Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Βασικοί ορισμοί

10.1 Συνεχείς Τ.Μ. και συνεχής πυκνότητα

Ορισμός 10.1 *Μια τυχαία μεταβλητή X είναι* ***συνεχής με πυκνότητα*** *$f(x)$, αν η Τ.Μ. X και η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:*

1. *Η πυκνότητα $f(x)$ είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1.$$

2. *Το σύνολο τιμών S_X της X μπορεί να εκφραστεί ως ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους (μη τετριμμένων) διαστημάτων πραγματικών αριθμών, και επιπλέον το S_X αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η πυκνότητα $f(x)$ δεν είναι μηδενική, δηλαδή:*

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}.$$

3. *Για οποιαδήποτε $a \leq b$, η πιθανότητα η Τ.Μ. X να πάρει κάποια τιμή στο διάστημα $[a, b]$ μπορεί να εκφραστεί ως προς την πυκνότητα $f(x)$ μέσω της σχέσης,*

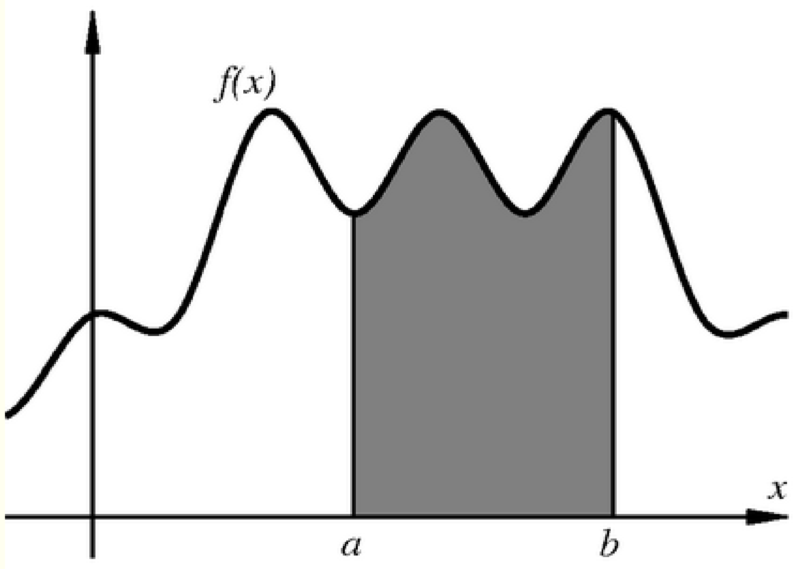
$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx, \tag{10.3}$$

όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 10.1.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.π.π.

Βασικοί ορισμοί

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σ.π.π.



Σχήμα 10.1: *Γραφική αναπαράσταση του υπολογισμού της πιθανότητας* $\Pr(a \le X \le b)$ *για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή* X *μέσω της πυκνότητάς* $f(x)$. *Παρατηρούμε πως η πιθανότητα* $\Pr(a \le X \le b)$ *είναι ίση με το εμβαδόν μεταξύ του καμπύλης* $y = f(x)$ *και του άξονα* x, *ανάμεσα στα σημεία* a *και* b.

3. Αν και η τιμή $f(x)$ της πυκνότητας μιας συνεχούς Τ.Μ. X *δεν* αντιστοιχεί ακριβώς σε κάποια πιθανότητα, παρατηρούμε ότι η X είναι πιο πιθανό να πάρει τιμές κοντά σε κάποιο x_0 όπου η τιμή της $f(x)$ είναι σχετικά μεγάλη. Για παράδειγμα, αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, τότε για μικρά δ κατά προσέγγιση έχουμε,

$$\Pr(x_0 - \delta/2 \le X \le x_0 + \delta/2) = \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} f\,(x)\;\;dx \;\;\approx \boldsymbol{\delta}\, f(x_0).$$

Άρα είναι μεγαλύτερη η πιθανότητα το X να πάρει τιμές κοντά στο x_0 αν η τιμή της πυκνότητας $f(x_0)$ είναι μεγάλη, ενώ είναι λιγότερο πιθανό να πάρει τιμές κοντά σε κάποιο x_0 όπου η $f(x_0)$ είναι κοντά στο μηδέν.

Βασικοί ορισμοί

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σ.π.π.

Συνεχείς Τ.Μ.: Βασικές ιδιότητες. *Για μια οποιαδήποτε συνεχή Τ.Μ. X με πυκνότητα $f(x)$ έχουμε:*

1. *Για κάθε τιμή $a \in \mathbb{R}$, η πιθανότητα η X να ισούται ακριβώς με το a είναι μηδενική:*

$$\Pr(X = a) = 0, \quad \text{για οποιοδήποτε } a \in \mathbb{R}.$$

2. *Για κάθε $a < b$,*

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr(a < X \le b) = \Pr(a \le X < b) = \Pr(a < X < b),$$

και όλες οι πιο πάνω πιθανότητες είναι ίσες με $\int_a^b f(x)\ dx$.

3. *Η σχέση (10.3) ισχύει ακόμη και στην περίπτωση που το a ή το b ή και τα δύο παίρνουν άπειρες τιμές. Δηλαδή, για κάθε a και b,*

$$\Pr(X \ge a) = \Pr(a \le X < \infty) = \int_a^\infty f(x)\, dx \tag{10.5}$$

$$\Pr(X \le b) = \Pr(-\infty < X \le b) = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx, \tag{10.6}$$

και, προφανώς,

$$\Pr(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = 1.$$

Βασικοί ορισμοί

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
α.σ.κ.

Ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής. *Για μια οποιαδήποτε συνεχή Τ.Μ.* X *με πυκνότητα* $f(x)$, *όπως είδαμε στη σχέση (10.4), η συνάρτηση κατανομής μπορεί να εκφραστεί ως* $F(x) = \Pr(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$. *Επιπλέον:*

1. *Από το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού, αμέσως προκύπτει πως ισχύει και η αντίστροφη σχέση της (10.4), δηλαδή,*

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x), \tag{10.7}$$

για όλα τα x *για τα οποία υπάρχει η παράγωγος* $F'(x)$.

2. *Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση κατανομής* $F(x)$, *τότε όλες οι πιθανότητες της μορφής* $\Pr(a \le X \le b)$ *μπορούν να υπολογιστούν απευθείας από τη σχέση,*

$$\Pr(a \le X \le b) = F(b) - F(a). \tag{10.8}$$

Η (10.8) είναι άμεσο επακόλουθο της (10.4) και του Ορισμού 10.1, αλλά εύκολα αποδεικνύεται και ευθέως: Εφόσον τα ενδεχόμενα $\{X \le a\}$ *και* $\{a < X \le b\}$ *είναι ξένα,*

$$\begin{aligned} F(b) = \Pr(X \le b) &= \Pr\big(\{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}\big) \\ &= \Pr(X \le a) + \Pr(a < X \le b) = F(a) + \Pr(a \le X \le b), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η (10.8).

3. *Υπενθυμίζουμε (βλ. Κεφάλαιο 6) πως η συνάρτηση κατανομής* $F(x)$ *μιας οποιασδήποτε (διακριτής ή συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής ικανοποιεί:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$\text{και} \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 10.2 *Η* ***μέση τιμή*** *(ή αναμενόμενη τιμή, ή προσδοκώμενη τιμή) μιας συνεχούς Τ.Μ. X με σύνολο τιμών S και πυκνότητα $f(x)$, ορίζεται ως:*

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \; dx. \tag{10.9}$$

Γενικότερα, για οποιαδήποτε συνάρτηση $g: S \to \mathbb{R}$, η μέση τιμή της νέας Τ.Μ. $g(X)$ ορίζεται ως:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \; f(x) \; dx. \tag{10.10}$$

Ορισμός 10.3 *Για μια συνεχή Τ.Μ. X με μέση τιμή μ, η* ***διασπορά*** *της X ορίζεται, ακριβώς όπως και στη διακριτή περίπτωση, ως,*

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right], \tag{10.11}$$

και η ***τυπική απόκλιση*** *της X είναι:*

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Μέση τιμή και διασπορά

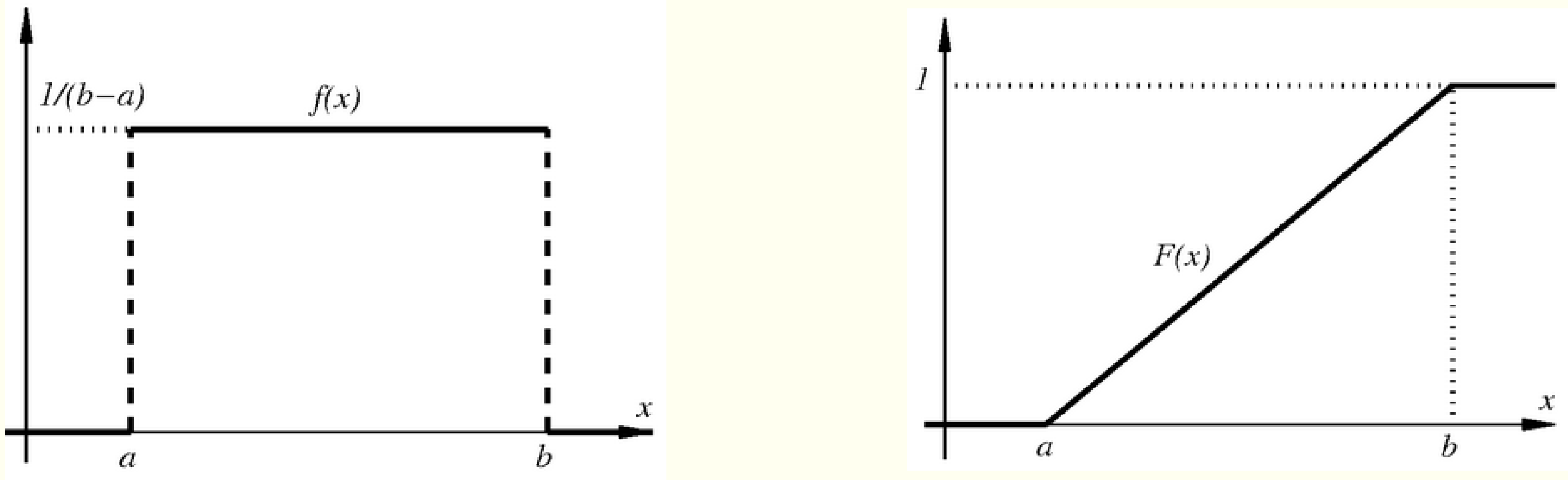
Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Ομοιόμορφη κατανομή

Ορισμός 11.1 *Μια συνεχής Τ.Μ. X έχει* ***ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα*** $[a,b]$*, για κάποια* $a < b$*, αν έχει σύνολο τιμών το* $S = [a,b]$ *και πυκνότητα,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x \in [a,b], \\ 0, & \text{για } x \notin [a,b], \end{cases}$$

βλ. Σχήμα 11.1. Για συντομία, αυτό συμβολίζεται: $X \sim U[a,b]$.



Σχήμα 11.1: *Γραφική αναπαράσταση της πυκνότητας* $f(x)$ *(αριστερά) και της συνάρτησης κατανομής* $F(x)$ *(δεξιά) μιας Τ.Μ.* X *με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα* $[a,b]$.

