Βασικές ερωτήσεις για την κατανόηση του μαθήματος (Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές)

1) Να βρεθεί η μέση τιμή μ και η διασπορά σ^2 για την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1).

2) Δίδεται μια μη-αρνητική συνάρτηση $f_1(x)$ με $x \in R$ που είναι ολοκληρώσιμη από $-\infty$ έως +∞, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}_1(\mathrm{x})\, dx = N_1 < \infty$. Να κατασκευάσετε μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με βάση την $f_1(x)$.

3) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$.

4) (α)Δώστε τον ορισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής F(x). Να δείξετε ότι (β) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ και (γ) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. (δ)Σχεδιάστε ενδεικτικά μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

5) Δίδεται η συνάρτηση $f_2(x) = |x|$ για $x \in\ (-1,1)$ ενώ $f_2(x)$ =0 αλλού. (α)Να δείξετε ότι η $f_2(x)$ είναι μια αποδεκτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. (β)Να βρεθεί η μέση τιμή μ. (γ)Να βρεθεί η διασπορά σ^2.

6) Να αποδείξετε ότι η αναμενόμενη τιμή $\mathrm{E[(X-\lambda)^2]}$ γίνεται ελάχιστη (ως προς λ) όταν λ=μ=E(X).

7) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E(X^2) \geq [E(X)]^2}$.

8) Εάν X~Εκθ(θ) να βρεθούν η μέση τιμή μ=E(X) και η διασπορά Var(X). Πώς συγκρίνεται η τυπική απόκλιση σ με τη μέση τιμή μ.

9) Να αποδείξετε ότι η εκθετική κατανομή δεν εμφανίζει μνήμη.

10) Η κατανομή Weibull έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x)=$1 - exp\left[-\left(\frac{x}{\tau}\right)^{\delta}\right], x \geq 0$. Να υπολογίσετε τότε τη δεσμευμένη πιθανότητα Pr(X>α+β| X>α). Πώς συγκρίνεται αυτή με την Pr(X>β);

11) Εάν X~N(1,1) να βρεθεί η πιθανότητα X<0, δηλ. Pr(X<0), καθώς και πιθανότητα X>3, δηλ. Pr(X>3).

12) Εάν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με X~N(1,1) και Y~N(2,4) να υπολογισθεί η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή Z=2X+Y να είναι Z>0, δηλ. ποια είναι η Pr(Z>0);

13) Έστω η τυχαία μεταβλητή X~U(0,1). **Α)** Να βρεθούν οι E(X) και Var(X). **Β)** Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y=4X+3. **Γ)** Να βρεθούν οι E(Y) και Var(Y).

14) Να δείξετε ότι $[E(X\Upsilon)]^2 \leq E(X^2)E(\Upsilon^2)$. Υπόδειξη: Θεωρείστε την ποσότητα $E[(\mathrm{X}-\mathrm{zY})^2]$ που είναι θετική.

15) Να δείξετε ότι Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).

16) Θέτοντας X'=X-E(X) και Y'=Y-E(Y) στην ανισότητα Cauchy-Schwarz να αποδείξετε ότι $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ όπου $\rho_{X,Y}=\mathrm{Cov(X,Y)/[Var(X)Var(Y)]^{1/2}}$ ο συντελεστή συσχέτισης του Pearson.

17) Έστω X~Εκθ(θ), να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y=X^2$.

18) Έστω X~Εκθ(θ), να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y=X^{1/\delta}$.

19) Δίδεται η συνάρτηση $f_3(x) = 3x^2$ για $x \in\ (0,1)$ ενώ $f_3(x)$ =0 αλλού. (α)Να δείξετε ότι η $f_3(x)$ είναι μια αποδεκτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. (β)Να βρεθεί η μέση τιμή μ. (γ)Να βρεθεί η διασπορά σ^2. (δ) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

20) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητές δίδεται από τον τύπο $F(x) = Ax + B - \frac{3}{x}$ εάν x≥3 και 0 εάν x<3. i) Να βρεθούν οι σταθερές A και B, ii) Να υπολογίσετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, και iii) Να βρεθεί η πιθανότητα το x να είναι μικρότερο του 4 δεδομένου ότι είναι μικρότερο του 6.

