Θεωρία Πιθανοτήτων
Τμήμα Φυσικής
Εξέταση 27 Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα 1. (20 μον) Κατασκευάζουμε έναν πενταψήφιο κωδικό με ψηφία ανάμεσα στα $1, 2, \ldots, 9$. Κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά. Ένας τέτοιος κωδικός είναι ο 17524. Η σειρά των ψηφίων έχει σημασία.
(α) Πόσους διαφορετικούς κωδικούς μπορούμε να κατασκευάσουμε;
(β) Πόσοι από αυτούς χρησιμοποιούν ακριβώς τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5;
(γ) Σε πόσους από τους κωδικούς του ερωτήματος (β) τα ψηφία 1, 2 είναι τοποθετημένα σε διπλανές θέσεις όπως και τα 3, 4;
(δ) Σε πόσους απο αυτούς συμμετέχουν τα ψηφία 1, 2, 3 και είναι τοποθετημένα σε διπλανές θέσεις; Όχι απαραίτητα με αυτή τη σειρά.

Θέμα 2. (20 μον) Διαθέτουμε τρία νομίσματα, $N1, N2, N3$. Το νόμισμα $N1$ φέρνει «Κεφαλή» με πιθανότητα $p_1 := 1/10$. Για τα άλλα δύο νομίσματα, οι πιθανότητα αυτή είναι $p_2 := 1/2, p_3 := 4/5$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε ένα από τα τρία στην τύχη και το ρίχνουμε 4 φορές. (α) Ποια η πιθανότητα και οι τέσσερεις ενδείξεις να είναι «Γράμματα»; .
(β) Αν από όλη τη διαδικασία μας ανακοινώνεται μόνο ότι και οι τέσσερεις ενδείξεις να είναι «Γράμματα», ποια είναι η πιθανότητα στην αρχή να επιλέχθηκε το νόμισμα $N3$; Ποιο νόμισμα είναι το πιθανότερο να επιλέχθηκε στην αρχή;

Θέμα 3. (30 μον) Ένα εργοστάσιο παράγει εξαρτήματα για μηχανές και χρειάζεται να ανοίγει τρύπες σε μεταλλικές επιφάνειες, των οποίων η διάμετρος πρέπει να είναι 50εκ. Η παραγωγική διαδικασία όμως δεν είναι ακριβής, με αποτέλεσμα η διάμετρος των τρυπών να ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 51εκ και τυπική απόκλιση 5εκ. Ωστόσο, εξαρτήματα με τρύπες διαμέτρου μεταξύ 49εκ και 52εκ θεωρούνται καλά, ενώ αυτά με διάμετρο μικρότερη των 49εκ ή μεγαλύτερη των 52εκ θεωρούνται ελαττωματικά.

- **(α):** Ποιο ποσοστό των παραγόμενων εξαρτημάτων είναι καλά και ποιο ελαττωματικά;
- **(β):** Δεδομένου ότι ένα εξάρτημα είναι ελαττωματικό ποιά η πιθανότητα να έχει άνοιγμα μικρότερο των 49εκ;
- **(γ):** Ένα ελαττωματικό εξάρτημα με τρύπα μικρότερη των 49εκ δεν πάει στα σκουπίδια αλλά μπαίνει στην παραγωγική διαδικασία για άλλη μια φορά. Αυτή τη φορά η διάμετρος θα είναι μέσα στα αποδεκτά όρια με πιθανότητα $p = 0.8$ ή θα είναι ελαττωματική με διάμετρο μεγαλύτερη των 52εκ. Με βάση αυτή την παραγωγική τακτική,
  - **(*i*):** Ποιο ποσοστό των εξαρτημάτων συνολικά πάει στα σκουπίδια;
  - **(*ii*):** Από τα 10 εξαρτήματα που μπήκαν εκ νέου στη παραγωγική διαδικασία, ποια η πιθανότητα το πολύ 2 να πάνε στα σκουπίδια;

Θέμα 4. (30 μον) Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $-4, -2, 0, 1, 2$ (και μόνο αυτές) με αντίστοιχες πιθανότητες $f(-4) = 2b, f(-2) = 3b, f(0) = f(1) = f(2) = b$.

- **(α):** Να βρεθεί η τιμή του b.
- **(β):** Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $\mathbf{P}(X > 0), \mathbf{P}(X \leq 1 | X > 0)$.
- **(γ):** Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά της X.

Οι απαντήσεις πρέπει να αιτιολογούνται πλήρως.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (α) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

   (β) $5!$

   (γ) $3! \cdot 2^2$

   (δ) $6 \cdot 5 \cdot 3! \cdot 3!$

2. (α)

$$\frac{1}{3}\left(\left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^4\right) = \frac{9^4 + 5^4 + 2^4}{3 \cdot 10^4} = \frac{7202}{30000}$$

(β)

$$\frac{\frac{1}{3}\frac{1}{5^4}}{\frac{9^4+5^4+2^4}{3\cdot 10^4}} = \frac{2^4}{9^4 + 5^4 + 2^4} = \frac{16}{7202}$$

Οι πιθανότητες για τα $N1, N2$ είναι αντίστοιχα

$$\frac{9^4}{9^4 + 5^4 + 2^4}, \frac{5^4}{9^4 + 5^4 + 2^4}$$

Πιθανότερο είναι να είχε επιλεγεί το $N1$.

3. Έστω $X \sim N(51, 5^2)$. Κατά τα γνωστά, η $Z := (X - 51)/5 \sim N(0, 1)$ και έχει συνάρτηση κατανομής Φ.

(α) Η πιθανότητα ένα εξάρτημα να μην είναι ελατωματικό είναι

$$\mathbf{P}(49 \le X \le 52) = \mathbf{P}\left(-\frac{2}{5} \le Z \le \frac{1}{5}\right) = \Phi(1/5) - \Phi(-2/5).$$

(β)

$$\mathbf{P}(X < 49|\{X < 49\} \cup \{X > 52\}) = \frac{\mathbf{P}(X < 49)}{\mathbf{P}(X < 49) + \mathbf{P}(X > 52)} = \frac{\Phi(-2/5)}{\Phi(-2/5) + 1 - \Phi(1/5)}.$$

4. (α) Έχουμε

$$1 = \sum_{t\in\mathbb{R}} \mathbf{P}(X = t) = 2b + 3b + b + b + b = 8b.$$

Άρα $b = 1/8$.

(β) $\mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = 2b = 1/4$, ενώ

$$\mathbf{P}(X \le 1|X > 0) = \frac{\mathbf{P}(X \le 1 \text{ και } X > 0)}{\mathbf{P}(X > 0)} = \frac{\mathbf{P}(X = 1)}{\mathbf{P}(X > 0)} = \frac{1}{2}.$$

(γ) Η μέση τιμή είναι

$$\mathbf{E}(X) = (-4)\mathbf{P}(X = 4) + (-2)\mathbf{P}(X = 2) + 0\mathbf{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbf{P}(X = 1) + 2\mathbf{P}(X = 2) = ... = -11/8.$$

Για τη διασπορά, χρησιμοποιούμε τον τύπο $\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(X)\}^2$. Υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(X^2) = 2b(-4)^6 + 3b(-2)^2 + b \cdot 0^2 + b \cdot 1^2 + b \cdot 2^2 = ... = \frac{49}{8}.$$

Οπότε, $\text{Var}(X) = (49/8) - (-11/8)^2 = 271/64$.