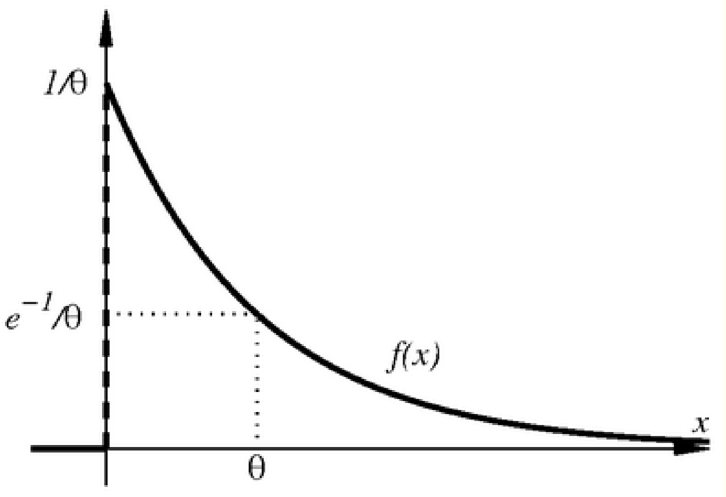
Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Εκθετική κατανομή

Ορισμός 11.2 *Μια συνεχής Τ.Μ. X έχει* ***εκθετική κατανομή με παράμετρο*** $\theta > \mathbf{0}$*, αν έχει σύνολο τιμών το* $S = [0, \infty)$ *και πυκνότητα,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \text{για } x \geq 0, \\ 0, & \text{για } x < 0, \end{cases}$$

βλ. Σχήμα 11.2. Για συντομία, αυτό συμβολίζεται: $X \sim \text{Εκθ}(\theta)$.



Σχήμα 11.2: *Γραφική αναπαράσταση της πυκνότητάς* $f(x)$ *μιας Τ.Μ.* X *με κατανομή* $\text{Εκθ}(\theta)$.

Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Εκθετική κατανομή

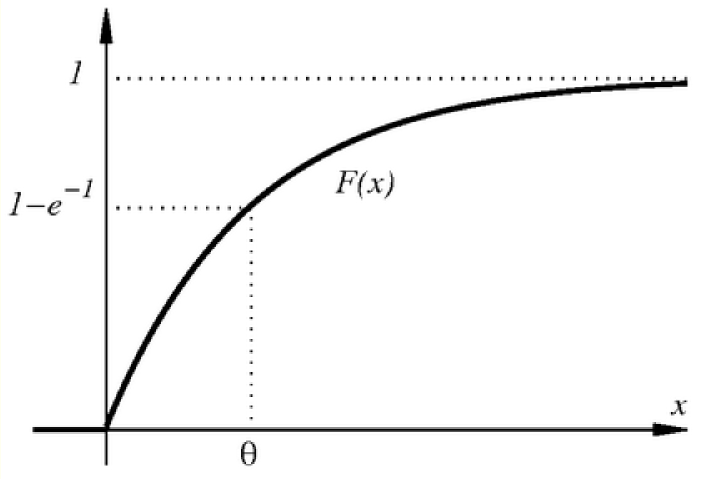
Θεώρημα 11.1 (Ιδιότητες της εκθετικής κατανομής) *Έστω* $X \sim \text{Εκθ}(\theta)$. *Η* X *έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. ***Μέση τιμή***: $E(X) = \theta$.
2. ***Διασπορά***: $\text{Var}(X) = \theta^2$.
3. ***Συνάρτηση κατανομής***: $F(x) = 0$ *για* $x < 0$ *και* $F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ *για* $x \geq 0$. *Η γραφική της αναπαράσταση δίνεται στο Σχήμα 11.3.*
4. ***Ιδιότητα έλλειψης μνήμης***: *Για κάθε* $a, b > 0$:

$$\Pr(X \geq a + b \mid X \geq a) = \Pr(X \geq b).$$

Η πιθανότητα $\Pr(X \geq a + b \mid X \geq b)$ *είναι ανεξάρτητη του* a, *και ίση με εκείνη που αντιστοιχεί στο* $b = 0$, *δηλαδή,* $\Pr(X \geq b)$.

$$\Pr(X \geq a + b \mid X \geq a) = \frac{\Pr(X \geq a + b \text{ και } X \geq a)}{\Pr(X \geq a)}$$



Σχήμα 11.3: *Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης κατανομής* $F(x)$ *μιας Τ.Μ.* X *με κατανομή* $\text{Εκθ}(\theta)$.

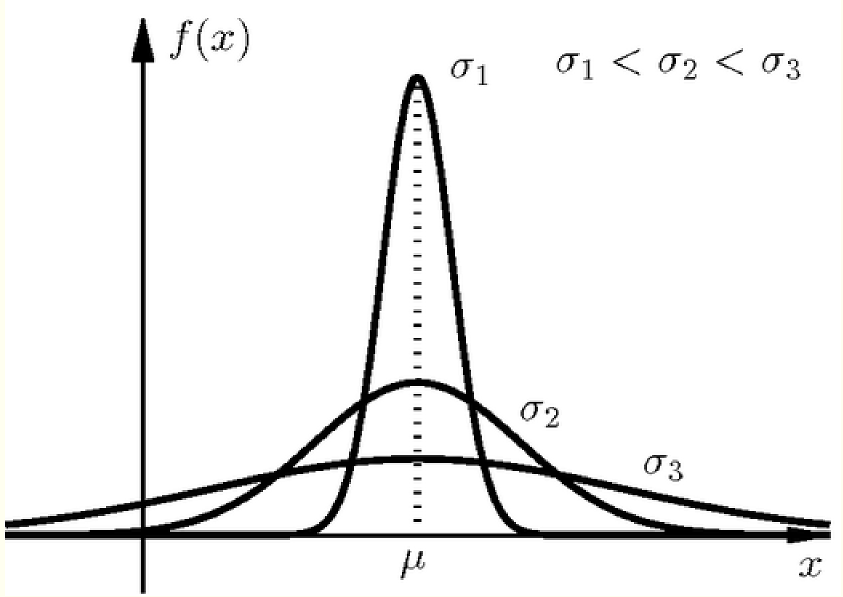
Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Κανονική κατανομή (Normal or Gauss)

