P1

Παρασκευή, 14 Ιανουαρίου 2022 3:24 μμ

Παρ) Έστω (X,Y) συνεχής τ.δ. με σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες σ.π.π. $X|Y=y$ και $Y|X=x$.

Περιθώριες

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^1 8xy\,dy =$$

$$= 8x \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 = 4x(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Όμοια:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 8xy\,dx =$$

$$= 8y \frac{x^2}{2}\Big|_0^y = 4y^3, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Συνεπώς:

Συνεπώς:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y^3} = \frac{2x}{y^2}$$

όπου: $0 \leq x \leq y$.

και.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x(1-x^2)} = \frac{2y}{1-x^2}$$

όπου: $x \leq y \leq 1$

P2

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ
(Stochastic Independence).

Οι τ.μ. X και Y καλούνται <u>στοχαστικώς ανεξάρτητες</u> ή απλώς <u>ανεξάρτητες</u> αν και μόνο αν για κάθε πραγματικούς x και y ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y).$$

→ <u>Διακριτές</u>: αν οι τ.μ. X και Y είναι διακριτές με από κοινού σ.π. $f_{X,Y}(x_i,y_j)$ $i,j=0,1,2,\ldots$ και περιθώριες $f_X(x_i)$ και $f_Y(y_j)$ τότε είναι ανεξάρτητες αν:

$$f_{X,Y}(x_i,y_j) = f_X(x_i)\, f_Y(y_j), \quad i,j=0,1,2,\ldots$$

→ <u>Συνεχείς</u>: Αν οι τ.μ. X, Y συνεχείς με από κοινού σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, $-\infty < x,y < \infty$ και περιθώριες $f_X(x)$ και $f_Y(y)$, τότε είναι ανεξάρτητες α.ν.ν.

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad -\infty < x, y < \infty$$

Προφανώς ισχύει:

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f_{XY}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)} = f_X(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

και

$$f_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_X(x_i)} = f_Y(y_j), \quad j = 0, 1, \ldots$$

για κάθε y_j και $f_Y(y_j) > 0$

και για κάθε x_i και $f_X(x_i) > 0$.

(*) Αν X κ Y ανεξάρτητες, τότε οι τ.μ.

$Z = g(X)$ και $W = h(Y)$ είναι ανεξάρτητες.

P3

Παρασκευή, 14 Ιανουαρίου 2022 3:53 μμ

Πχ Έστω 5 σφαιρίδια αριθμημένα $\{1,2,3,4,5\}$ όπου το $\{1\}$ είναι άσπρο, τα $\{2,3\}$ είναι μαύρα και $\{4,5\}$ κόκκινα. Έστω ότι εξάγονται 2 σφ. α) χωρίς επανάθεση και β) με επανάθεση.

Αν:

X: ο αριθ. των εξαγόμενων άσπρων σφ. κ

Y: — " — — " — μαύρων.

να υπολογισθούν οι από κοινού και οι περιθώριες σ.π. των X κ Y και να εξετασθεί αν είναι ανεξάρτητες.

α) Χωρίς επανάθεση

Ο Δ.Χ. είναι: $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),\ldots,(5,4)\}$

Έχουμε 20 σημεία [διατάξεις $(5)_2 = \frac{5!}{(5-2)!}$

$$= \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20 \Big] .$$

είναι ισοπίθανα και η απο κοινού σ.π. και οι περιθώριες είναι:

$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$1/10$	$4/10$	$1/10$	$6/10$
1	$2/10$	$2/10$	0	$4/10$
$f_Y(y)$	$3/10$	$6/10$	$1/10$	1

(The values $f_{X,Y}(x,y)$ fill the body of the table.)

Παρατηρούμε ότι $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ και επομένως οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

β) <u>Με επανάθεση</u>

$\underline{\Omega} = \{(1,1),(1,2),(1,3), \ldots, (5,5)\}$

Έχουμε 25 σημεία (διατάξεις $5^2 = 25$).

$f_{X,Y}(x,y)$

X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	$4/25$	$8/25$	$4/25$	$16/25$
1	$4/25$	$4/25$	0	$8/25$
2	$1/25$	0	0	$1/25$
$f_Y(y)$	$9/25$	$12/25$	$4/25$	$\frac{25}{25}$

Επίσης παρατηρούμε ότι: $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$

άρα δεν είναι ανεξάρτητες.

P4

ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (COVARIANCE).

(ή συνδιασπορά).

Έστω μια διδιάστατη τ.μ. (X,Y) και μια συνάρτησή αυτής $Z=g(X,Y)$. Η Z είναι μια τ.μ. με σ.π. $f_Z(z)=P(Z=z_k)$, $k=0,1,2,\ldots$ ή με σ.π.π. $f_Z(z)$, $-\infty<z<\infty$, η οποία προσδιορίζεται μέσω της σ.π. $f_{X,Y}(x_i,y_j)$ $i,j=0,1,2,\ldots$ ή της σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, $-\infty<x,y<\infty$ της (X,Y) αντιστοίχως. Συνεπώς

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}g(x_i,y_j)\,f_{X,Y}(x_i,y_j)$$

αν (X,Y) διακριτή, ή

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

αν (X,Y) συνεχής.

Ισχύουν:

↳ $E[g(X,Y)+h(X,Y)] = E[g(X,Y)] + E[h(X,Y)]$

και ως ειδική περίπτωση

$$E(g(X)+h(Y)) = E(g(X)) + E(h(Y)).$$

και θέτοντας: $g(X)=aX$ κ' $h(Y)=bY$

με a,b σταθερές, έχουμε:

$$E[aX+bY] = aE(X)+bE(Y).$$

↳ Αν X,Y ανεξάρτητες, τότε

$$E[g(X)\cdot h(Y)] = E[g(X)]\cdot E[h(Y)]$$

και ειδικότερα:

$$E(XY) = E(X)\cdot E(Y).$$

Ορ| Έστω (X,Y) μια δισδιάστατη τ.μ. με $\mu_X=E(X)$ και $\mu_Y=E(Y)$. Η συνδιακύμανση (συνδιασπορά) των τ.μ. X κ' Y συμβολίζεται

Με $C(X,Y)$ ή $Cov(X,Y)$ ή $\sigma_{X,Y}$ και ορίζεται:

$$\sigma_{X,Y} = C(X,Y) = Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)\right]$$

<u>Έχουμε:</u>

α) Αν X και Y τ.μ. και a, b, c, d σταθερές, τότε:

$$C(aX+b, cY+d) =$$

$$= E\left\{\left[aX+\cancel{b}-E(aX+\cancel{b})\right]\cdot\left[cY+\cancel{d}-E(cY+\cancel{d})\right]\right\} =$$

$$= E\left\{a\cdot[X-E(X)]\ c[Y-E(Y)]\right\} =$$

$$= a\cdot c\, E\left\{[X-\mu_X]\cdot[Y-\mu_Y]\right\} =$$

$$= a \cdot c \cdot C(X,Y).$$

β) Η συνδιακύμανση μπορεί να εκφραστεί ως

$$C(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)\right] =$$

$$= E\left[XY - X\mu_Y - \mu_X \cdot Y + \mu_X\mu_Y\right] =$$

$$= E(XY) - E(X)\mu_Y - \mu_X \cancel{E(Y)} + \cancel{\mu_X\mu_Y}$$

$$= E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

Άρα: $C(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$.

(*) Αν X, Y ανεξάρτητες, τότε $C(X,Y) = 0$

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά!