξουμε τα 5 άτομα από τα υπόλοιπα 20 που θα πάρουν από 500 ευρώ το καθένα. Έχουμε συνδυασμούς γιατί αυτά τα 5 έπαθλα δεν είναι διακρίσιμα.
(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times \binom{13}{5}}{23 \times 22 \times 21 \times \binom{20}{5}}.$$

Η δικαιολόγηση για το ότι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι ο αριθμός στον αριθμητή γίνεται όπως και στο ερώτημα (α).

1.19. (α) $\binom{28}{10}$
(β) Η πρώτη μέρα μιας δεκάδας διαδοχικών μερών μπορεί να είναι μία από τις μέρες $1, 2, \dots, 19$ και μόνον αυτές. Άρα υπάρχουν ακριβώς 19 ευνοϊκές δεκάδες, και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{19}{\binom{28}{10}}$$

1.20. (α) $9/9^6$. (β) $(9)_6/9^6$.

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{9 \times 8 \times \binom{6}{2}}{9^6}$$

Γιατί για το ψηφίο, ας το πούμε Α, που θα εμφανίζεται 2 φορές έχουμε 9 επιλογές, για το άλλο ψηφίο έχουμε 8 επιλογές, και έπειτα επιλέγουμε τις δύο θέσεις (από τις έξι του αριθμού) που θα τοποθετηθεί το ψηφίο Α. Οι υπόλοιπες τέσσερις θέσεις θα καταληφθούν από το άλλο ψηφίο.

1.21. (a) Η πιθανότητα είναι

$$\frac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}.$$

Το πείραμα που εξετάζουμε είναι οι πρώτες r διαδόσεις. Για τις δυνατές επιλογές, σε κάθε μία από τις r διαδόσεις, το άτομο έχει n επιλογές. Για τις ευνοϊκές επιλογές, το πρώτο άτομο έχει n επιλογές, ενώ καθένα από τα επόμενα $r-1$ άτομα έχει $n-1$ επιλογές γιατί από τους $n+1$ κατοίκους της πόλης, το άτομο δεν μπορεί να κάνει την διάδοση στον εαυτό του ούτε στο άτομο που την ξεκίνησε $(n-1 = n+1-2)$.

(b) Για αυτό το ενδεχόμενο το πλήθος των δυνατών επιλογών είναι πάλι n^r (είμαστε στο ίδιο πείραμα, στον ίδιο δειγματικό χώρο όπως στο προηγούμενο ερώτημα), ενώ το πλήθος των ευνοϊκών επιλογών είναι $(n)_r$. Γιατί κάθε διάδοση στην οποία δεν έχουμε επαναλήψεις αντιστοιχεί σε μία διάταξη των n ατόμων[4] ανά r (και απλοϊκά: Ο πρώτος ψιθυριστής έχει n επιλογές, ο δεύτερος $n-1$, κλπ). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{(n)_r}{n^r}.$$

1.22. (α)

$$\Omega := \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \{1, 2, \dots, n\}^k.$$

Ο αριθμός a_i λέει σε ποια στάση κατεβαίνει ο φοιτητής i. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από διατεταγμένες k-αδες γιατί οι φοιτητές είναι διαφορετικά αντικείμενα.

(β) $N(\Omega) = n^k$.

(γ) Έστω A το ενδεχόμενο σε μία τουλάχιστον στάση να αποβιβαστούν τουλάχιστον δύο φοιτητές (δηλαδή A είναι το σύνολο των k-αδων που ανήκουν στο Ω και στις οποίες τουλάχιστον δύο απο τις συντεταγμένες τους είναι ίδιες, π.χ., $a_2 = a_5$). Τότε $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(n)_k}{n^k}$.

1.23. Έστω A το ενδεχόμενο στην ερώτηση. Τότε

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \times (364)^{k-1}}{(365)^k} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{k-1}.$$

Αυτό γιατί, κατά τον υπολογισμό της $P(A^c)$, στα ευνοϊκά αποτελέσματα, ο a_1 έχει 365 επιλογές, και για κάθε επιλογή του, καθένας από τους υπόλοιπους $k-1$ μαθητές έχει 364 επιλογές.

1.24. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{365\binom{100}{2}(364)_{98}}{365^{100}}.$$

Γιατί για την κατασκευή ενός ευνοϊκού ενδεχομένου έχουμε 365 τρόπους να επιλέξουμε τη μέρα που θα έχουν γεννέθλια τα δύο άτομα, $\binom{100}{2}$ τρόπους να επιλέξουμε ποια δύο άτομα θα έχουν γεννέθλια την ίδια μέρα, και τέλος $(364)_{98}$ τρόπους για την επιλογή των ημερομηνιών γέννησης για τους υπόλοιπους 98 ώστε αυτές οι ημερομηνίες να ικανοποιούν την απαίτηση της εκφώνησης.

[4] Εξαιρούμε αυτόν που αρχίζει τη διάδοση

1.25. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{5!\,6!4!3!7!10!}{30!}.$$
Το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι 30!. Για να παραγάγουμε μια ευνοϊκή τοποθέτηση αποφασίζουμε πρώτα τη σειρά με την οποια θα μπούν οι 5 ομάδες βιβλίων. Έχουμε 5! τρόπους για αυτό, π.χ., τοποθετούμε από αριστερά προς τα δεξιά στο ράφι Φυσική, Μαθηματικά, Ιστορία, Ξένες γλώσσες, Λεξικά. Έπειτα, μέσα στην ομάδα των βιβλίων μαθηματικών έχουμε 6! τρόπους να τα τοποθετήσουμε, ανάλογος υπολογισμός ισχύει και για τις υπόλοιπες ομάδες βιβλίων. Έτσι προκύπτει με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμητής του πιο πάνω κλάσματος.

1.26. Είναι πιο βολικό να κοιτάξουμε τη μοιρασιά μόνο μέχρι το r βήμα. Και τα δύο ενδεχόμενα αφορούν κάτι που εξαρτάται μόνο από τα βήματα $1, 2, \ldots r$.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{(n-1)_{r-1}\times 1}{(n)_r} = \frac{1}{n}.$$
Κάθε μοίρασμα κομματιών στα πρώτα r άτομα είναι μία διάταξη των n κομματιών ανά r. Έτσι προκύπτει ο παρονομαστής. Ένα μοίρασμα που δίνει σε καθένα από τα πρώτα $r-1$ άτομα ένα κομμάτι που δεν έχει το νόμισμα είναι μία διάταξη των $n-1$ κομματιών που δεν έχουν νόμισμα ανά $r-1$. Έπειτα για το r κομμάτι που δίνεται, υπάρχει μόνο μία ευνοϊκή δυνατότητα. Έτσι προκύπτει ο αριθμητής.

Καλό είναι να δει κανείς αυτούς τους υπολογισμούς και εξ' αρχής, χωρίς επίκληση του τύπου των διατάξεων, δηλαδή με απόδειξη του στο συγκεκριμένο σενάριο.

(β) Τώρα τα ευνοϊκά μοιράσματα είναι εκείνα στα οποία τα πρώτα κομμάτια δεν περιέχουν αυτό με το νόμισμα. Βρίσκουμε όπως πριν την πιθανότητα $(n-1)_r/(n)_r = (n-r)/n$.

1.27. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{(r)_{n-1}(n-1)}{r^n}.$$
Γιατί για κάθε βώλο έχουμε r επιλογές (σε πιό δοχείο θα πάει), έτσι το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι r^n. Για την κατασκευή μιας ευνοϊκής τοποθέτησης έχουμε κατ' αρχάς μία διάταξη των r δοχείων ανά $n-1$ που αντιστοιχεί στην τοποθέτηση των πρώτων βώλων σε διαφορετικά δοχεία. Έπειτα, ο n-οστος βώλος έχει $n-1$ επιλογές, γιατί πρέπει να πάει σε ένα ήδη κατειλημμένο δοχείο, και υπάρχουν $n-1$ τέτοια.

Επίσης θα μπορούσαμε να κάνουμε τον τελευταίο υπολογισμό απο την αρχή. Ο πρώτος βώλος έχει r επιλογές, ο δεύτερος $r-1$, ..., ο $n-1$ έχει $r-(n-2) = r-n+2$. Ο τελευταίος, $n-1$ επιλογές. Η πολλαπλασιαστικη αρχή δίνει $r(r-1)\cdots(r-n+2)(n-1)$, το οποίο ισούται με $(r)_{n-1}(n-1)$.

Σημείωση: Αν $n \geq r+2$, τότε ξέρουμε εκ των προτέρων ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0. Αυτό δίνει και ο τύπος που βρήκαμε.