Ορισμός 12.1 *Μια συνεχής Τ.Μ. X έχει* **κανονική κατανομή** *(ή γκαουσιανή κατανομή)* **με παραμέτρους** $\mu \in \mathbb{R}$ ***και*** $\boldsymbol{\sigma^2 > 0}$*, αν έχει σύνολο τιμών το $S = \mathbb{R}$ και πυκνότητα,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}, \tag{12.1}$$

βλ. Σχήμα 12.1. Για συντομία, αυτό συμβολίζεται: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Σχήμα 12.1: *Γραφική αναπαράσταση της πυκνότητάς $f(x)$ μιας Τ.Μ. X με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ^2. Η πυκνότητα έχει την κορυφή της στο σημείο $x = \mu$ και είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα $x = \mu$.*

Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Κανονική κατανομή (Normal or Gauss)

Θεώρημα 12.1 (Ιδιότητες της κανονικής κατανομής) *Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Η X έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. ***Μέση τιμή***: $E(X) = \mu$.
2. ***Διασπορά***: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

Το γεγονός πως οι παράμετροι μ και σ^2 αντιστοιχούν στη μέση τιμή και τη διασπορά της κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$ αναπαρίσταται και γραφικά στο Σχήμα 12.1.

3. ***Κανονικοποίηση***: *Η Τ.Μ. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ έχει κατανομή $Z \sim N(0,1)$.*
4. ***Γραμμικός συνδυασμός***: *Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Y \sim (\nu, \tau^2)$ είναι ανεξάρτητες, τότε η Τ.Μ. $aX + bY$ έχει κατανομή $Z \sim N(a\mu + b\nu, a^2\sigma^2 + b^2\tau^2)$.*
5. ***Συμβολισμός***: *Αν η X έχει $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, δηλαδή $X \sim N(0,1)$, τότε λέμε πως έχει **τυπική κανονική κατανομή** και συμβολίζουμε την πυκνότητα της και τη συνάρτηση κατανομής της αντίστοιχα ως,*

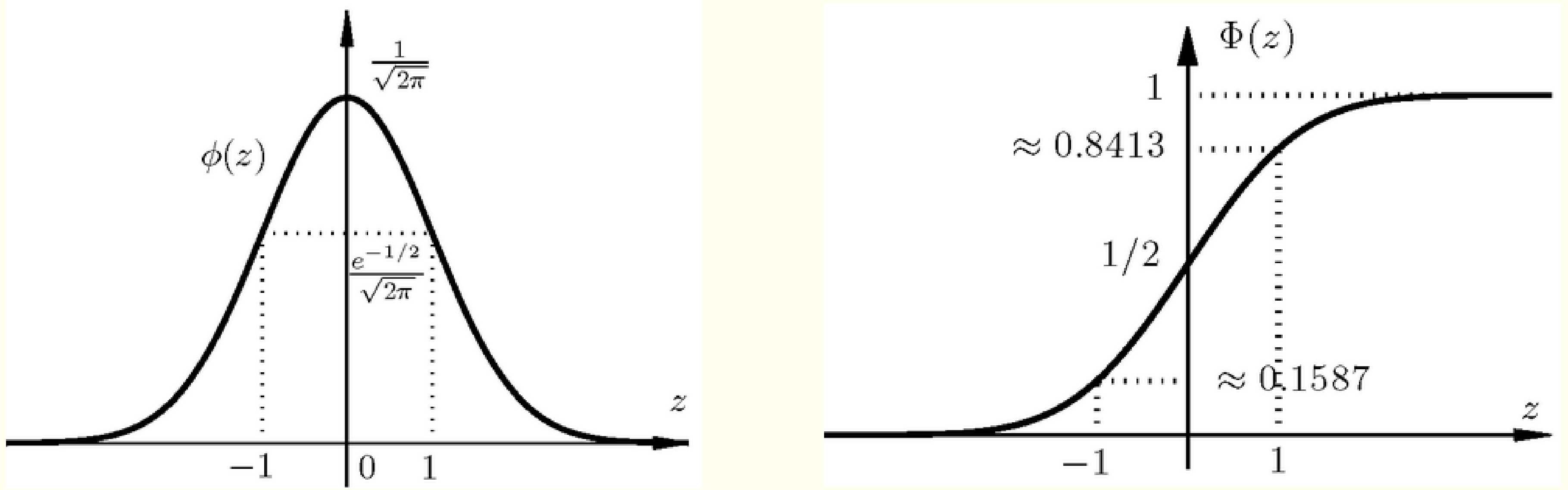
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx, \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{12.2}$$

Η γραφική αναπαράσταση της πυκνότητας $\phi(x)$ και της συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$ δίνονται στο Σχήμα 12.2.

Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Κανονική κατανομή (Normal or Gauss)



Σχήμα 12.2: *Γραφική αναπαράσταση της πυκνότητας $\phi(z)$ και της συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$.*

Κανονική κατανομή (Normal or Gauss)

Συνεχείς κατανομές παραδείγματα

Γενική μέθοδος υπολογισμού $N(\mu, \sigma^2)$ ***πιθανοτήτων.*** *Εφόσον, όπως σημειώσαμε πιο πάνω, ολοκληρώματα της μορφής* $\int_a^b f(x)\, dx$ *για την κανονική πυκνότητα (12.1) δεν μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή, θα χρησιμοποιήσουμε την Ιδιότητα 3 του Θεωρήματος 12.1 ως εξής. Έστω πως θέλουμε να υπολογίσουμε κάποια πιθανότητα της μορφής* $\Pr(a \le X \le b)$ *για μια Τ.Μ.* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*:*

1. *Ορίζουμε μια νέα Τ.Μ.* $Z \sim N(0,1)$ *και εκφράζουμε τη ζητούμενη πιθανότητα ως,*

$$\Pr(a \le X \le b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

Π.χ., αν η ζητούμενη πιθανότητα ήταν $\Pr(0 \le X \le 1.5)$ *για την* $X \sim N(1,3)$*, τότε,*

$$\Pr(0 \le X \le 1) = \Pr\left(\frac{0-1}{\sqrt{3}} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1.5-1}{\sqrt{3}}\right) \approx \Pr(-0.5774 \le Z \le 0.2887).$$

2. *Εφόσον η* Z *έχει συνάρτηση κατανομής* $\Phi(z)$ *όπως στην (12.2), χρησιμοποιώντας τη γενική ιδιότητα «*$\Pr(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$*» που είδαμε στη (10.8), έχουμε,*

$$\Pr(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

οπότε στο συγκεκριμένο πιο πάνω παράδειγμα,

$$\Pr(0 \le X \le 1) \approx \Phi(0.2887) - \Phi(-0.5774).$$

3. *Τέλος, αντικαθιστούμε τις τιμές* $\Phi(a)$ *και* $\Phi(b)$ *από τους πίνακες τιμών της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής* $\Phi(z)$*, που δίνονται στο τέλος του κεφαλαίου. Η κάθε γραμμή περιέχει το ακέραιο μέρος και το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του* z *και η κάθε στήλη το δεύτερο δεκαδικό του ψηφίο.*

Παραδείγματος χάρη, για να βρούμε την τιμή $\Phi(-0.5774) \approx \Phi(-0.58)$, πάμε στον Πίνακα 12.1 που περιέχει τις τιμές της $\Phi(z)$ για αρνητικά z, και κοιτάζουμε στην $33^{η}$ γραμμή, που αντιστοιχεί στα $z = -0.5\cdots$, και στην ένατη στήλη, που περιέχει την τιμή της $\Phi(-0.58) \approx 0.2810$. Παρομοίως, από την τρίτη γραμμή και τελευταία στήλη του Πίνακα 12.2 βρίσκουμε την τιμή της $\Phi(0.2887) \approx \Phi(0.29) \approx 0.6164$. Οπότε τελικά έχουμε,

$$\Pr(0 \le X \le 1) \approx \Phi(0.29) - \Phi(-0.58) \approx 0.61640 - 0.2810 = 0.3354.$$

Πίνακας 12.1: Τιμές της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ για αρνητικά z.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Πίνακας 12.2: Τιμές της τυπικής κανονικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ για θετικά z.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Μετασχηματισμοί συνεχών τυχαίων μεταβλητών

Παραδείγματα

Θεώρημα 11.2 (Γραμμικός μετασχηματισμός) *Έστω μια συνεχής Τ.Μ. X με πυκνότητα $f(x)$, μέση τιμή $\mu = E(X)$ και διασπορά $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Για $a, b \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τη νέα Τ.Μ. $Y = aX + b$.*

1. *Η Y έχει μέση τιμή $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$.*
2. *Η Y έχει διασπορά $\mathrm{Var}(Y) = a^2\mathrm{Var}(X)$.*
3. *Αν η σταθερά a είναι θετική, τότε η πυκνότητα $g(y)$ της Y δίνεται από τη σχέση:*

$$g(y) = \frac{1}{a} f\Big(\frac{y-b}{a}\Big), \quad \text{για κάθε } y.$$

Η περίπτωση $a < 0$ εξετάζεται στην Άσκηση 6 στο τέλος του κεφαλαίου.

Πόρισμα 11.1 *Για μια οποιαδήποτε (συνεχή ή διακριτή) τυχαία μεταβλητή X με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, η κανονικοποιημένη τυχαία μεταβλητή,*

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}, \quad \text{έχει } E(Y) = 0 \text{ και } \mathrm{Var}(Y) = 1.$$

Ανισότητες Markov και Chebychev

Θεώρημα 11.3 (Ανισότητα του Markov) *Έστω μια συνεχής Τ.Μ. X που παίρνει πάντα τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός και έχει μέση τιμή $\mu = E(X)$. Τότε:*

$$\Pr(X \geq c) \leq \frac{\mu}{c}, \quad \text{για οποιαδήποτε σταθερά } c > 0.$$

Θεώρημα 11.4 (Ανισότητα του Chebychev) *Έστω μια συνεχής Τ.Μ. X με μέση τιμή $\mu = E(X)$ και διασπορά $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Τότε:*

$$\Pr(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}, \quad \text{για οποιαδήποτε σταθερά } c > 0.$$

Ορισμός 11.3

1. *Δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι **ανεξάρτητες** αν, για κάθε $a \leq b$, $a' \leq b'$, τα ενδεχόμενα $\{a \leq X \leq b\}$ και $\{a' \leq Y \leq b'\}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν,*

$$\Pr(a \leq X \leq b, a' \leq Y \leq b') = \Pr(a \leq X \leq b)\Pr(a' \leq Y \leq b'),$$

   για κάθε $a \leq b, a' \leq b'$.

2. *Οι συνεχείς Τ.Μ. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι **ανεξάρτητες** αν,*

$$\begin{aligned}\Pr(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2, \ldots, a_N \leq X_N \leq b_N) \\ = \Pr(a_1 \leq X_1 \leq b_1)\Pr(a_2 \leq X_2 \leq b_2) \cdots \Pr(a_N \leq X_N \leq b_N),\end{aligned}$$

   για κάθε N-άδα ζευγαριών τιμών $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \ldots, a_N \leq b_N$.

