PL

Τετάρτη, 15 Δεκεμβρίου 2021 11:21 πμ

Πχ) # πελατών σε τράπεζα την ώρα ακολουθεί Poisson με μέσο όρο 10. Να υπολογισθούν:

α) Η πιθ. να είναι 8 πελάτες την επόμενη ώρα

β) Η πιθ να είναι μεταξύ 15 κ' 18 πελάτες την επόμενη 2 ώρες

γ) Η πιθ. στις επόμενες 3 ώρες, τουλ. 2 ώρες να έχουν 8 πελάτες την ώρα.

α) Έστω τ.μ. X: # πελατών ανά ώρα

και $X \sim Poisson(\lambda=10)$ με $f(x)=e^{-10}\frac{10^x}{x!}$

με $x=0,1,2,\ldots$

Άρα, ζητάμε: $P(X=8)=;$

Άρα: $P(X=8)=e^{-10}\frac{10^8}{8!}\simeq 0{,}11$

Αν ζητούσε η άσκηση τουλ. 8 άτομα την επόμενη ώρα

$$P(X\geq 8)=1-P(X<8)=1-P(X\leq 7)$$

$$=1-\sum_{x=0}^{7}e^{-10}\frac{10^x}{x!}=\ldots?$$

β) Έστω τ.μ. Y: # πελατών στο δίωρο

Άρα: $Y \sim \text{Poisson}(\lambda = 20)$

Ζητάμε: $P(15 \leq Y \leq 18) = F(18) - F(14)$

$$= \sum_{y=15}^{18} e^{-20} \frac{20^y}{y!}$$

$$= \sum_{y=0}^{18} e^{-20} \frac{20^y}{y!} - \sum_{y=0}^{14} e^{-20} \frac{20^y}{y!} \cong 0{,}27.$$

γ) Έστω τ.μ. W: # των ωρών με 8 πελ./ώρα

και: $W \sim \text{Bin}(3, p)$

όπου: $p = 0{,}11$ (από το (α) ερώτημα).

Ζητάμε: $P(W \geq 2) = \sum_{w=2}^{3} \binom{3}{w} \cdot p^w \cdot (1-p)^{3-w}$

$$= \binom{3}{2} p^2 \cdot (1-p) + \binom{3}{3} p^3 \cdot (1-p)^0$$

$$= 3 \cdot (0{,}11)^2 \cdot 0{,}89 + (0{,}11)^3 = \_\_\_ \ ?$$

ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

Έστω X: # των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία σε μια ακολουθία ανεξ. δοκιμών Bernoulli με πιθ. επιτυχίας p.

Έχουμε:

$$f(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^{x-r}$$

όπου: $x = r, r+1, \ldots$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < r \\ \sum_{k=r}^{[x]} \binom{k-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^{k-r}, & r \leq x < \infty \end{cases}$$

Επίσης:

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p} \quad \text{και} \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Συμβολικά: $X \sim NB(r,p)$.

Ομοιόμορφη κατανομή (Uniform)

Εκχωρεί ίσες (ομοιόμορφες) πιθανότητες σε συνεχή διαστήματα ενός τυχαίου πειράματος. Αυτά δεν είναι σημεία (αφού $P(X=x)=0$), η εκχώρηση της πιθανότητας γίνεται σε διαστήματα και είναι ανάλογη του μήκους των διαστημάτων.

Αν η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $[a,b]$, με $a<b$,

τότε: $P(x_1<X<x_2)=c(x_2-x_1)$,

με $a<x_1<x_2<b$.