1.28. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{\binom{100}{10}\binom{200}{90}}{\binom{300}{100}}.$$
Ως δειγματικό χώρο Ω παίρνουμε τα υποσύνολα του $\{1, 2, ..., 300\}$ με 100 στοιχεία (τα στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα). Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή το $N(\Omega)$, ισούται με τον παρονομαστή του πιο πάνω κλάσματος. Ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο με 10 άσπρα και 90 μαύρα σφαιρίδια. Για να το φτιάξουμε πρέπει να επιλέξουμε 10 μαύρα σφαιρίδια και 90 άσπρα. Για την επιλογή των πρώτων έχουμε $\binom{100}{10}$ επιλογές ενώ για την επιλογή των δεύτερων έχουμε $\binom{200}{90}$ επιλογές. Έπειτα εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική αρχή και προκύπτει ο αριθμητής του κλάσματος.

1.29. (α), (β). Τα πρώτα δύο ερωτήματα λύνονται όπως στην προηγούμενη άσκηση και δίνουν τις απαντήσεις

$$\frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}} \quad \text{και} \quad \frac{\binom{25}{2}\binom{30}{3}\binom{945}{10}}{\binom{1000}{15}}$$

αντίστοιχα.

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{945}{4}\left\{\binom{55}{11}-\binom{30}{11}-\binom{25}{1}\binom{30}{10}\right\}}{\binom{1000}{15}}.$$

Στον αριθμητή θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των υποσυνόλων των 1000 σφαιριδίων με 15 στοιχεία που περιέχουν ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον δύο μαύρα σφαιρίδια. Για την επιλογή των κόκκινων σφαιριδίων έχουμε $\binom{945}{4}$ επιλογές. Τα υπόλοιπα 11 σφαιρίδια πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο S των 55 μη κόκκινων σφαιριδίων (25 μαύρα, 30 άσπρα). Έστω $N(k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του S με k μαύρα και $11-k$ άσπρα σφαιρίδια. Ο αριθμός υποσυνόλων του S καθένα από τα οποία έχει 11 στοιχεία από τα οποία τουλάχιστον 2 είναι μαύρα ισούται με

$$\binom{55}{11}-N(0)-N(1)=\binom{55}{11}-\binom{30}{11}-\binom{25}{1}\binom{30}{10}.$$

Δηλαδη από τον αριθμό όλων των υποσυνόλων του S με 11 στοιχεία αφαιρούμε το πλήθος αυτών που δεν έχουν την επιθυμητή σύσταση.

1.30. Το πλήθος των δυνατών κατανομών είναι 4^{13}. Για να φτιάξουμε μία ευνοϊκή κατανομή επιλέγουμε πρώτα τους 3 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην πρώτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{13}{3}$ τρόπους . Έπειτα επιλέγουμε τους 4 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στη δεύτερη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{10}{4}$ τρόπους (γιατί ήδη τρείς έχουν φύγει για την πρώτη στάση και έχουν μείνει 10). Επιλέγουμε τους 4 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην τρίτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{6}{4}$ τρόπους. Τέλος, επιλέγουμε τους 2 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην τέταρτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{2}{2}=1$ τρόπους. Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των ευνοϊκών τρόπων είναι

$$\binom{13}{3}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2}=\frac{13!}{3!10!}\frac{10!}{4!6!}\frac{6!}{4!2!}\frac{2!}{2!0!}=\frac{13!}{3!4!4!2!}.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1}{4^{13}}\frac{13!}{3!4!4!2!}.$$

1.31. Το πλήθος των δυνατών αποβιβάσεων είναι n^k. Όλες οι ευνοϊκές αποβιβάσεις φτιάχνονται ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα το ποια στάση θα έχει τους 3 φοιτητές (n επιλογές), επιλέγουμε τους 3 φοιτητές που αποβιβάζονται εκεί ($\binom{k}{3}$ επιλογές), αφήνουμε καθέναν από τους υπόλοιπους $k-3$ φοιτητές να επιλέξει τη στάση που θα αποβιβαστεί, αλλά δεν επιτρέπονται επαναλήψεις ($(n-1)_{k-3}$ επιλογές). Με αυτή τη διαδικασία παίρνουμε όλες τις ευνοϊκές αποβιβάσεις, και καμία τους δεν προκύπτει πάνω από μία φορά. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{n\binom{k}{3}(n-1)_{k-3}}{n^k}.$$

1.32. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{60}{5}}{(60)_5}=\frac{1}{5!}.$$

Ένα δυνατό αποτέλεσμα $(k_1, k_2, \dots, k_5)$ είναι ακριβώς μια διάταξη των 60 ανά 5. Έτσι προκύπτει ο παρονομαστής. Σε ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα, δηλαδή μια πεντάδα $(k_1, k_2, \dots, k_5)$ με $k_1 < k_2 < \cdots < k_5$ αντιστοιχούμε το υποσύνολο $\{k_1, k_2, \dots, k_5\}$ του $\{1, 2, \dots, 60\}$ με 5 στοιχεία. Αυτή η αντιστοίχιση είναι 1-1 και επί (αν μας δώσουν ένα υποσύνολο με 5 στοιχεία, τότε βρίσκουμε τη διατεταγμένη εξάδα που το παρήγαγε βάζοντας στη σειρά τα 5 δοσμένα στοιχεία).

(β) Από κάθε ευνοϊκή περίπτωση $(k_1, k_2, \dots, k_5)$ του (α) παράγονται 4! της περίπτωσης μας. Όσες και οι μεταθέσεις των (k_1, k_2, k_3, k_4) γιατί η διάταξη των πρώτων τεσσάρων αποτελεσμάτων δεν μας ενδιαφέρει. Έχουμε βέβαια εξασφαλίσει ότι και τα τέσσερα είναι μικρότερα από το k_5. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{60}{5}4!}{(60)_5} = \frac{1}{5}.$$

Τα (α), (β) αποδεικνύονται επίσης και με ένα επιχείρημα συμμετρίας.

1.33. Έστω $X =$ πλήθος εμφανίσεων του 6 στις n ρίψεις[5]. Έχουμε

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{n \cdot 1 \cdot 5^{n-1}}{6^n}.$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για τη ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6. Για εκείνη τη ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή για το αποτέλεσμα (πρέπει να ρθει 6), ενώ για κάθε μία από τις υπόλοιπες $n - 1$ ρίψεις υπάρχουν 5 επιλογές.

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{δεν εμφανίζεται καθόλου ο αριθμός } 1\}, \\ B &:= \{\text{εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές ο αριθμός } 6\} = \{X \geq 2\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$$

με $P(A) = (5/6)^n$ και

$$P(A \cap B^c) = P(A \cap \{X < 2\}) = P(A \cap \{X = 0\}) + P(A \cap \{X = 1\}) = \frac{4^n}{6^n} + \frac{n \cdot 1 \cdot 4^{n-1}}{6^n}.$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για τη ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6. Για εκείνη τη ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή για το αποτέλεσμα (πρέπει να ρθει 6) ενώ για κάθε μία από τις υπόλοιπες $n - 1$ ρίψεις υπάρχουν 4 επιλογές (απαγορεύεται το 1 και το 6).

1.34. (α) Θέτουμε $A_k := \{\text{όλες οι } n \text{ ενδείξεις είναι} \leq k\}$. Ζητάμε την πιθανότητα του $A_k \backslash A_{k-1}$. Επειδή $A_{k-1} \subset A_k$, βρίσκουμε κατά τα γνωστά

$$P(A_k \backslash A_{k-1}) = P(A_k) - P(A_{k-1}) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n.$$

Για το υπολογισμό του A_k, παρατηρούμε ότι καθένα από τα n ζάρια έχει 6 επιλογές (και έτσι προκύπτει ο παρονομαστής 6^n) και k ευνοϊκές επιλογές, τις $\{1, 2, \dots, k\}$.

(β) Θέτουμε $B_k := \{\text{όλες οι } n \text{ ενδείξεις είναι} \geq k\}$. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B_k \backslash B_{k+1}$. Επειδή $P(B_k) = ((7-k)/6)^n$ για κάθε $k \in \{1, \dots, 6\}$, βρίσκουμε $P(B_k \backslash B_{k+1}) = ((7-k)/6)^n - ((6-k)/6)^n$.

1.35. (a) Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A := \{\text{ο λαχνός 1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά}\}$. Τότε

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k}.$$

[5]Θα δούμε αργότερα ότι ο τυχαίος αριθμός X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = 1/6$.

Για τον υπολογισμό του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων στο ενδεχόμενο A^c, παρατηρούμε ότι έχουμε k εξαγωγές και σε καθεμία από αυτές έχουμε $n-1$ επιλογές (ο λαχνός 1 απαγορεύεται). Έτσι προκύπτει ο αριθμητής $(n-1)^k$.

(b) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_i := \{$ο λαχνός i επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά$\}$, $i = 1, 2, 3$. Τότε $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - P((A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c)$ και η τελευταία πιθανότητα, με βάση την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ισούται με

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) &= P(A_1^c) + P(A_2^c) + P(A_3^c) - P(A_1^c \cap A_2^c) - P(A_2^c \cap A_3^c) - P(A_1^c \cap A_3^c) \\ &+ P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 3\frac{(n-1)^k}{n^k} - 3\frac{(n-2)^k}{n^k} + \frac{(n-3)^k}{n^k}. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό π.χ. της $P(A_1^c \cap A_3^c)$, τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι οι διατεταγμένες k-αδες (με τις επαναλήψεις να επιτρέπονται) από το $\{1, 2, ..., n\}$ που δεν περιέχουν τους λαχνούς 1 και 3. Το πλήθος αυτών των k-αδων είναι $(n-2)^k$.

1.36. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. (α) Έστω

$$\begin{aligned} A_3 &:= \{i \in \{1, 2, \dots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 3\}, \\ A_5 &:= \{i \in \{1, 2, \dots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 5\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(A_3 \cup A_5) = P(A_3) + P(A_5) - P(A_3 \cap A_5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

Για τον υπολογισμό π.χ. της $P(A_3 \cap A_5)$. Το $A_3 \cap A_5$ περιέχει τους αριθμούς στο $\{1, 2, \dots, 1050\}$ που διαιρούνται και με το 3 και με το 5, ισοδύναμα, αυτούς που διαιρούνται με το 15. Το πλήθος τους είναι 70=[1050/15] (ακέραιο μέρος). Άρα $P(A_3 \cap A_5) = 70/1050 = 1/15$ καθότι η επιλογή είναι ομοιόμορφη (όλοι οι ακέραιοι στο $\{1, 2, \dots, 1050\}$ είναι ισοπίθανοι).

(β) Ορίζουμε επιπλέον

$$A_7 := \{i \in \{1, 2, \dots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 7\}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(A_3 \cup A_5 \cup A_7) &= P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_3 \cap A_5) - P(A_5 \cap A_7) - P(A_3 \cap A_7) \\ &+ P(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} + \frac{1}{105} = \frac{57}{105}. \end{aligned}$$

1.37. (α) $(n)_k/n^k$.

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}}{n^k} = \frac{1}{n^k}\binom{k}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}.$$

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων, που εμφανίζεται στον αριθμητή του πρώτου κλάσματος, μπορεί να το υπολογίσει κανείς όπως στην Άσκηση 1.30.

1.38. (α) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0.7$

(β) $\mathbf{P}((A \backslash B) \cup (B \backslash A)) = \mathbf{P}(A \backslash B) + \mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B) = 0.6$

(γ) $\mathbf{P}(\Omega \backslash (A \cap B)) = 1 - 0.1 = 0.9$

(δ) $\mathbf{P}(\Omega \backslash (A \cup B)) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 0.3$

1.39. (α) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0.1$

(β) $\mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0.5$

1.40. Το ενδεχόμενο είναι το $A\backslash(B\cup\Gamma)$. Η πιθανότητά του είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A\cap(B\cup\Gamma)) &= \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(A\cup B\cup\Gamma)-\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B\cup\Gamma)\\ &= \mathbf{P}(A\cup B\cup\Gamma)-\mathbf{P}(B\cup\Gamma).\end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται γιατί $\mathbf{P}(B\cup\Gamma)=\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(\Gamma)-\mathbf{P}(B\cap\Gamma)$.

Απαντήσεις §2

2.1. Έστω A το ενδεχόμενο και τα δύο ζάρια να φέρουν 6 και B το ενδεχόμενο τουλάχιστον ένα από τα δύο να φέρει 6. Ζητάμε την πιθανότητα $P(A|B)$. Αυτή ισούται με

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{P(A)}{1-P(B^c)}=\frac{1/36}{1-(5/6)^2}=\frac{1}{11}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $A\subset B$.

2.2. (α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και την (αριθμήσιμη) προσθετικότητα της πιθανότητας, βρίσκουμε ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$\frac{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

(β) Εφόσον $B\subset A$, έχουμε $P(A\mid B)=P(B)/P(B)=1$, ενώ $P(A\mid B^c)=P(A\cap B^c)/P(B^c)=P(\{\text{πρώτη ρίψη Κ, δεύτερη Γ}\})/(1-P(B))=(1/4)/(3/4)=1/3$. Αρα $P(A\mid B)+P(A\mid B^c)=4/3\neq 1$.

2.3. Ο δειγματικός χώρος ειναι ο $\Omega=\{KKK,KK\Gamma,K\Gamma K,K\Gamma\Gamma,\Gamma KK,\Gamma K\Gamma,\Gamma\Gamma K,\Gamma\Gamma\Gamma\}$ και όλα τα σημεία είναι ισοπίθανα με πιθανότητα 1/8. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\text{δυο τουλάχιστον κεφαλές}\mid\text{μια τουλάχιστον κεφαλή})=\frac{P(\text{δυο τουλάχιστον κεφαλές})}{P(\text{μια τουλάχιστον κεφαλή})}$$

$$=\frac{P(\{KKK,KK\Gamma,K\Gamma K,\Gamma KK\})}{P(\Omega\backslash\{\Gamma\Gamma\Gamma\})}=\frac{\frac{4}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{4}{7}.$$

Πολλοί κάνουν τον λάθος συλλογισμό

$$\begin{aligned}&P(\text{δυο τουλάχιστον Κ σε τρεις ρίψεις}\mid 1\text{ τουλάχιστον Κ σε 3 ρίψεις})\\ &=P(1\text{ τουλάχιστον Κ σε 2 ρίψεις})=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

2.4. (α) Επειδή $(A\cap B)\cap(A\cup B)=A\cap B$ και $(A\cap B)\cap A=A\cap B$, η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}\leq\frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

που ισχύει αφού $P(A\cap B)\geq P(A)$.

(β) Με χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&\frac{P(B)}{P(B\cup A)}\geq\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Leftrightarrow P(A)P(B)\geq P(A\cap B)P(A\cup B)\\ &\Leftrightarrow P(A)P(B)\geq P(A\cap B)\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\ &\Leftrightarrow P(A)P(B)-P(A)P(A\cap B)-P(B)P(A\cap B)+P(A\cap B)P(A\cap B)\geq 0\\ &\Leftrightarrow (P(A)-P(A\cap B))(P(B)-P(A\cap B))\geq 0.\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει προφανώς.

2.5. Ορίζουμε

$$A_i:=\{\text{στην } i \text{ εξαγωγή επιλέγουμε άσπρο σφαιρίδιο}\}$$

για κάθε $i\in\mathbb{N}^+$.

(α) Εφαρμόζουμε τον πολλαπλασιαστικό τύπο.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

(β) Για συντομία, θέτουμε B_k την τομή των πρώτων k από τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}^c, A_{n+2}^c \dots, A_{2n}^c$. Όμοια όπως στο (α), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_{2n}) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|B_1)\mathbf{P}(A_3|B_2) \cdots \mathbf{P}(A_n|B_{n-1})\mathbf{P}(A_{n+1}^c|B_n)\mathbf{P}(A_{n+2}^c|B_{n+1}) \cdots \mathbf{P}(A_{2n}^c|B_{2n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}\frac{2}{n+3} \cdots \frac{n}{2n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

2.6. Έστω B το ενδεχόμενο στην πρώτη εξαγωγή να βγήκε άσπρο σφαιρίδιο και A το ενδεχόμενο στη δεύτερη εξαγωγή να βγεί άσπρο σφαιρίδιο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για τη διαμέριση $\{B, B^c\}$ του χώρου πιθανότητας.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(B)P(A \mid B) + P(B^c)P(A \mid B^c) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{9} = \frac{41}{108}.$$

2.7. Θεώρημα ολικής πιθανότητας.

2.8. Έστω C_i (για $i = 1, 2, \dots, 6$) το ενδεχόμενο να έρθει τουλάχιστον μια φορά η ένδειξη i στις ρίψεις του ζαριού. Έστω επίσης A_k το ενδεχόμενο ο λαχνός που επιλέγουμε να έχει την ένδειξη k. Τότε $P(C_3 \cap C_5) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(C_3 \cap C_5|A_k)$ και για κάθε $k \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}P(C_3 \cap C_5|A_k) &= 1 - P(C_3^c \cup C_5^c|A_k) = 1 - \{P(C_3^c|A_k) + P(C_5^c|A_k) - P(C_3^c \cap C_5^c|A_k)\} \\ &= 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^k + \left(\frac{4}{6}\right)^k.\end{aligned}$$

Για $k = 1$ βέβαια $P(C_3 \cap C_5|A_k) = 0$ αφού το ζάρι ρίχνεται μόνο μια φορά, αλλά και ο προηγούμενος τύπος δίνει την ίδια απάντηση, 0, για $k = 1$, άρα περιέχει όλες τις περιπτώσεις. Έτσι, αθροίζοντας τις γεωμετρικές προόδους, βρίσκουμε

$$P(C_3 \cap C_5) = \frac{1}{n}\left\{n - 8 + 10\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}.$$

2.9. Θεώρημα ολικής πιθανότητας. Πείραμα σε τρία βήματα. Δεσμεύουμε ως προς το τι έγινε στα δύο πρώτα βήματα. Για $i = 1, 2, 3$ θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}A_i &:= \{\text{Το σφαιρίδιο της } i \text{ εξαγωγής είναι άσπρο}\}, \\ M_i &:= \{\text{Το σφαιρίδιο της } i \text{ εξαγωγής είναι μαύρο}\}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για τη διαμέριση

$$\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap M_2, M_1 \cap A_2, M_1 \cap M_2\}$$

του χώρου πιθανότητας.

$$\begin{aligned}P(A_3) &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap M_2)P(A_3 \mid A_1 \cap M_2) \\ &\quad + P(M_1 \cap A_2)P(A_3 \mid M_1 \cap A_2) + P(M_1 \cap M_2)P(A_3 \mid M_1 \cap M_2) \\ &= \frac{k}{n}\frac{k}{n}\frac{k}{n} + \frac{k}{n}\frac{(n-k)}{n}\frac{(k+1)}{n} + \frac{(n-k)}{n}\frac{(k+1)}{n}\frac{(k+1)}{n} + \frac{(n-k)}{n}\frac{(n-k-1)}{n}\frac{(k+2)}{n}.\end{aligned}$$

2.10. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}A &:= \{\text{ένα άτομο ψηφίζει το κόμμα } X\} \\ \Sigma &:= \{\text{ένα άτομο συμμετέχει στη δημοσκόπηση}\}\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε τα εξής $\mathbf{P}(\Sigma|A) = 0.3, \mathbf{P}(\Sigma|A^c) = 0.8, \mathbf{P}(A|\Sigma) = 0.25$, και ζητάμε την $\mathbf{P}(A)$. Αυτές οι σχέσεις γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap \Sigma) &= 0.3\mathbf{P}(A)\\ \mathbf{P}(A^c \cap \Sigma) &= 0.8\mathbf{P}(A^c) = 0.8 - 0.8\mathbf{P}(A)\\ \mathbf{P}(A \cap \Sigma) &= 0.25\mathbf{P}(\Sigma)\end{aligned}$$

Η πρώτη και η τρίτη ισότητα δίνουν ότι $\mathbf{P}(\Sigma) = (0.3/0.25)\mathbf{P}(A) = (6/5)\mathbf{P}(A)$. Έπειτα, η δεύτερη και τρίτη ισότητα δίνουν

$$\mathbf{P}(\Sigma) = \mathbf{P}(A \cap \Sigma) + \mathbf{P}(A^c \cap \Sigma) = 0.8 - 0.8\mathbf{P}(A) + 0.25\mathbf{P}(\Sigma)$$

Δηλαδή, $0.75\mathbf{P}(\Sigma) = 0.8 - 0.8\mathbf{P}(A)$. Και εφόσον $\mathbf{P}(\Sigma) = (6/5)\mathbf{P}(A)$, βρίσκουμε ότι $\mathbf{P}(A) = 8/17 \approx 0.47$. Επομένως, το πραγματικό ποσοστό του κόμματος είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από αυτό που του δίνει η δημοσκόπηση.

2.11. Οι ενδείξεις τριών ζαριών έχουν άθροισμα 3 μόνο με έναν τρόπο, αν και τα τρία δείχνουν 1. Με δύο ζάρια, το άθροισμα είναι 3 με δύο τρόπους, 1 και 2 ή 2 και 1. Έτσι, το θεώρημα ολικής πιθανότητας δίνει ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{1}{4}\frac{2}{36} + \frac{3}{4}\frac{1}{6^3} = \ldots = \frac{5}{8 \times 36}.$$

Πρέπει να ορίσει κανείς σχολαστικά τα κατάλληλα ενδεχόμενα. Πιο πάνω γράψαμε μόνο τον τελικό υπολογισμό.

2.12. Έστω τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned}A &:= \{\text{τα τέσσερα σφαιρίδια είναι άσπρα}\},\\ B_1 &:= \{\text{επιλέχθηκε η κάλπη } X\},\\ B_2 &:= \{\text{επιλέχθηκε η κάλπη } Y\}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes.

$$P(B_1 \,|\, A) = \frac{P(B_1)P(A \,|\, B_1)}{P(B_1)P(A \,|\, B_1) + P(B_2)P(A \,|\, B_2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4}}{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4} + \frac{1}{2}\frac{9^4}{10^4}} \approx 0.08$$

Η πιθανότητα αυτή είναι μικρή και αυτό δεν μας κάνει εντύπωση. Το να εξαχθούν 4 άσπρα σφαιρίδια είναι πολύ πιθανότερο αν οι εξαγωγές γίνονται από την Y από ότι από την X.

2.13. Τύπος Bayes. Ορίζοντας κατάλληλα ενδεχόμενα υπολογίζουμε τη ζητούμενη πιθανότητα ως

$$\frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.01} = \frac{95}{95 + 999} \approx 0.086$$

2.14. Έστω A το ενδεχόμενο ο κλέφτης να άνοιξε το συρτάρι Σ_1 και B το ενδεχόμενο να πήρε δύο χρυσά νομίσματα. (α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για τη διαμέριση $\{A, A^c\}$ του χώρου πιθανότητας.

$$P(B) = P(A)P(B \,|\, A) + P(A^c)P(B \,|\, A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{17}{120}.$$

(β) Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \,|\, A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{17}{120}} = \frac{12}{17}.$$

Την πιθανότητα $P(B)$ την υπολογίσαμε στο ερώτημα (α).

2.15. Τύπος Bayes. Θέτουμε $C_k := \{$ο οδηγός ανήκει στην κατηγορία $A_k\}$ για $k = 1, 2, \ldots, 10$, και $B := \{$ο οδηγός αναφέρει ατύχημα$\}$.

$$P(C_k \mid B) = \frac{P(B \cap C_k)}{P(B)} = \frac{P(B \mid C_k)P(C_k)}{\sum_{j=1}^{10} P(B \mid C_j)P(C_j)} = \frac{\frac{k}{100}\frac{k}{55}}{\sum_{j=1}^{10} \frac{j}{100}\frac{j}{55}} = \frac{k^2}{385}.$$

2.16. (α) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \Rightarrow \mathbf{P}(B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$.

(β) Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού και τον ορισμό της ανεξαρτησίας, και βρίσκουμε

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(A)).$$

Επομένως

$$\mathbf{P}(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(A)}{1 - \mathbf{P}(A)} = \frac{2}{5}.$$

2.17. $\mathbf{P}(A) = 1/6, \mathbf{P}(B) = 5^4/6^4, \mathbf{P}(A \cap B) = 5^3/6^4$, και ελέγχουμε ότι δεν είναι ανεξάρτητα.

2.18. (β) Τα A, B είναι θετικά συσχετισμένα ενώ τα A, C είναι αρνητικά συσχετισμένα.

2.19. Δείχνουμε μόνο το (α). Τα (β), (γ) έπονται από αυτό.

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί τα σύνολα $A \cap B, A \cap B^c$ είναι ξένα με ένωση το A. Στη δεύτερη, χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των A, B.

2.20. Έχουμε

$$P(A) = 1 - 2\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}, \ P(B) = \frac{1}{2^k} + \frac{k}{2^k} = \frac{k+1}{2^k}, \ P(A \cap B) = \frac{k}{2^k}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) &\Leftrightarrow \frac{k}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{k+1}{2^k}\right) \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \Leftrightarrow 2^{k-1} = k + 1 \Leftrightarrow k = 3. \end{aligned}$$

Άρα τα A, B είναι ανεξάρτητα μόνο για $k = 3$.

2.21. Δεν είναι ανεξάρτητα.

Πώς το σκεφτόμαστε: Ας θεωρήσουμε το ακραίο σενάριο που και τα δύο νομίσματα N_1, N_2 είναι κίβδηλα με $p_1 = 999/1000, p_2 = 1/1000$ και κάνουμε το πείραμα που αναφέρει η άσκηση. Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα δύο νομίσματα και έχουμε στα χέρια ένα νόμισμα του οποίου την πιθανότητα επιτυχίας **δεν ξέρουμε**. Το ρίχνουμε μία φορά και έστω ότι έρχεται Κ δηλαδή συμβαίνει το A_1. Τι καταλαβαίνουμε από αυτό; Προφανώς ότι κρατάμε το νόμισμα N_1 (δεν είμαστε σίγουροι αλλά έχουμε τεράστιο βαθμό βεβαιότητας). Αυτό επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του A_2. Ποντάρουμε με σιγουριά ότι και στη δεύτερη φορά θα έρθει Κ. Ενώ αν δεν βλέπαμε το πρώτο αποτέλεσμα, δεν θα ποντάραμε με μεγάλη σιγουριά ότι θα συμβεί το A_2. Δηλαδή $P(A_2|A_1) > P(A_2)$. Το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης μας έδωσε κάποια πληροφορία για την (άγνωστη) πιθανότητα επιτυχίας του νομίσματος που κρατάμε και άρα μια εκτίμηση για το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης.

Τότε τι σημαίνει το ότι πραγματοποιούμε δύο ανεξάρτητες ρίψεις? Σημαίνει ότι τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων είναι ανεξάρτητα **δεδομένου** ότι έχουμε επιλέξει το νόμισμα N_1 (ή το N_2). Δηλαδή

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \mid \text{έχουμε επιλέξει το } N_1) &= P(A_1 \mid \text{έχουμε επιλέξει το } N_1)P(A_2 \mid \text{έχουμε επιλέξει το } N_1) \\ &= p_1 p_1. \end{aligned}$$

Πρόκειται για ανεξαρτησία υπό συνθήκη (λέγεται και δεσμευμένη ανεξαρτησία), δες σελ. 115 στον S. Ross.

Η τυπική απόδειξη της μη ανεξαρτησίας: Επιστρέφουμε στο σενάριο της άσκησης και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$B_1 := \{\text{επιλέγω το νόμισμα } N_1\},$$
$$B_2 := \{\text{επιλέγω το νόμισμα } N_2\}.$$

Τότε

$$P(A_1 \cap A_2) = P(B_1)P(A_1 \cap A_2 \,|\, B_1) + P(B_2)P(A_1 \cap A_2 \,|\, B_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32},$$

και

$$P(A_1) = P(B_1)\, P(A_1 \,|\, B_1) + P(B_2)\, P(A_1 \,|\, B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}.$$

Όμοια, $P(A_2) = 5/8$. Και όπως περιμέναμε,

$$P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2).$$

Μάλιστα

$$\frac{P(A_2 \,|\, A_1)}{P(A_2)} = \frac{26}{25} > 1,$$

δηλαδή $P(A_2 \,|\, A_1) > P(A_2)$.

2.22. Έστω A το ενδεχόμενο ένα άτομο να πάσχει απο την ασθένεια α και B το ενδεχόμενο να πάσχει απο την ασθένεια β. Δίνεται ότι

$$P(A \backslash B) = 0.6/100,$$
$$P(B \backslash A) = 0.5/100,$$
$$P(A \cap B) = 0.2/100.$$

Βρίσκουμε ότι $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) = 0.8/100$, και όμοια, $P(B) = 0.7/100$. Τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

2.23. Έστω E_k το ενδεχόμενο ότι η k δοκιμή είναι επιτυχία, και $A_k (= E_k^c)$ το ενδεχόμενο ότι η k δοκιμή είναι αποτυχία.

(β) Για κάθε $n \geq 1$ φυσικό, έχουμε

$$P(\text{όλες οι δοκιμές δίνουν αποτυχίες}) \leq P(\text{οι πρώτες } n \text{ δοκιμές δίνουν μόνο αποτυχίες}) = (1-p)^n.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει απο το (α). Όμως $(1-p)^n \to 0$ για $n \to \infty$ επειδή $1 - p \in (0, 1)$.

(γ) Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1} \cap E_k) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_{k-1})P(E_k) = (1-p)^{k-1} p$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, E_k$.

(δ) Το να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ισοδυναμεί με το οι πρώτες $k-1$ δοκιμές να είναι αποτυχίες. Έτσι η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1}) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_{k-1}) = (1-p)^{k-1}.$$

2.24. Έστω $A_i := \{\text{κερδίζει το παιχνίδι ο } a_i\}$ για $i = 1, 2, 3$ και $B := \{\text{η πρώτη ρίψη είναικορώνα}\}$.

$$p_2 := P(A_2) = P(A_2 \cap B) + P(A_2 \cap B^c) = 0 + P(A_2 \,|\, B^c)P(B^c) = \frac{1}{2} p_1.$$

Αυτό γιατί δεδομένου ότι η πρώτη ρίψη ήταν γράμματα, το παιχνίδι είναι σαν να ξαναρχίζει, με τη θέση του a_1 να την παίρνει ο a_2. Όμοια $p_3 = p_2/2$. Από το (β) της Άσκησης 2.31, κάποια στιγμή θα έρθει κορώνα (άρα σίγουρα κάποιος θα κερδίσει), οπότε $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Βρίσκουμε έτσι το p_1.

Το p_1 υπολογίζεται και άμεσα ως εξής. Ο a_1 κερδίζει μόνο αν φέρει στην αρχή κορώνα ή αν φέρει γράμματα, οι επόμενοι δύο γράμματα (ώστε να έρχεται πάλι η σειρά του), και να κερδίσει στο νέο παιχνίδι που θα ξεκινήσει τότε. Δηλαδή,

$$p_1 = P(A_1) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(A_1 \mid B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}p_1.$$

Απαντήσεις §3

3.1.

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{R}} f_X(k) = \sum_{k=-5}^{5} f_X(k) = 11a$$

Άρα $a = 1/11$.
(β) $\mathbf{P}(X \geq 0.2) = \mathbf{P}(X \in \{1,2,3,4,5\}) = 5a = 5/11$.
(γ) Με χρήση του νόμου του αφηρημένου στατιστικού, έχουμε ότι η ζητούμενη μέση τιμή ισούται με

$$\sum_{k=-5}^{5} \log(|k|+1) f_X(k) = (\log 6 + \log 5 + \log 4 + \log 3 + \log 2 + \log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 + \log 6)/11$$
$$= (2\log 720)/11.$$

3.2. Αναγκαστικά, η συνάρτηση πιθανότητας της X θα έχει τη μορφή $f_X(-1) = x, f_X(0) = y, f_X(1) = z$, (με $x, y, z \in [0,1]$) και $f_X(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. Έχουμε $\mathbf{E}(X) = -x + z$, οπότε πρέπει $z = x$. Έχοντας $\mathbf{E}(X) = 0$, η διασπορά ισούται με $\mathbf{E}(X^2) = x + z = 2x$. Θέτουμε λοιπόν $x = a/2 \in [0,1]$ και επειδή $x + y + z = 1$, έπεται ότι $y = 1 - a \in [0,1]$, άρα η f_X έχει καθοριστεί πλήρως και ικανοποιεί τις ζητούμενες απαιτήσεις.

3.3. Πρέπει

$$1 = \sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x) = c\left(\sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{-|k|} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right) = c\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right) = c\,3$$

Άρα $c = 1/3$.

3.4. Στο (α) έχουμε $E(X^+) = E(X^-) = \infty$, δεν ορίζεται η μέση τιμή. Στο (β) έχουμε $E(X^+) < \infty, E(X^-) = \infty$, άρα $\mathrm{E}X = E(X^+) - E(X^-) = -\infty$.

3.5. (α) $f(t) := P(X = t) = (2/3)^{t-1}(1/3)$ αν $t \in \mathbb{N}^+ = \{1,2,...\}$ και $f(t) = 0$ αν $t \notin \mathbb{N}$.

(β) $P(X \in 2\mathbb{N}^+ - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) = ... = 3/5$.