3. *Οι συνεχείς Τ.Μ. X_i σε μια άπειρη ακολουθία $X_1, X_2, \ldots$ είναι **ανεξάρτητες** αν οι Τ.Μ. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $N \geq 1$.*

Θεώρημα 11.5 (Μέση τιμή και διασπορά αθροίσματος)

1. *Για οποιεσδήποτε συνεχείς Τ.Μ. X, Y και σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

2. *Αν οι Τ.Μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε:*

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Πρόταση 11.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Για δύο οποιεσδήποτε (συνεχείς ή διακριτές) Τ.Μ. X, Y, έχουμε:*

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Ιδιότητες της συνδιακύμανσης. *Έστω δύο διακριτές Τ.Μ. X, Y.*

1. *Η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X,Y)$ εναλλακτικά ισούται με:*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{9.2}$$

2. *Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η συνδιακύμανσή τους ισούται με μηδέν, δηλαδή, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.*
3. *Αν η συνδιακύμανσή $\mathrm{Cov}(X,Y)$ ισούται με μηδέν, αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα πως οι X, Y είναι ανεξάρτητες.*
4. *Πάντοτε έχουμε:*

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

5. *Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε:*

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}\,(X,Y)}{[\mathrm{Var}\,(X)\,\mathrm{Var}\,(Y)]^{\frac{1}{2}}}$$

Συνδιακύμανση και συσχέτιση. Έστω δύο οποιεσδήποτε διακριτές Τ.Μ. X και Y.

(α′) Αποδείξτε πως για τη συνδιακύμανσή τους έχουμε:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}.$$

και ότι $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Ανεξαρτησία, ανισότητες και ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Θεώρημα 11.6 (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) *Έστω μια ακολουθία από ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ που έχουν όλες την ίδια κατανομή, δηλαδή την ίδια πυκνότητα $f(x)$, και κατά συνέπεια την ίδια μέση τιμή $\mu = E(X_i)$ και την ίδια διασπορά $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) < \infty$. Τότε:*

1. *[Διαισθητικά] Για μεγάλα N, ο* ***εμπειρικός μέσος όρος*** *των $X_1, X_2, \ldots, X_N$,*

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \approx \mu, \quad \text{με μεγάλη πιθανότητα}.$$

2. *[Μαθηματικά] Καθώς το $N \to \infty$ ο εμπειρικός μέσος όρος $\bar{X}_N$ τείνει στη μέση τιμή μ κατά πιθανότητα, δηλαδή: Για κάθε $\epsilon > 0$, έχουμε,*

$$\Pr\left(|\bar{X}_N - \mu| < \epsilon\right) \to 1, \quad \text{καθώς το } N \to \infty.$$

Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Ορισμός 12.2 *Έστω μια ακολουθία Τ.Μ.* $\{X_n\} = \{X_1, X_2, \ldots\}$ *και έστω μια άλλη Τ.Μ.* X *με συνάρτηση κατανομής* $F(x)$*. Η ακολουθία* $\{X_n\}$ ***συγκλίνει κατά κατανομή*** *στη* X *αν,*

$$\Pr\left(X_n \leq x\right) \to F(x), \quad \text{καθώς το } n \to \infty,$$

για όλα τα x *στα οποία η* $F(x)$ *είναι συνεχής.*

Θεώρημα 12.2 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) *Έστω μια ακολουθία* $\{X_n\}$ *από ανεξάρτητες (συνεχείς ή διακριτές) τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots$*, οι οποίες έχουν όλες την ίδια κατανομή και κατά συνέπεια την ίδια μέση τιμή* $\mu = E(X_i)$ *και την ίδια διασπορά* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) < \infty$*. Τότε:*

[Διαισθητικά-1] Για μεγάλα N*, ο εμπειρικός μέσος όρος,*

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{έχει κατά προσέγγιση } N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right) \text{ κατανομή}.$$

[Διαισθητικά-2] Για μεγάλα N*, το κανονικοποιημένο άθροισμα,*

$$\bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) \qquad \text{έχει κατά προσέγγιση } N(0,1) \text{ κατανομή}.$$

[Μαθηματικά] Καθώς το $N \to \infty$*, το κανονικοποιημένο άθροισμα* $\bar{S}_N$ *συγκλίνει κατά κατανομή στην τυπική κανονική κατανομή, δηλαδή: Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*, έχουμε,*

$$\Pr\left(\bar{S}_N \leq x\right) = \Pr\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) \leq x\right) \to \Phi(x), \quad \text{καθώς το } N \to \infty, \tag{12.4}$$

όπου $\Phi(x)$ *είναι η συνάρτηση κατανομής της* $N(0,1)$ *κατανομής.*

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Πόρισμα 12.1 (Κανονική προσέγγιση στη διωνυμική κατανομή) *Αν μια τυχαία μεταβλητή Y έχει κατανομή* $\Delta\iota\omega\nu(N, p)$ *με παραμέτρους τέτοιες ώστε:*

- *το N είναι αρκετά «μεγάλο», δηλαδή, $N \geq 80$,*
- *το p δεν είναι πολύ «μικρό», ώστε το γινόμενό $\mathrm{N}\,p$ είναι της τάξεως του 1,*

τότε η κατανομή της Y μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή υπό την έννοια ότι, για κάθε ζευγάρι ακεραίων τιμών $m \leq M$,

$$\Pr(m \leq Y \leq M) \approx \Phi\left(\frac{M - Np + 1/2}{\sqrt{p(1-p)N}}\right) - \Phi\left(\frac{m - Np - 1/2}{\sqrt{p(1-p)N}}\right).$$

