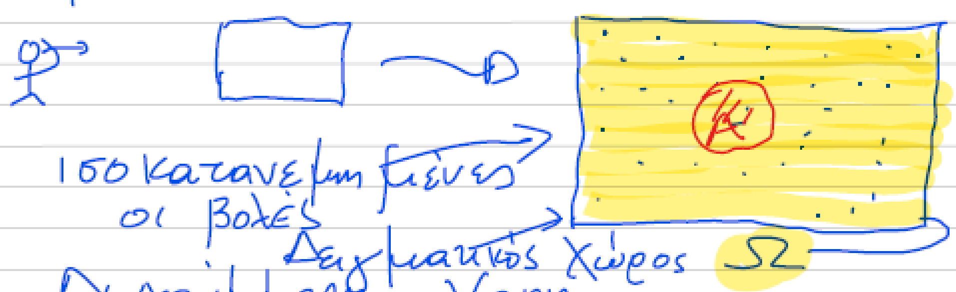
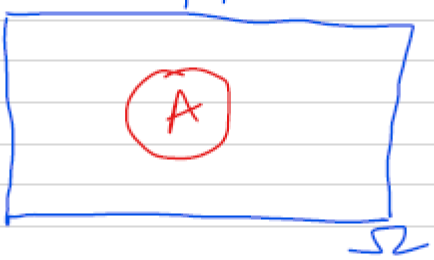
συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ)
probability density function (pdf)

Θεωρία Πιθανοτήτων. 14/10/2025

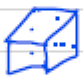


Διάγραμμα Venn



Ενδεχόμενο A

$$P_A = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\text{εμβαδόν } A}{\text{εμβαδόν } \Omega}$$



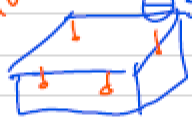
$$P_1 = \lim_{\to\infty} \frac{\#\text{που έρχεται } 1}{\#\text{που ρίχνω το ζάρι}}$$

$P_1 \to 1/6$

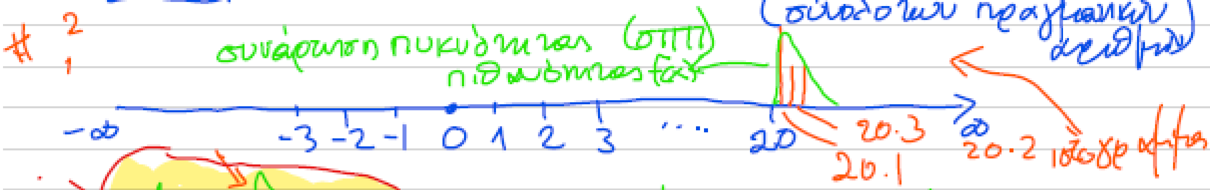
Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.)

$\theta \pm \delta\theta \to \underset{1}{20.1°C}, \underset{2}{20.2°C}, \underset{3}{20.1°C}, \underset{4}{20.3°C}$ κ.ο.κ.

εμφανίσεις



Η X τ.μ. → έχει τιμές στο $\mathbb{R}$ (σύνολο των πραγματικών αριθμών)



$\Rightarrow dp = f(x)dx$ → η πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει τιμές από το x έως x+dx

εμφανίσεις του 20.1°C $= \int_{20.05}^{20.15} f(x)dx \cdot$ #μετρήσεων $\Rightarrow 2 = I_1 \cdot 4$

$\to I_1$ $\Rightarrow I_1 = 2/4 = 1/2$

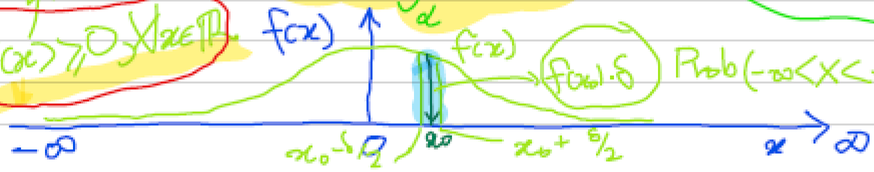
20.1°C ← 20.15 b, 20.05 a

20.03 → 20.0°C

$a<b$

$$Prob(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx,$$

$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$



$Prob(-\infty<X<+\infty)=1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Σηµειώσεις 14/10/2025 Γενικευµένα ολοκληρώµατα

παράγουσα $\to F(x): F'(x)=f(x)$

$$\boxed{\frac{dF}{dx}=f(x) \Rightarrow dF=f(x)dx}$$

$$I(\alpha,b)=\int_\alpha^b f(x)dx=\int_\alpha^b dF=F(b)-F(a), \quad \underline{a<b}$$

$$I(\alpha,\infty)=\lim_{b\to\infty} I(\alpha,b)=\lim_{b\to\infty}(F(b)-F(\alpha)) \searrow \int_\alpha^\infty f(x)dx<\infty$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha,\infty)=\lim_{\alpha\to-\infty}(F(\infty)-F(\alpha)) \searrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=I_1<\infty$$

$$F(\infty) = \lim_{b\to\infty}F(b)$$

σηπ $\underline{f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=K<\infty} \rightsquigarrow \frac{f(x)}{K}$ = σηπ

είναι αποδεκτή για σηπ

$$g(x)=e^{-x},\quad G(x)=-e^{-x},\quad G'(x)=e^{-x}=g(x)$$

$$I(\alpha,b)=\int_\alpha^b g(x)dx=\left[G(x)\right]_\alpha^b=-e^{-b}-(-e^{-a})=e^{-a}-e^{-b}$$

$$I(\alpha,\infty)=\int_\alpha^\infty g(x)dx=\lim_{b\to\infty} I(\alpha,b)=\lim_{b\to\infty}(e^{-a}-e^{-b})=e^{-a}-0=e^{-\alpha}<\infty$$

$$I(\alpha,\infty)=e^{-\alpha}<\infty \Rightarrow \int_0^\infty g(x)dx=I(0,\infty)=e^{-0}=1$$

$$g(x)=e^{-x},\ x\geq 0$$
$$\underline{g(x)=0,\ x<0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx=\int_0^\infty g(x)dx=1$$

$\text{Prob}(a\leq X\leq b)=\Pr(a\leq X\leq b)$ = η πιθανότητα η τυχαία µεταβλητή X να βρίσκεται στο διάστηµα $[\alpha,b]$

$$\Pr(X\leq b)\equiv \text{Prob}(-\infty<X\leq b)=\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$\Pr(X\geq c)=\text{Pro}(c<X<\infty)=\int_c^\infty f(x)dx$$

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανοµής (ΑΣΚ) $F(x)$

cumulative distribution function (cdf)

$$F(x)\equiv\text{Prob}(-\infty<X\leq x)=\int_{-\infty}^x f(y)dy$$

$$\text{Prob}(\alpha\leq X\leq b)=\int_\alpha^b f(x)dx=\int_{-\infty}^b f(x)dx-\int_{-\infty}^a f(x)dx=$$

$$=\cancel{\int_{-\infty}^a f(x)dx}+\int_a^b f(x)dx+\cancel{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx}=$$

Έστω σππ η $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Ώστε ασπκ:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ → $x<0$ → $\int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$

→ $x \geq 0$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x<0 \\ 1-e^{-x} & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

$F(x) = \int_{0}^{x} e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_{0}^{x} = -e^{-x} - (-1) = 1 - e^{-x}$