(γ) Το παιχνίδι είναι δίκαιο αν και μόνο αν το μέσο κέρδος κάθε παίκτη είναι 0. Και αρκεί να ισχύει αυτό για τον Α αφού τα κέρδη των Α, Β αθροίζουν στο 0. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Α είναι $p_A = 3/5$ οπότε το μέσο του κέρδος είναι $p_A\beta - (1 - p_A)\alpha = (3\beta - 2\alpha)/5$, το οποίο είναι μηδέν ακριβώς όταν $\alpha = 3\beta/2$.

Το (β) βγαίνει επίσης όπως η Άσκηση 2.23 απο την Παράγραφο 2 αυτού του φυλλαδίου, δηλαδή με χρήση δεσμευμένης πιθανότητας. Για τη ζητούμενη πιθανότητα p δείχνουμε ότι $p = 1/3 + (2/3)\cdot(2/3)p$.

3.6. Έστω Z η πρώτη δοκιμή κατα την οποία εμφανίζεται η ένδειξη Κ. Τότε

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n P(Z = n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \infty.$$

Το παράδοξο είναι ότι ενώ η μέση τιμή είναι άπειρη και επομένως οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή είναι μεγάλη έκπτωση, κανείς δεν προτίθεται να δώσει μεγάλο ποσό για να παίξει. 50 Ευρώ θεωρείται ακριβή τιμή για το παιχνίδι.
Το παράδοξο διατυπώθηκε το 1713 από τον Nicolas Bernoulli. Διαβάστε λεπτομέρειες στο άρθρο της Wikipedia για το θέμα. http://en.wikipedia.org/wiki/St._ Petersburg_ paradox

3.7. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέσης τιμής βρίσκουμε $h(t) = t^2 - 2t\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X^2)$. Έπειτα μελετούμε αυτό το τριώνυμο ως προς τα ακρότατα.

3.8. Η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, και η X^a διακριτή τυχαία μεταβλητή μή αρνητική. Άρα η μέση τιμή της X^a υπάρχει (πεπερασμένη ή άπειρη) και δίνεται από τον τύπο

$$E(X^a) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x^a f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^a \frac{1}{k(k+1)}.$$

Η τελευταία σειρά είναι ουσιαστικά η $\sum_{k=1}^{\infty} k^{a-2}$ η οποία συγκλίνει ακριβώς για $a-2<-1$, δηλαδή $a<1$. Για την αυστηρή απόδειξη, χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης για τις δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} k^a/(k(k+1))$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{a-2}$.

3.9. (α) Για κάθε $i \in [365]$, θέτουμε $X_i = 1$ αν κάποιο από τα k άτομα έχει γενέθλια εκείνη την ημερομηνία ενώ διαφορετικά θέτουμε $X_i = 0$. Τότε

$$M = X_1 + X_2 + \cdots + X_{365}.$$

Για λόγους συμμετρίας, όλες οι X_i έχουν την ίδια κατανομή, είναι Bernoulli(p) με

$$\begin{aligned} p \ := \ & \mathbf{P}(\text{τουλάχιστον ένα από τα } k \text{ άτομα έχει γενέθλια τη μέρα 1}) \\ = \ & 1 - \mathbf{P}(\text{κανένα από τα } k \text{ άτομα δεν έχει γενέθλια τη μέρα 1}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^k \end{aligned}$$

Άρα $\mathbf{E}(M) = 365\mathbf{E}(X_1) = 365p$.

[Όταν το $k/365$ είναι μικρό, μια καλή προσέγγιση για το p είναι η εξής.

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^k \approx 1 - e^{-k/365} \approx \frac{k}{365}$$

Και τότε $\mathbf{E}(M) \approx k$. Αυτό είναι αναμενόμενο. Όταν το k είναι μικρό, τα k άτομα θα γεννηθούν διαφορετικές μέρες.]

(β)

$$\frac{k \times 364^{k-1}}{365^k}$$

(γ) Έστω $Y_i = 1$ αν τη μέρα $i \in [365]$ γεννιούνται τουλάχιστον δύο άτομα. Όπως στο (α), έχουμε $\mathbf{E}(N) = 365\mathbf{E}(Y_1) = 365p'$ με

$$\begin{aligned} p' \ := \ & 1 - \mathbf{P}(\text{τη μέρα 1 δεν έχει γενέθλια κάποιο άτομο από τα } k) \\ & - \mathbf{P}(\text{τη μέρα 1 έχει γενέθλια ακριβώς ένα άτομο από τα } k) \\ = \ & 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^k - \frac{k \times 364^{k-1}}{365^k} \end{aligned}$$

[Εδώ η προσέγγιση που έχουμε για k μικρό είναι

$$\frac{k}{365}\left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{k-1}\right) \approx \frac{k(k-1)}{365^2}.$$

Άρα $\mathbf{E}(N) \approx k(k-1)/365$. Αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1 ακριβώς όταν $k \geq 20$.]

(δ) Δίνουμε τις προσεγγίσεις με 4 δεκαδικά ψηφία των ακριβών τιμών.

$$\begin{aligned} &\text{Αν } k = 23, \text{ τότε } \mathbf{E}(M) = 22.3199, \mathbf{E}(N) = 0.6671 \\ &\text{Αν } k = 30, \text{ τότε } \mathbf{E}(M) = 28.8381, \mathbf{E}(N) = 1.1324 \end{aligned}$$

Απαντήσεις §4

4.1. Η κατανομή είναι διωνυμική με παραμέτρους $n = 80, p = 1/10$ και άρα με μέση τιμή $np = 8$.

4.2. Έχουμε 90 ανεξάρτητες δοκιμές ενός πειράματος που έχει πιθανότητα επιτυχίας

$$\begin{aligned} p &= P(\text{η ένδειξη του B ξεπερνάει αυτήν του A κατα δύο μονάδες τουλάχιστον}) \\ &= \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος αριθμός ρίψεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 90$ και $p = 5/18$.

4.3. Έστω p η πιθανότητα ο σκοπευτής να πετύχει το στόχο σε μια δεδομένη βολή. Δίνεται ότι

$$\binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 3\binom{10}{3} p^3 (1-p)^7,$$

απ' όπου βρίσκουμε μετά απο απλοποιήσεις ότι $p = 12/19$.

(α) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4$.

(β) $P(X = 0) + P(X = 5) = (1-p)^5 + p^5$.

(γ)

$$P(X \leq 4 \,|\, X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)}{P(X \geq 2)}.$$

Ο παρονομαστής έχει υπολογιστεί στο (α). Ο αριθμητής ισούται με

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p).$$

4.4. Έστω S το πλήθος των επιβατών που δεν εμφανίζονται. Με βάση τα δεδομένα, η S είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή διωνυμική με παραμέτρους $n = 203, p = 0.05$ ($S = \sum_{i=1}^{203} \mathbf{1}_{A_i^c}$, αθροισμα ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή Bernoulli(p)). Ζητάμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(S < 3) &= P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \approx 0.00205803 \end{aligned}$$

4.5. Για την πρώτη μέση τιμή, υπολογίζουμε

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt+q)^n.$$

4.6. Επειδή κάθε φορά η σύνθεση της κάλπης είναι ίδια, σε κάθε εξαγωγή, η πιθανότητα το σφαιρίδιο να είναι μαύρο είναι $p = 20/(60+20) = 1/4$. Ονομάζουμε X τον αριθμό των δοκιμών ως την πρώτη εμφάνιση μαύρου σφαιριδίου. Η X είναι γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/4$.

(a) $P(X = 7) = (1-p)^6 p$.

(b) $P(X \geq 10) = P(\text{οι πρώτες 9 δοκιμές είναι αποτυχίες}) = (1-p)^9$.

(γ) $\mathrm{E}(X-1) = (1/p) - 1 = 3$.

4.7. Η πιθανότητα ο αθλητής να κάνει ένα άλμα τουλάχιστον 8 μέτρα και το οποίο θα κριθεί έγκυρο από τον κριτή είναι $0.3 \times 0.9 = 0.27$. Άρα η X ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 0.27$. Η μέση τιμή της X είναι $1/p \approx 3.703$.

4.8. Έστω $p_1 := 1/6, p_2 := 3/10$. Έχουμε πείραμα σε δύο στάδια. Επομένως δεσμεύουμε ως προς το τι συνέβη στο πρώτο βήμα και εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=0|X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_1(1-p_1)^k(1-p_2)^k \\ &= p_1 \sum_{k=0}^{\infty} \{(1-p_1)(1-p_2)\}^k = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.\end{aligned}$$

4.9. (α) Από τη θεωρία έχουμε ότι η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/6$. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι $f_X(x) = (1-p)^{x-1}p\mathbf{1}_{x\in\mathbb{N}^+}$, h μέση της τιμή είναι $1/p$, και η διασπορά $(1-p)/p^2$.

Για τα πιο κάτω ερωτήματα, συμβολίζουμε με A_i το γεγονός να εμφανιστεί η ένδειξη i τουλάχιστον μια φορά πριν εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 5, για $i = 1, 2, 3, 4, 6$.

(β)

$$\begin{aligned}P(A_3^c|X=k) &= \frac{P(A_3^c \cap \{X=k\})}{P(X=k)} \\ &= \frac{P(\text{Στις δοκιμές } 1,2,...,k-1 \text{ δεν εμφανίζεται 3 ή 5 και στην } k \text{ εμφανίζεται 5})}{(5/6)^{k-1}(1/6)} \\ &= \frac{(4/6)^{k-1}(1/6)}{(5/6)^{k-1}(1/6)} = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

(γ) $P(A_3) = 1 - P(A_3^c)$ και

$$\begin{aligned}P(A_3^c) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(A_3^c|X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-(2/3)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Άρα $P(A_3) = 1/2$.

Εναλλακτική λύση: Ζητάμε την πιθανότητα, σε μια άπειρη ακολουθία ρίψεων, να εμφανιστεί το 3 πριν το 5. Αυτή προφανώς ισούται με την πιθανότητα να εμφανιστεί το 5 πριν το 3 και το άθροισμά τους είναι 1 (γιατί οπωσδήποτε θα συμβεί ένα από αυτά τα δύο ξένα ενδεχόμενα). Άρα καθεμία από αυτές τις πιθανότητες ισούται με 1/2.

(δ)

$$\begin{aligned}P(A_3 \cap A_6) &= 1 - P(A_3^c \cup A_6^c) = 1 - \{P(A_3^c) + P(A_6^c) - P(A_3^c \cap A_6^c)\} \\ &= P(A_3^c \cap A_6^c) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_3^c \cap A_6^c \cap \{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $P(A_3^c) = P(A_6^c) = 1/2$ (συμμετρία και το προηγούμενο ερώτημα). Έπειτα, το ενδεχόμενο $A_3^c \cap A_6^c \cap \{K = k\}$ σημαίνει ότι στις k ρίψεις, οι πρώτες $k-1$ δεν φέρνουν τις ενδείξεις 3, 6, 5 ενώ η k είναι 5. Αυτό έχει πιθανότητα $(3/6)^{k-1}(1/6)$.

Εναλλακτική λύση: Ζητάμε την πιθανότητα, σε μια άπειρη ακολουθία ρίψεων, από τις ενδείξεις 3, 5, 6 τελευταία να εμφανιστεί η 5. Όμως καθεμία από τις τρεις ενδείξεις έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί τελευταία. Επομένως αυτή η πιθανότητα είναι 1/3.

4.10. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αφηρημένου στατιστικού, υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k(1-p)^{k-1}p = pt\sum_{k=1}^{\infty}\{t(1-p)\}^{k-1} = \frac{pt}{1-t(1-p)}.$$

4.11. Η X ικανοποιεί την $\mathbf{P}(X > k) = (1-p)^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως, η δεσμευμένη πιθανότητα στο αριστερό μέλος της ζητούμενης ισούται με

$$\frac{\mathbf{P}(X > m+n, X > m)}{\mathbf{P}(X > m)} = \frac{\mathbf{P}(X > m+n)}{\mathbf{P}(X > m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = \mathbf{P}(X > n).$$

4.12. Έστω X_1 := αριθμός δοκιμών ως την εμφάνιση ενός από τα 3, 4 και X_2 := αριθμός των επιπλέον δοκιμών ως την εμφάνιση του άλλου από τα 3, 4. Τότε

$$X_1 \sim \text{Γεωμετρική}(1/3),$$
$$X_2 \sim \text{Γεωμετρική}(1/6).$$

Αυτό γιατί η X_1 μετράει δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, με επιτυχία να σημαίνει εμφάνιση του 3 ή του 4. Η πιθανότητα μιας τέτοιας επιτυχίας είναι 2/6=1/3. Έπειτα, αν π.χ. εμφανίζεται πρώτο το 4, η X_2 μετράει δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, με επιτυχία τώρα να σημαίνει την εμφάνιση του 3. Η πιθανότητα αυτής της επιτυχίας είναι 1/6.
Επειδή $X = X_1 + X_2$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = (1/3)^{-1} + (1/6)^{-1} = 3 + 6 = 9.$$

4.13. (α) Η X είναι Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p = 1/36$. Άρα η συνάρτηση πιθανότητάς της είναι $f_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ αν $k \in \mathbb{N}^+$ και $f_X(k) = 0$ αν $k \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}^+$.
(β) Όμοια όπως την προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(Y) = 1/(3/36) + 1/(2/36) + 1/(1/36) = 12 + 18 + 36 = 66$.

4.14. $N = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3$, όπου Y_i ο αριθμός των ημερών για να επισκεφθεί ακόμα μια πρωτεύουσα που δεν έχει επισκεφθεί όταν έχει ήδη επισκεφθεί i διαφορετικές πρωτεύουσες.
Προφανώς, $Y_0 = Y_1 = 1$.Επίσης

$$Y_2 \sim \text{Γεωμετρική}(2/3),$$
$$Y_3 \sim \text{Γεωμετρική}(1/3).$$

Οπότε $E(N) = 1 + 1 + \frac{3}{2} + 3 = \frac{13}{2}$.

4.15. Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών ώσπου να δούμε και τα n διαφορετικά κουπόνια, και για $i = 1, 2, \dots, n$, έστω X_i ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται από τη στιγμή που έχουμε δεί $i-1$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι τη στιγμή που θα δούμε ένα νέο διαφορετικό απο τα προηγούμενα. Η X_i είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p_i = (n-(i-1))/n$, και επομένως με μέση τιμή $1/p_i = n/(n-i+1)$. Επειδή $X = X_1 + \dots + X_n$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \approx n \log n$$

για μεγάλο n. Περισσότερα για την τελευταία προσέγγιση δες στην Πρόταση 21.21, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙ, Νεγρεπόντης-Γιωτόπουλος-Γιαννακούλιας.

4.16. (α) $10 - 1 = 9$. (β) $10/3 - 1 = 7/3$. (γ) $8 \cdot 10 - 1$. Αρνητική διωνυμική. (δ) $4 \cdot 2$. Αρνητική διωνυμική.
(ε) Εδω έχουμε το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών χωρίς να ζητάμε να δούμε όλα τα διαφορετικά κουπόνια, απλώς τρία συγκεκριμένα. Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι η μέση τιμή είναι

$$\frac{10}{3} + \frac{10}{2} + 10 = 18 + \frac{1}{3}.$$

4.17. Αν η παράμετρος της Poisson είναι λ, τότε απο τα δεδομένα $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 12e^{-\lambda}\lambda^2/2$. Και επειδή $\lambda > 0$, προκύπτει ότι $\lambda = 1/2$. Έπειτα $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1/2}$.

4.18. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, ο τύπος του αφηρημένου στατιστικού δίνει

$$\mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

4.19. Έστω $\lambda = 120, p = 1/4$. Για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)P(Y=k|X=j) = \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{j!}{k!(j-k)!}(1-p)^{j-k} = e^{-\lambda}\lambda^k \frac{1}{k!} p^k \sum_{j=k}^{\infty} \lambda^{j-k} \frac{1}{(j-k)!}(1-p)^{j-k} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^k \frac{1}{k!} p^k e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Για την πρώτη ισότητα της τελευταίας γραμμής κάναμε την αντικατάσταση $n = j - k$ στο άθροισμα και χρησιμοποιήσαμε τη δυναμοσειρά της e^x. Συμπεραίνουμε ότι η Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda p = 30$.