Συνεχής από κοινού κατανομή

Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 15.1

1. *Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι* ***από κοινού συνεχείς*** *όταν υπάρχει μια συνάρτηση $f_{XY}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, η* ***από κοινού πυκνότητα*** *των X, Y, τέτοια ώστε, για οποιαδήποτε $a < b$ και $c < d$, να ισχύει ότι,*

$$\Pr(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{XY}(x, y) \quad dx\, dy, \tag{15.1}$$

και γενικότερα, για οποιοδήποτε σύνολο R στο επίπεδο, $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\Pr((X, Y) \in R) = \iint_R f_{XY}(x, y) \quad dx\, dy. \tag{15.2}$$

2. *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_N$ είναι* ***από κοινού συνεχείς*** *όταν υπάρχει μια συνάρτηση $f_{X_1 X_2 \cdots X_N}: \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, η* ***από κοινού πυκνότητα*** *των $X_1, X_2, \dots, X_N$, τέτοια ώστε, για οποιαδήποτε $a_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots, N$, να ισχύει ότι,*

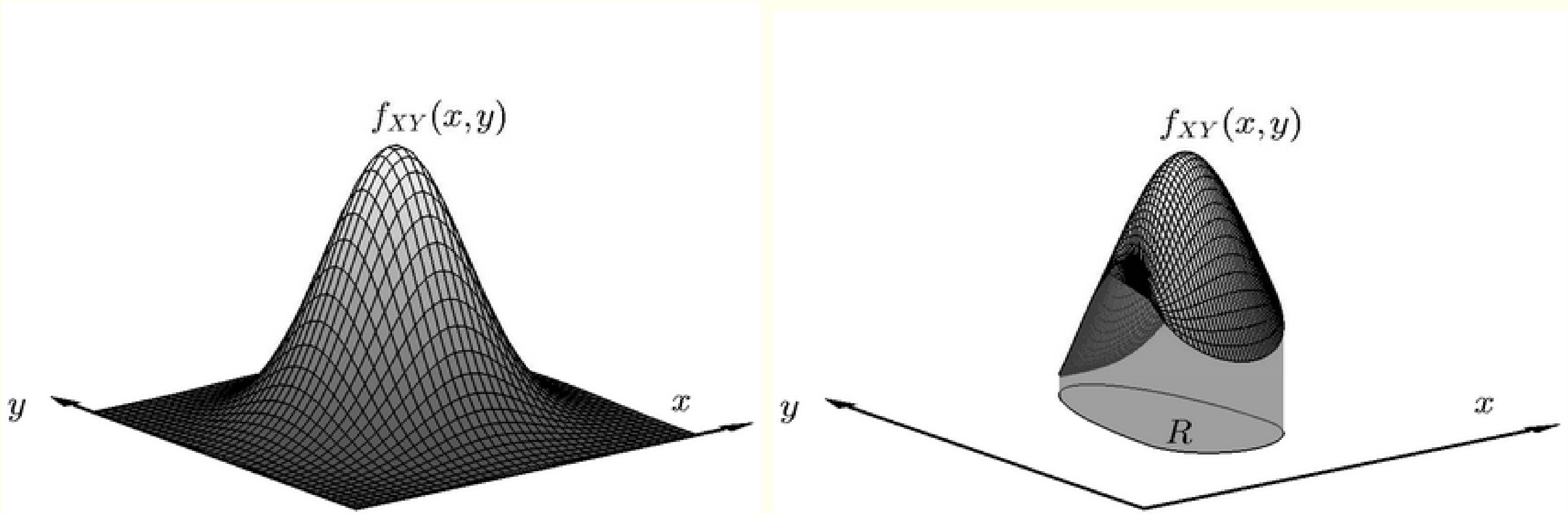
$$\begin{aligned} &\Pr(a_1 \le X_1 \le b_1, a_2 \le X_2 \le b_2, \dots, a_N \le X_N \le b_N) \\ &= \int_{a_N}^{b_N} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{X_1 X_2 \cdots X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N, \end{aligned}$$

και γενικότερα, για οποιοδήποτε $R \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$\Pr((X_1, X_2, \dots, X_n) \in R) = \int \cdots \int_R f_{X_1 X_2 \cdots X_N}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n\,. \tag{15.3}$$

Συνεχής από κοινού κατανομή

Βασικοί ορισμοί



Σχήμα 15.1: *Παράδειγμα μιας από κοινού πυκνότητας $f_{XY}(x,y)$ (αριστερά). Η πιθανότητα $\Pr((X,Y) \in R)$ τα (X,Y) να πάρουν τιμές στο R δίνεται από τον όγκο του σκιασμένου στερεού που βρίσκεται ανάμεσα στο γράφημα της $f_{XY}(x,y)$ και το R (δεξιά).*

Ορισμός 15.2 *Η* ***περιθώρια πυκνότητα*** *της X_i είναι η πυκνότητα $f_{X_i}(x_i)$ μίας από N συνεχείς τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_N$ με από κοινού πυκνότητα $f_{X_1 X_2 \cdots X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Συνεχής από κοινού κατανομή

Βασικοί ορισμοί

Συνεχής από κοινού πυκνότητα: Βασικές ιδιότητες. *Για οποιοδήποτε ζεύγος από συνεχείς Τ.Μ. X, Y με από κοινού πυκνότητα $f_{XY}(x,y)$, και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από συνεχείς Τ.Μ. $X_1, X_2, \dots, X_N$ με από κοινού πυκνότητα $f_{X_1 X_2 \cdots X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, έχουμε:*

1. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 1 \text{ και } \int\!\cdots\!\int_{\mathbb{R}^N} f_{X_1 X_2 \cdots X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N = 1.$$

2. *Για οποιοδήποτε μεμονωμένο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, η πιθανότητα,*

   $$\Pr\big((X,Y) = (x_0, y_0)\big) = \iint_{\{(x_0,y_0)\}} f_{XY}(x,y)\ \ dx\, dy\ \ = 0,$$

   και αντίστοιχα η πιθανότητα η N-άδα Τ.Μ. $X_1, X_2, \dots, X_N$ να πάρει μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ισούται με μηδέν.

