σππ $f(x)$ — ασκ $F(x)$

Θεωρία Πιθανοτήτων. 15/10/2025

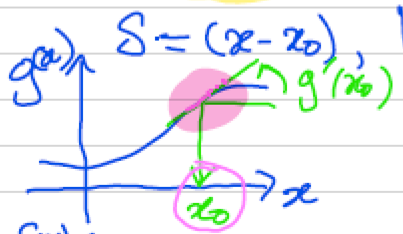
$dp = f(x)\,dx \qquad X\in[x, x+dx] \qquad F'(x_0)=f(x_0)$

$$f(x_0)\delta \simeq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} f(x)dx = \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} dF = F(x_0+\delta/2) - F(x_0-\delta/2) = \cancel{F(x_0)} + F'(x_0)\frac{\delta}{2} - \left(\cancel{F(x_0)} - F'(x_0)\frac{\delta}{2}\right) = F'(x_0)\delta$$

Ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο x_0

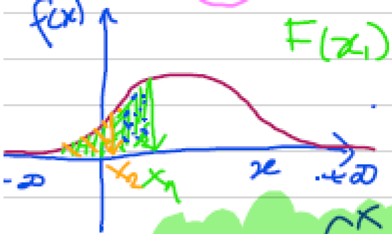
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}g''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$

$\delta = (x-x_0)$, $|\delta| << |x_0| \to g(x) \cong g(x_0)+g'(x_0)\cdot\delta$



$$g(x_0+\delta) \cong g(x_0)+g'(x_0)\,\delta$$

$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$ Φυσική σημασία της ασκ.

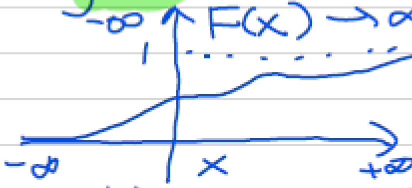


$$Prob(x_2<X<x_1) = F(x_1)-F(x_2)$$

$F(x)=\int_{-\infty}^x f(y)dy \qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^x f(y)dy = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy \equiv 1$ διότι η $f(y)$ είναι σππ., $f(x)\geq 0$

$F(x) \to$ ασκ. μια αύξουσα συνάρτηση του x που ξεκινάει από το 0 για $x\to-\infty$ και πάει στο 1 για $x\to+\infty$.



$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & x\in[0,1] \\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 \cancelto{0}{f(x)}dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty}\cancelto{0}{f(x)}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 cx^2dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

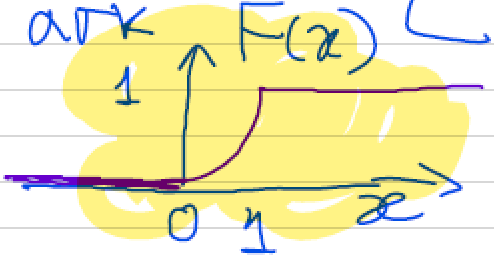
$I = c\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right) = \frac{c}{3}$ Για να είναι σππ πρέπει $I=1 \Rightarrow c=3$

Έτσι έχουμε την σππ $f_1(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{για } x\in[0,1] \\ 0 & \text{για } x\notin[0,1]\end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f_1(y)dy$
→ Αν $x\leq 0$ τότε $f_1(y)=0 \Rightarrow F(x)=0$
→ Αν $x\in[0,1] \to F(x)=\int_0^x 3y^2dy = [y^3]_0^x = x^3$
→ Αν $x>1$ τότε $f_1(x)=0 \Rightarrow F(x)=1=F(1)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^3 & x\in[0,1] \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

ασκ

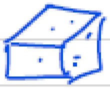


σππ

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ τ.μ. X

$$\mu = E(X) = \langle X \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X_i)$$ Διάκριτη τ.μ.

expectation of X — bracket

 → X το αποτέλεσμα μιας ζαριάς

$\#_i$	x_i	$P(x_i)$
3	1	1/6
4	2	1/6
2	3	1/6
1	4	1/6
5	5	1/6
3	6	1/6
18 συνολικές ρίψεις		

$\dfrac{\sum \#_i X_i}{18}$ Στατιστική μέση τιμή

$$\mu = 1\cdot\tfrac{1}{6} + 2\cdot\tfrac{1}{6} + 3\cdot\tfrac{1}{6} + 4\cdot\tfrac{1}{6} + 5\cdot\tfrac{1}{6} + 6\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$\mu = \tfrac{1}{6}(7+7+7) = \frac{3\cdot 7}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

θ.π. ~~μη αποτέλεσμα~~

Αν έχουμε την σππ f(x), $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ συνεχής τ.μ.

Θεωρούμε $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x\in[0,1] \\ 0 & \text{αν } x\notin[0,1] \end{cases}$

$$\mu = \langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \underbrace{f(x)}_{\to 0} dx + \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} x \underbrace{f(x)}_{\to 0} dx \Rightarrow$$

$$\mu = \int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 \rightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

Διασπορά (Variance) $\sigma^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$

Διακριτή τ.μ. $\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{N} (X_i-\mu)^2 P(X_i)$

Στο παράδειγμα με το ζάρι $\sigma^2 = (1-3.5)^2\cdot\frac{1}{6} + \frac{(2-3.5)^2}{6} + \frac{(3-3.5)^2}{6} + \frac{(4-3.5)^2}{6} + \frac{(5-3.5)^2}{6} + \frac{(6-3.5)^2}{6}$

$\#_1 \quad x_1$ κ.ο.κ.

$$\frac{\sum \#_i x_i}{18} = \frac{1}{18}\left(3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4 + 5\cdot 5 + 3\cdot 6\right)$$

$$Var(X) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \equiv \sigma^2$$

εξ ορισμού ίσον

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$ τυπική απόκλιση