4.20. Ισχύει $X \sim \text{Bin}(100, p)$. Η Poisson που την προσεγγίζει είναι η $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ με $\lambda = 100p = 0.1$. Έπειτα

$$\begin{aligned} P(X \le 1) &= P(X=0) + P(X=1) = (1-p)^{100} + 100p(1-p)^{99} \approx 0.995362, \\ P(X=3) &= \binom{100}{3} p^3 (1-p)^{97} \approx 1467 \times 10^{-7}, \\ P(X=10) &= \binom{100}{10} p^{10}(1-p)^{90} \approx 1581 \times 10^{-20}. \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες προσεγγίσεις είναι

$$\begin{aligned} P(Y \le 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) = e^{-0.1} + e^{-0.1}0.1 \approx 0.995321, \\ P(Y=3) &= e^{-0.1}(0.1)^3/3! \approx 1508 \times 10^{-7}, \\ P(Y=10) &= e^{-0.1}(0.1)^{10}/10! \approx 2493 \times 10^{-20}. \end{aligned}$$

4.21. (α) Επειδή η h παίρνει θετικές τιμές, η μέση τιμή $E(Xh(X))$ ορίζεται και έχουμε

$$\begin{aligned} E(Xh(X)) &= \sum_{k=0}^{\infty} kh(k)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{r=0}^{\infty} h(r+1)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{r+1}}{r!} \\ &= \lambda \sum_{r=0}^{\infty} h(r+1)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} = \lambda E(h(X+1)). \end{aligned}$$

(β) Για $h(x) = 1$ παίρνουμε $\mathbf{E}(X) = \lambda \mathbf{E}(1) = \lambda$. Για $h(x) = x$ παίρνουμε

$$\mathbf{E}(X^2) = \lambda \mathbf{E}(X+1) = \lambda^2 + \lambda,$$

οπότε $\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(X)\}^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Απαντήσεις §5

5.1.(α) Ας ονομάσουμε $A_1, A_2, A_3 \in \{K, \Gamma\}$ τα αποτελέσματα των τριών ρίψεων. Έχουμε

$$\{X=1, Y=1\} = \{(A_1,A_2,A_3) = (\Gamma, K, \Gamma)\} \cup \{(A_1,A_2,A_3) = (K, \Gamma, K)\}$$

και καθένα από τα δύο σύνολα στο δεξί μέλος της ισότητας έχει πιθανότητα $(1/2)^3 = 1/8$. Άρα, $\mathbf{P}(X=1, Y=1) = 1/4$.

(β) Όμοια όπως στο (α), βρίσκουμε ότι $\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(Y=1)=1/2$ [το $X=1$ συμβαίνει αν η τριάδα των αποτελεσμάτων είναι μία από τις $(K,\Gamma,K),(\Gamma,K,K),(K,\Gamma,\Gamma),(\Gamma,K,\Gamma)$]. Άρα

$$\mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=1)\neq\mathbf{P}(X=1,Y=1),$$

και επομένως οι Χ, Υ δεν είναι ανεξάρτητες.

5.2. Το αριστερό μέλος της ισότητας είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{X^2-2XY+Y^2\}&=\mathbf{E}(X^2)-2\mathbf{E}(XY)+\mathbf{E}(Y^2)=2\mathbf{E}(X^2)-2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\\&=2[\mathbf{E}(X^2)-\{\mathbf{E}(X)\}^2]=2\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοιήσαμε το ότι οι X,Y είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή [άρα $\mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(Y^2)$], ενώ στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε πάλι ότι έχουν την ίδια κατανομή.

5.3. (α) Το παιχνίδι λήγει ισόπαλο ακριβώς όταν για $k-1$ ρίψεις φέρουν και οι δύο Γράμματα ενώ στην k ρίψη φέρουν και οι δύο «Κ», όπου k είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_A)^{k-1}p_A(1-p_B)^{k-1}p_B=p_Ap_B\frac{1}{1-(1-p_A)(1-p_B)}.$$

(β) Επειδή $p_A=p_B$, για λόγους συμμετρίας, οι Α, Β έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν. Από το (α), η πιθανότητα ισοπαλίας ισούται με $r:=p_A^2/\{1-(1-p_A)^2\}=p_A/(2-p_A)$. Έτσι, η πιθανότητα να κερδίσει ο A είναι $(1-r)/2$.

Εναλλακτικά, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_A)^{k-1}(1-p_A)^{k-1}(1-p_A)p_A=\ldots$$

5.4. Εφόσον οι X_1,X_2 παίρνουν τιμές στο $\{0,1\}$, και το γινόμενό τους παίρνει τιμές στο ίδιο σύνολο. Άρα είναι τυχαία μεταβλητή Bernoulli. Η παράμετρός της είναι

$$p:=\mathbf{P}(X_1X_2=1)=\mathbf{P}(X_1=1,X_2=1)=\mathbf{P}(X_1=1)\mathbf{P}(X_2=1)=p_1p_2.$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X_1,X_2.

5.5. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{P}(Z\geq k)=(1-p)^{k-1}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}^+$. Για $k\in\mathbb{N}^+$ έχουμε

$$\mathbf{P}(Z\geq k)=\mathbf{P}(X_1\geq k,X_2\geq k,X_3\geq k)=\mathbf{P}(X_1\geq k)\mathbf{P}(X_2\geq k)\mathbf{P}(X_3\geq k)=\{(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\}^{k-1}.$$

Οπότε δείχθηκε το ζητούμενο με $p=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

Εναλλακτική απόδειξη. Η Z μετράει αριθμό δοκιμών μέχρι ένα από τα τρία πειράματα (στα οποία αντιστοιχούν οι X_1,X_2,X_3) να είναι επιτυχημένο (αυτό μας δίνει το min). Άρα αποτυχία έχουμε όταν και τα τρία πειράματα έχουν αποτυχία. Αυτό έχει πιθανότητα $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

5.6. Με χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, γράφουμε το αριστερό μέλος της ζητούμενης ως

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{P}(X_1=k,X_1+X_2=n)}{\mathbf{P}(X_1+X_2=n)}&=\frac{\mathbf{P}(X_1=k,X_2=n-k)}{\mathbf{P}(X_1+X_2=n)}=\frac{\mathbf{P}(X_1=k)\mathbf{P}(X_2=n-k)}{\mathbf{P}(X_1+X_2=n)}=\frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},\end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X_1,X_2. Στην τρίτη το ότι η X_1+X_2 έχει κατανομή Poisson$(\lambda_1+\lambda_2)$

5.7. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sum_{a\in\mathbb{R}} \mathbf{P}(X = a) = 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι σε αυτό το άθροισμα υπάρχει μόνο ένας προσθετέος μη μηδενικός. Αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο, δηλαδή $\mathbf{P}(X = a_1), \mathbf{P}(X = a_2) > 0$ με $a_1 \neq a_2$, τότε επειδή η X είναι ανεξάρτητη από την X, θα έχουμε

$$0 = \mathbf{P}(X = a_1, X = a_2) = \mathbf{P}(X = a_1)\mathbf{P}(X = a_2) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Σημειωση

Αυτή είναι μια συλλογή ασκήσεων για το μάθημα Θεωρία Πιθανοτήτων (Τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ). Καλύπτουν το πρώτο μισό του μαθήματος και γράφτηκαν με το σκεπτικό η μελέτη τους να αρκεί για την εμπέδωση της θεωρίας του μαθήματος και για την επιτυχία στις εξετάσεις. Δόθηκε προσοχή ώστε για την πλειοψηφία των ασκήσεων η λύση να γραφτεί σχολαστικά, και συνιστάται προσοχή στο πώς δίνεται μια πλήρης αιτιολόγηση, πώς αναφέρουμε και δικαιολογούμε κάθε τι που χρειάζεται για έναν ισχυρισμό.

Κάποιες από τις ασκήσεις είναι δικής μου κατασκευής. Οι υπόλοιπες προέκυψαν από τις εξής πηγές.

- Τα βιβλία που αναφέρονται παρακάτω.
- Συζητήσεις με τους συναδέλφους Νίκο Παπαδάτο και Μιχάλη Λουλάκη.
- Θέματα εξετάσεων στο Τμήμα Μαθηματικών από τους συναδέλφους Έφη Βαγγελάτου, Κωστή Μηλολιδάκη, Αντώνη Οικονόμου, Νίκο Παπαδάτο, Σάμη Τρέβεζα.

Ιανουάριος 2024 Δημήτρης Χελιώτης

Αναφορες

W. Feller. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1, 3rd Edition. Wiley, 1968.

Γ. Κοντογιάννης-Σ. Τουμπής. Στοιχεία Πιθανοτήτων, Κάλλιπος, Αθήνα 2015.

Μ. Κούτρας. Εισαγωγή στη θεωρία των πιθανοτήτων και εφαρμογές. Εκδόσεις Σταμούλη, 2012.

S. Ross. Βασικές αρχές θεωρίας πιθανοτήτων. Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2011.

D. Stirzaker. Elementary Probability. 2nd Edition. Cambridge University Press, 2003.

Χ. Χαραλαμπίδης. Θεωρία πιθανοτήτων και εφαρμογές. Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.