   Κατά συνέπεια, αν αλλάξουμε τις τιμές της από κοινού πυκνότητας σε ένα, δύο ή οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος σημείων, δεν αλλάζει καμία από τις πιθανότητες που προκύπτουν για τις αντίστοιχες Τ.Μ.

3. *Για οποιαδήποτε $a < b$ και $c < d$, η πιθανότητα $\Pr(a \le X \le b, c \le Y \le d)$ παραμένει η ίδια αν ένα ή περισσότερα από τα «≤» αντικατασταθούν με «<», και ισούται με καθεμία από τις εναλλακτικές εκφράσεις που δώσαμε στην πρώτη παρατήρηση παραπάνω, ανεξάρτητα από το αν και πόσα από τα οριακά σημεία του ορθογωνίου $[a,b] \times [c,d]$ περιέχονται ή όχι στον υπολογισμό της πιθανότητας. [Άσκηση. Διατυπώστε και τεκμηριώστε την προφανή γενίκευση αυτής της ιδιότητας για N συνεχείς Τ.Μ.]*

4. *Η X και η Y είναι συνεχείς Τ.Μ. με περιθώριες πυκνότητες, αντίστοιχα,*

   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ \ dy \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx,$$

   και στη γενική περίπτωση, η κάθε X_i είναι συνεχής, με περιθώρια πυκνότητα,

   $$\int\!\cdots\!\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_{X_1 X_2 \cdots X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_N\, .$$

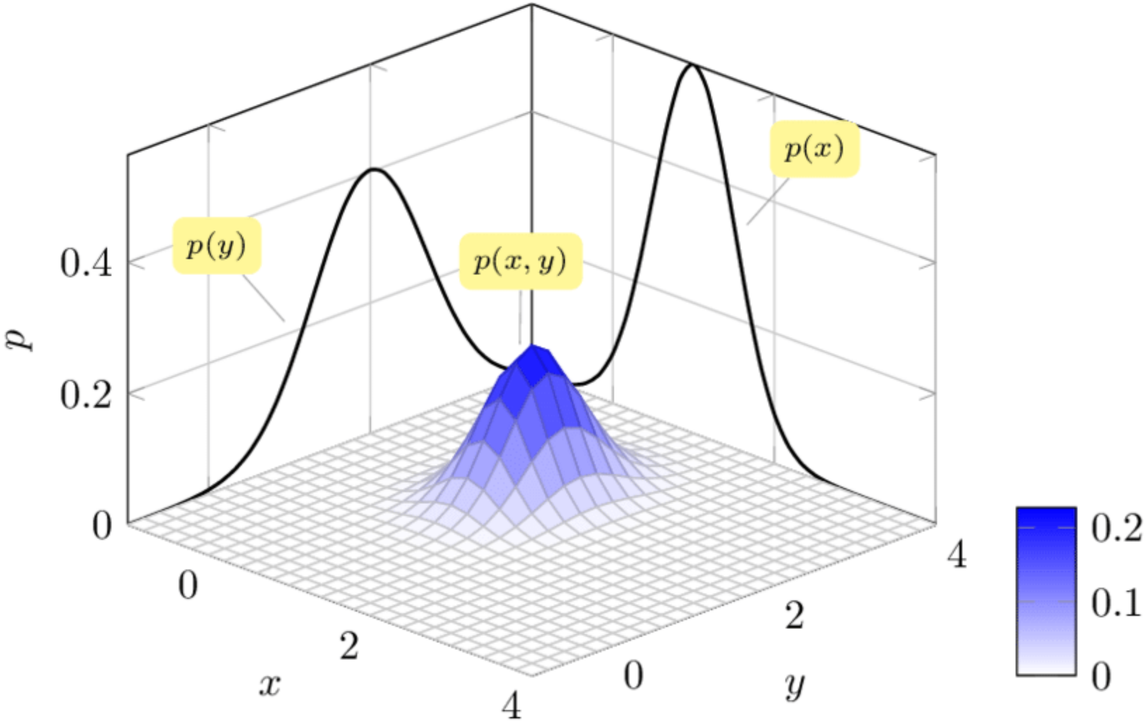
Συνεχής από κοινού κατανομή

Διδιάστατη κανονική κατανομή (Bivariate Normal)

Two random variables X and Y are said to have the **standard bivariate normal distribution with correlation coefficient** ρ if their joint PDF is given by

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2 - 2\rho xy + y^2]\},$$

where $\rho \in (-1,1)$. If $\rho = 0$, then we just say X and Y have the standard bivariate normal distribution.



Selvan, Raghavendra. (2015).
Bayesian tracking of multiple point targets using Expectation Maximization.
Department of Signals and Systems
CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Göteborg, Sweden

Βιβλιογραφία

- Kontogiannis, I., & Toumpis, S. (2015). ELEMENTS OF PROBABILITY [Undergraduate textbook]. Kallipos, Open Academic Editions. http://hdl.handle.net/11419/2810
- Δαμιανού Χ., Χαραλαμπίδης Χ., Παπαδάτος Ν. (2010). Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ Μ. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ Σ. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ Ο.Ε
- Κάκουλλου, Θ. (1969). Μαθήματα Θεωρίας Πιθανοτήτων, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα
- Strait, P. T. (1989). A First Course in Probability and Statistics With Applications, Harcourt Brace Jovanovich, Inc Orlando, FL, USA
- H. Pishro-Nik, "Introduction to probability, statistics, and random processes", available at https://www.probabilitycourse.com, Kappa Research LLC, 2014.