PL

Παρασκευή, 10 Δεκεμβρίου 2021 2:48 μμ

Poisson

Έστω τ.μ. X: το πλήθος των γεγονότων σε μονάδα χρόνου.

με σ.π. $f(x)=P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

όπου: $x=0,1,2,\dots$ και $0<\lambda<\infty$

Συμβολικά: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Έχουμε:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

Επίσης, η αθρ. σ.κ.

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0, & -\infty<x<0 \\ \sum^{[x]} e^{-\lambda}\lambda^k \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \left\{ \sum_{k=0}^{[x]} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad 0 \le x < \infty. \right.$$

Η μέση τιμή είναι:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{1} \xrightarrow{y=x-1} \lambda$$

Η διασπορά είναι:

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - E(X)^2$$

Όπου: $$E[(X)_2] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (x-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= \lambda^2 \underbrace{\sum_{x=2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}}_{1} \xrightarrow{y=x-2} \lambda^2$$

Συνεπώς: $$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - E(X)^2$$

$$\lambda^2 \quad \lambda \quad \lambda^2 \quad \lambda$$

Συνεπώς: $V(x) = E(X^2) - \ldots$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Άρα: $\boxed{E(x) = \lambda}$ και $\boxed{V(x) = \lambda}$.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

- Έστω διωνυμική κατανομή με πολύ μικρή πιθανότητα επιτυχίας ($p \longrightarrow 0$).
- Επίσης ν πολύ μεγάλο ($\nu \longrightarrow \infty$).
- Έτσι ώστε $\nu \cdot p$ να είναι πεπερασμένος αριθμ.

Τότε:

$$P(X=x) = \binom{\nu}{x} p^x \cdot (1-p)^{\nu-x} = \frac{\nu!}{x!\cdot(\nu-x)!} p^x \cdot (1-p)^{\nu-x}$$

με: $\mu = \nu \cdot p \Longrightarrow p = \mu/\nu$.

Οπότε: $P(X=x) = \frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^x \cdot \left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)^{\nu-x}$

$$= \frac{\nu!}{\nu^x \cdot (\nu-x)!} \cdot \frac{\mu^x}{x!} \cdot \left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)^{\nu-x}.$$

Όμως: $\frac{\nu!}{\nu^x(\nu-x)!} = \frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-x+1)}{\nu^x} \simeq \frac{\nu\cdot\nu\cdots\nu}{\nu^x} = 1$

Όμως: $\dfrac{\nu!}{\nu^x \cdot (\nu-x)!} = \dfrac{\nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-x+1)}{\nu^x} \simeq \dfrac{\nu\cdot\nu\cdots}{\nu^x} = 1$

και: $\left(1-\dfrac{\mu}{\nu}\right)^x = 1-(\nu-x)\dfrac{\mu}{\nu} + \dfrac{(\nu-x)\cdot(\nu-x+1)}{2}\left(\dfrac{\mu}{\nu}\right)^2 + \dots$

$$\simeq 1-\mu+\frac{\mu^2}{2} - \dots = e^{-\mu}$$

Οπότε: $P(X=x) = e^{-\mu}\dfrac{\mu^x}{x!}$

όταν $\nu \longrightarrow \infty$.

Πχ/ Κάποιος κατασκευάζει λάμπες για Χμας δέντρα. Γνωρίζει ότι το 2% από τις λάμπες είναι ελαττωματικές. Ποιά η πιθανότητα σε κουτί με 100 λάμπες να υπάρχουν το πολύ 3 ελαττωματικές.

Έχουμε $\nu=100$ και $p=\dfrac{2}{100}=0{,}02$

Έστω X: το # των ελαττ. λαμπτήρων σε $\nu = 100$ δοκιμές.

Άρα: $X \sim Bin(100, 0{,}02)$.

Ζητάμε: $P(X \leq 3) =$

$$= \sum_{x=0}^{3} \binom{\nu}{x} p^{x} (1-p)^{\nu - x}$$

$$= \sum_{x=0}^{3} \binom{100}{x} 0{,}02^{x} \cdot 0{,}98^{100-x} = 0{,}859.$$

<u>Poisson:</u> $\lambda = \nu \cdot p = 100 \cdot \frac{2}{100} = 2$

<u>Συνεπώς:</u>

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k}}{k!} = 0{,}857$$

P3

Πχ | 10 ρίψεις ενός μη αμερόληπτου νομίσματος. Έχουμε $P(5K)$ είναι διπλάσια της $P(4K)$. Ποια η πιθανότητα σε 5 ρίψεις να έχουμε μια τουλάχιστον κεφαλή.

Ρίψεις: $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν κεφαλή} \\ 0, & \text{αν γράμματα} \end{cases} \quad i=1,\dots,10$

με $P(X_i=1)=p$. Έχουμε $X_i \sim Bern(p)$

Η τ.μ. $Y=\sum_{i=1}^{10} X_i \sim Bin(10,p)$.

όπου: Y: το # των κεφαλών σε 10 ρίψεις.

Έχουμε: $P(Y=5)=\binom{10}{5}p^5\cdot(1-p)^5$

και: $P(Y=4)=\binom{10}{4}p^4\cdot(1-p)^6$

Γνωρίζουμε ότι: $P(Y=5)=2P(Y=4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \binom{10}{5} p^5 \cdot (1-p)^5 = 2\binom{10}{4} p^4 \cdot (1-p)^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{10!}}{{}_5\cancel{5!}\,\cancel{5!}} \cancel{p^5} \cdot \cancel{(1-p)^5} = 2\,\frac{\cancel{10!}}{\cancel{4!}\,\cancel{6!}_{6}} \cancel{p^4} \cdot (1-p)^{\cancel{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{5} = \frac{2}{6}(1-p) \Rightarrow 6p = 10 - 10p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16p = 10 \Rightarrow p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Έστω: $W \sim Bin\left(5, \frac{5}{8}\right)$. Θέλουμε:

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W < 1) = 1 - P(W = 0)$$

$$= 1 - \binom{5}{0} p^0 \cdot (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^5 \qquad \blacksquare$$

Πχ

α) Γεωμετρική: $X \sim Geom\left(\frac{1}{5}\right)$.

$$P(X=1) = \left(\frac{4}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$$

β) $$P(X>5) = 1 - P(X\leq 5)$$

$$= 1 - F(5) = 1 - \left[1 - (1-p)^5\right]$$

$$= (1-p)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

γ) $$\mu = E(X) = \frac{1}{p} = 5$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5^2}} = 20$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{20}$$