Θέτοντας: $x_1=a$ και $x_2=b$

τότε: $P(a<X\leq b)=P(a\leq X<b)=1$

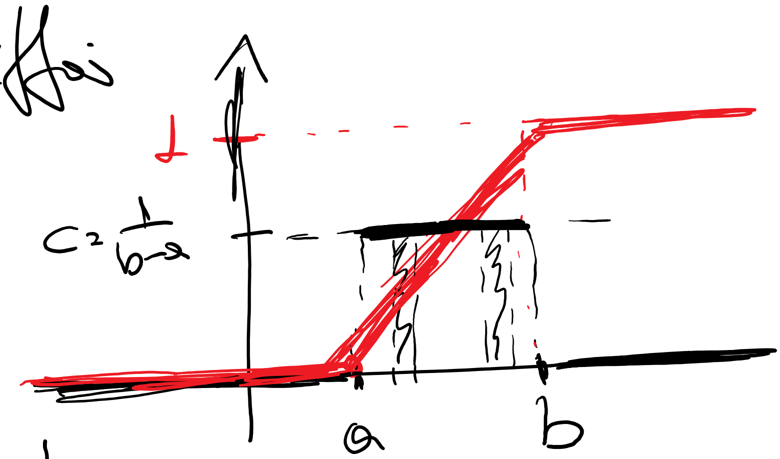
Άρα: $c(b-a)=1 \Longrightarrow \boxed{c=\frac{1}{b-a}}$

Συνεπώς, η συνάρτηση κατανομής:

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<\beta \\ 1, & \beta\leq x<\infty \end{cases}$$

Παραμετρίζοντας, παίρνουμε:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\mu = E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Για τη διακύμανση έχουμε:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

όπου: $$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Οπότε:

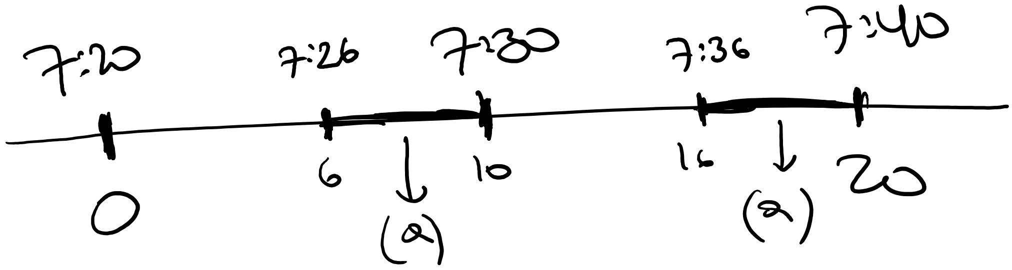
Οπότε:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Πχ | Τραίνο ανά 10' από 5πμ. Αν επιβάτης φθάσει ομοιόμορφα στο [7:20, 7:40] τότε ποιες οι πιθ. να περιμένει:

α) το πολύ 4' β) τουλ. 7'



Έστω X: ο χρόνος άφιξης του επιβάτη στο σταθμό τραίνου.

Έστω $X \sim U(0,20)$, όπου:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 0 \le x \le 20 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{x}{20}, & 0 \le x < 20 \\ 1, & 20 \le x < \infty. \end{cases}$$

α) Έστω A: ο επιβ. περιμένει το πολύ 4'
άρα φθάνει στο σταθμό στο [7:26, 7:30] ή
στο [7:36, 7:40]. Άρα:

$$P(A) = P(6 < X \leq 10) + P(16 < X \leq 20)$$

$$= \left[F(10) - F(6)\right] + \left[F(20) - F(16)\right]$$

$$= \left[\frac{10}{20} - \frac{6}{20}\right] + \left[\frac{20}{20} - \frac{16}{20}\right] =$$

$$= \frac{4}{20} + \frac{4}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

β) Έστω B: ο επιβ. περιμένει τουλάχιστον 7'
άρα φθάνει στο [7:20, 7:23] ή στο [7:30, 7:33]

Συνεπώς:

$$P(B) = P(0 < X \leq 3) + P(10 < X \leq 13)$$

$$= \left[F(3) - F(0)\right] + \left[F(13) - F(10)\right] =$$

$$= \left[\frac{3}{20} - \frac{0}{20}\right] + \left[\frac{13}{20} - \frac{10}{20}\right] =$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$