Βασικές ερωτήσεις για την κατανόηση του μαθήματος (Τυχαίοι περίπατοι)

1) Έστω ένας τυχαίος περιπατητής ο οποίος κινείται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών ξεκινώντας από το 0 και εκτελεί 3 βήματα μήκους u_1, u_2, u_3 όπου τα βήματα αυτά είναι ανεξάρτητα και κατανέμονται με ίση πιθανότητα προς στα αριστερά ή στα δεξιά έχουν όμως διαφορετικά μήκη α_1, α_2, και α_3 αντίστοιχα. Να βρεθεί η μέση απομάκρυνση του περιπατητή από την αρχή όπως επίσης και η διασπορά της.

2) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της απομάκρυνσης ενός τυχαίου περιπατητή που κάνει N βήματα ίσου μήκους ισοπίθανα είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά.

3) Κάνοντας κατάλληλο μετασχηματισμό σε τυχαίες μεταβλητές Bernoulli να απεικονίσετε την απομάκρυνση X(N) του τυχαίου περιπατητή που κινείτε με πιθανότητα p προς στα θετικά κάνοντας N ανεξάρτητα βήματα σε μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή. Να βρείτε με αυτόν τον τρόπο τη μέση τιμή E[X(N)] και τη διασπορά Var[X(N)].

4) Ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης ερώτησης, να υπολογίσετε τη μέση τιμή E[X(N)] και τη διασπορά Var[X(N)] στην περίπτωση που κάθε βήμα προς τα θετικά έχει μήκος θ ενώ αυτό προς τα αριστερά α.

5) Στην περίπτωση τυχαίου περιπάτου με εκκίνηση από την αρχή των αξόνων και πιθανότητα κάθε βήματος προς τα θετικά ίση με p, η απομάκρυνση του περιπατητή μετά από N ανεξάρτητα βήματα δίδεται από τη σχέση x(N)=2k-N, όπου το k ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή για N προσπάθειες με πιθανότητα επιτυχίας κάθε προσπάθειας p. Έστω ότι ένας περιπατητής κάνει N ανεξάρτητα βήματα με πιθανότητα ½ να κινηθεί προς τα θετικά και κατόπιν M ανεξάρτητα βήματα με πιθανότητα 1/3 να κινηθεί προς τα θετικά. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τελικής θέσης του περιπατητή.

Βασικές ερωτήσεις για την κατανόηση του μαθήματος (Εκτίμηση τυχαίας μεταβλητής)

1) Να δείξετε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $E[(X-a)^2]$, όπου a$\in R$, στην εκτίμηση της τυχαίας μεταβλητής X γίνεται ελάχιστο όταν ο αριθμός a ισούται με E(X).

2) Να βρεθεί η εκτιμήτρια $\hat{x}_M = E[X|Y=y]$ με y>0 όταν $f_{X|Y}(x|y) = 1/y$ εάν $x \in (0, y)$ και 0 αλλιώς.

3) Να βρεθεί η εκτιμήτρια $\hat{x}_M = E[X|Y=y]$ με y>0 όταν $f_{X|Y}(x|y) = exp(-x/y)/y$ εάν $x \geq 0$ και 0 αλλιώς.

4) Γραμμική εκτιμήτρια ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος για την τυχαία μεταβλητή X δεδομένης της Y δίνεται από τον τύπο $\hat{X}_L = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}(Y - EY) + EX$. Εάν επιλεγεί τυχαία μεταβλητή Y η οποία είναι ανεξάρτητη της X, ποια είναι η $\hat{X}_L$;

5) Εάν η τυχαία μεταβλητή X είναι γραμμικά εξαρτημένη με την τυχαία μεταβλητή Y, δηλαδή Y=αX+β με $\alpha, \beta \in R$, να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης Pearson $\rho_{X,Y}=Cov(X,Y)/[Var(X)Var(Y)]^{1/2}$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει;

Καλή επιτυχία στις εξετάσεις!